Universidade Anhanguera de São Paulo

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

Rodrigo Rodrigues Dias

ASPECTOS COGNITIVOS E CONCEITUAIS MOBILIZADOS NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE OTIMIZAÇÃO POR ESTUDANTES DE ENGENHARIA.

Tese apresentada à Banca Examinadora do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Universidade Anhanguera de São Paulo como exigência parcial para obtenção do título de **Doutor em Educação Matemática**, sob orientação da **Profa. Dra. Maria Elisa Esteves Lopes Galvão**

São Paulo, Agosto de 2017

FOLHA DE APROVAÇÃO

DIAS, Rodrigo Rodrigues. **Aspectos cognitivos e conceituais mobilizados na resolução de problemas de otimização por estudantes de engenharia**. Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Universidade Anhanguera de São Paulo como requisito parcial para obtenção do título de Doutorem Educação Matemática, sob a orientação da Profa. Dra. Maria Elisa Esteves Lopes Galvão.

Aprovada em ____/______/______

BANCA EXAMINADORA

____

Profª.Drª. Maria Elisa Esteves Lopes Galvão – Orientadora

____

Profª. Drª. Janete Bolilte Frant

____

Profª. Drª. Vera Helena Giusti de Souza

____

Prof. Dr. Luiz Gonzaga Xavier de Barros

____

Prof. Dr. Wanderley Moura Rezende

Dedico esta tese as minhas filhas Alice e Luisa.

"Sempre me pareceu estranho que todos aqueles que estudam seriamente esta ciência acabam tomados de uma espécie de paixão pela mesma. Em verdade, o que proporciona o máximo de prazer não é o conhecimento e sim a aprendizagem, não é a posse, mas a aquisição, não é a presença, mas o ato de atingir a meta."

(Carl Friedrich Gauss)

Agradecimentos

- ✓ A Deus por possibilitar que eu vivesse essa experiência;

- ✓ A minha esposa Cristiane e minhas filhas Alice e Luisa por entenderem minha ausência - mesmo quando estava em casa-, o meu estresse e crises de mau humor causadas pelas noites sem dormir e horas exaustivas de estudo;

- ✓ À Professora Doutora Maria Elisa Esteves Lopes Galvão por sua presença constante e seu estímulo diante das mudanças ocorridas em minha trajetória no doutorado e por acreditar em mim;

- ✓ A todos os professores do programa pelo compromisso e seriedade;

- ✓ Às Professoras Doutoras **Rosana Nogueira de Lima e Vera Helena Giusti de Souza** pelas colaborações durante as atividades de pesquisa;

- ✓ À professora Doutora **Janete Bolite Frant** pelas colaborações durante os seminários de Pesquisa;

- ✓ Aos funcionários administrativos do programa pela competência e dedicação;

- ✓ Aos colegas José Fernandes, Marcos Pavani e Irani Santana pelo companheirismo;

- ✓ Àamiga Sandra Lopes pela força durante nossa trajetória acadêmica;

- ✓ Ao amigo Douglas Grijó, que Deus levou antes que tivéssemos concluído o nosso Doutoramento;

- ✓ À professora Doutora Ana Maria Severiano de Paiva por acreditar na minha capacidade desde o meu curso de Mestrado;

- ✓ Aos meus pais por acreditarem que eu seria capaz de concluir mais este sonho;

Resumo

O objetivo deste trabalho é investigar quais aspectos cognitivos e conceituais são mobilizados na resolução de problemas de otimização por estudantes de engenharia. Quatro questões principais nortearam o presente estudo; a primeira busca os aspectos cognitivos e conceituais mobilizados na resolução de problemas de otimização; a segunda as estratégias utilizadas pelos alunos no momento da construção do conceito de ponto de máximo e/ou mínimo de uma função de uma variável real; a terceira as interações dos participantes com os diferentes recursos que podem ser mobilizados para a resolução dos problemas, a saber: calculadoras, esboço de gráficos, técnicas operatórias, uso de softwares e, finalmente, questionamos se uma proposta de ensino baseada em problemas de otimização é capaz de despertar no aluno o gosto e interesse pelo estudo do Cálculo Diferencial. Para tanto, valemo-nos dos trabalhos desenvolvidos por estudiosos nos processos de ensino e aprendizagem do cálculo, tanto no cenário nacional quanto internacional, além de pesquisas relacionadas ao uso da tecnologia no ensino do Cálculo. Teoricamente balizamos nosso trabalho recorrendo à Teoria das Representações Semióticas de Duval, à Teoria do Pensamento Matemático Avançado de Tall e Dreyfus e à teoria dos Três Mundos da Matemática de Tall. Metodologicamente, o trabalho foi conduzido pelo Design Experiment e dividido em cinco etapas: levantamento bibliográfico, entrevistas, elaboração e implementação das atividades e análises parciais e finais, baseadas nas teorias da fundamentação teórica adotada. Levando em conta nossa experiência docente, as hipóteses iniciais eram que os estudantes priorizariam os procedimentos algébricos em detrimento da visualização, que apresentariam dificuldades em modelar situações que envolvessem outros campos da matemática, como por exemplo, a trigonometria e a geometria espacial. Supúnhamos também que a tecnologia seria um recurso amplamente usado em aulas nos laboratórios de informática em algumas disciplinas específicas do curso de Engenharia. A partir da análise dos resultados desse estudo, chegamos a algumas conclusões que corroboram as hipóteses levantadas no transcorrer do trabalho e nos deparamos com situações que nos fizeram remodelar as atividades e, por consequência, construir novas hipóteses. Como conclusões, destacamos a importância do trabalho com atividades que agucem o espírito investigativo dos estudantes de Cálculo, ratificamos as vantagens da utilização dos recursos computacionais para o ensino de Cálculo e enfatizamos a importância da utilização de recursos manipulativos como agentes facilitadores dos processos de visualização, modelagem e generalização de situações.

Palavras-chave: Ensino de cálculo, pontos críticos, otimização, representações, Educação Matemática

ABSTRACT

The objective of this work is to investigate which cognitive and conceptual aspects are mobilized in solving problems of optimization by engineering students. Four main questions guided the present study; the first one seeks the cognitive and conceptual aspects mobilized in the resolution of optimization problems; the second of the strategies used by students at the moment of constructing the concept of maximum and / or minimum point of a function of a real variable; the third one of the interactions of the participants with the different resources that can be mobilized to solve the problems, namely: calculators, sketching of graphs, operative techniques, use of softwares and, finally, we questioned if a teaching proposal based on optimization problems , Is able to awaken in the student the taste and interest in the study of Differential Calculus. For this we use the work developed by scholars in the teaching and learning processes of calculation both in the national and international scenario, as well as research related to the use of technology in teaching Calculus. Theoretically we mark our work using the Duval Semiotic Representation Theory, the Advanced Mathematical Thought Theory of Tall and Dreyfus and the Three Worlds Theory of Tall Mathematics. Methodologically the work was conducted by Design Experiment and divided into five stages: bibliographic survey, interviews, preparation and assessment of activities and partial and final analysis based on theories of the theoretical basis adopted. Taking into account our teaching experience, the initial hypotheses were that students would prioritize algebraic procedures to the detriment of visualization, which would present difficulties in modeling situations involving other fields of mathematics, such as trigonometry and spatial geometry. We also assumed that technology would be a widely used resource in classes in computer labs in some specific subjects of the engineering course. From the analysis of the results of this study, we arrive at some conclusions that corroborate the hypotheses raised in the course of the work and we are faced with situations that made us reshape the activities and consequently build new hypotheses. As a conclusion, we emphasize the importance of working with activities that agitate the research spirit of Calculus students, ratify the advantages of using computational resources for Calculus teaching and emphasize the importance of the use of manipulative resources as facilitators of visualization processes, modeling and generalization of situations.

Keywords: Calculus teaching, critical points, optimization, representations, Mathematics Education

RÉSUMÉ

L'objectif de ce travail est d'étudier quels aspects cognitifs et conceptuels sont mobilisés dans la résolution de problèmes d'optimisation par des étudiants en ingénierie. Quatre questions principales ont guidé la présente étude; le premier cherche les aspects cognitifs et conceptuels mobilisés dans la résolution des problèmes d'optimisation; la seconde les stratégies utilisées par les étudiants au moment de construire le concept de point maximum et / ou minimum d'une fonction d'une variable réelle; le troisième les interactions des participants avec les différentes ressources qui peuvent être mobilisées pour résoudre les problèmes, à savoir: les calculatrices, l'esquisse des graphiques, les techniques opératoires, l'utilisation des logiciels et enfin, nous avons interrogé si une proposition d'enseignement basée sur des problèmes d'optimisation est capable d'éveiller chez l'étudiant le goût et l'intérêt pour l'étude du calcul différentiel. Par conséquent, nous utilisons le travail développé par les chercheurs dans les processus d'enseignement et d'apprentissage du calcul, à la fois national et international, en plus de la recherche liée à l'utilisation de la technologie dans l'enseignement du calcul. Théoriquement, nous marquons notre travail en utilisant la théorie sémiotique des représentations de Duval, la théorie avancée de la pensée mathématique de Tall et Dreyfus et la théorie des trois grands mondes des mathématiques élevées. Méthodologiquement, le travail a été mené par Design Experiment et divisé en cinq étapes: enquête bibliographique, entretiens, élaboration et mise en œuvre des activités et analyse partielle et finale, sur la base des théories de la base théorique adoptée. Prenant en compte notre expérience d'enseignement, les hypothèses initiales étaient que les étudiants privilégieraient les procédures algébriques au détriment de la visualisation, ce qui présenterait des difficultés pour modéliser des situations impliquant d'autres domaines des mathématiques, tels que la trigonométrie et la géométrie spatiale. Nous avons également supposé que la technologie serait une ressource largement utilisée dans les cours de laboratoire informatique dans certains sujets spécifiques du cours d'ingénierie. A partir de l'analyse des résultats de cette étude, nous arrivons à des conclusions qui corroborent les hypothèses émises au cours du travail et sont confrontées à des situations qui nous ont fait remodeler les activités et, par conséquent, construire de nouvelles hypothèses. Comme conclusions, nous soulignons l'importance de travailler avec des activités qui aiguise l'esprit de recherche des étudiants Calculus, ratifier les avantages de l'utilisation des ressources informatiques pour l'enseignement du Calcul et souligner l'importance de l'utilisation des ressources manipulatrices comme facilitateurs des processus de visualisation. modélisation et généralisation des situations.

Mots clés: Enseignement du calcul différentiel, points critiques, optimisation, représentations, éducation mathématique

ÍNDICE DE FIGURAS

INDICE DE QUADROS

INDICE DE TABELAS

INDICE DE GRÁFICOS

SUMÁRIO

Introdução

Os problemas decorrentes do ensino de Cálculo I no primeiro semestre das universidades, nas diferentes áreas do conhecimento como Engenharia, Matemática, Física, Química, Economia, Administração etc., vêm sendo objeto de estudo de muitos pesquisadores em Educação Matemática. “É bastante comum que, nesses cursos, a disciplina de Cálculo I apresente altos índices de reprovação e desistência” Rezende (2003). Nesse sentido, (SILVA, 2009) nos afirma que“o desempenho insatisfatório dos alunos nessa disciplina tem preocupado pesquisadores de todo o mundo, com níveis altíssimos de reprovação e desistências em cursos de Licenciaturas e Engenharias”.

Por conta da minha prática profissional como professor de Cálculo, sempre ouvi de alunos que a disciplina era difícil, que não entendiam o motivo do engenheiro ter que estudar Cálculo, dentre muitas outras lamentações. Constatava também que o rendimento das turmas piorava quando começávamos a trabalhar com as aplicações das derivadas, em especial, com os problemas de otimização. Era bastante comum ouvir dos alunos que os problemas eram difíceis, e que seria mais fácil aplicar as regras de derivação que resolver os problemas propostos.

D'Ambrosio (2012) é bastante enfático ao afirmar que “o problema maior do ensino de ciências e matemática é o fato das mesmas serem apresentadas de forma desinteressante, obsoleta e inútil, e isso dói para o jovem”. Nesse sentido, somos levados então a atentar ao fato de que uma possível alternativa para despertar o gosto pelo estudo nos estudantes de Cálculo I seria a apresentação de uma proposta de ensino que estimulasse o espírito investigativo.

A análise do plano de ensino da disciplina de Cálculo I da universidade onde se desenvolveu a pesquisa, e uma das quais em que atuo como professor, justifica a inserção da disciplina no programa do curso da seguinte maneira:

> O Cálculo Diferencial e Integral possui uma importância marcante na conceituação, descrição e resolução de problemas no estudo da Engenharia. O uso do Cálculo Diferencial e Integral, **como ferramenta na solução de problemas no mundo real**, o torna uma disciplina básica e imprescindível no ensino de qualquer área de

> Engenharia. (Plano de Ensino, Cálculo Diferencial e Integral I, p.1, grifo nosso)

Quando observamos o plano de ensino e buscamos o objetivo geral para o ensino de Cálculo I, verificamos que este é apresentado da seguinte forma:

> "Ao final do semestre o discente deve ser levado a **adquirir os conhecimentos sobre derivadas, suas aplicações,** (...) sendo capaz de aplicar estes conceitos na resolução de problemas e situações concretas em Engenharia" (Plano de Ensino, Cálculo Diferencial e Integral I, p.1, grifo nosso).

Com essas inquietudes, chego ao doutorado inicialmente motivado a propor um estudo que me levasse a entender o processo de compreensão do conceito de ponto crítico de uma função de variável real, pois acreditava que, entendendo como os alunos construíam esse conceito, já seria uma forma de tornar essa aprendizagem menos "penosa" tanto para os estudantes quanto para professores.

A partir das discussões durante as aulas, fui instigado a inicialmente refletir a respeito do objetivo geral do ensino de Cálculo I, a partir dos livros, programas e da ementa da universidade onde a pesquisa se desenvolveria.

Tomei como pressuposto que o objetivo geral da disciplina Cálculo I é o estudo das propriedades gerais das funções de uma variável real, ou seja, análise de seu comportamento ao longo do domínio e, como recurso auxiliar, encontramos, com frequência, a construção de gráficos. Essa análise inclui o estudo do crescimento e o decrescimento de uma função, bem como identificar de que maneira essa função cresce e/ou decresce; para tal, os professores valem-se da taxa de variação da função, ou seja, o estudo da derivada e do estudo do comportamento da sua segunda derivada.

Na maioria dos fenômenos que perpassam por várias áreas do conhecimento e que permitem uma modelagem que leva ao estudo do comportamento de uma função, estudarmos como essa função cresce e/ou decresce conduz a respostas que interessam. Não podemos, portanto, negar que esse estudo caracteriza uma das principais aplicações do Cálculo Diferencial.

A leitura de pesquisas relacionadas ao ensino de Cálculo chamou a minha atenção para o fato de que, para além das dificuldades em compreender os conceitos relativos ao Cálculo Diferencial, encontramos também uma preocupação em verificar quais são os recursos metodológicos que o professor usa em suas aulas e como esses recursos interferem no resultado ao longo do processo de ensino e de aprendizagem. Nesse sentido, vários são os recursos que podem ser usados para o trabalho sobre os pontos críticos de uma função de uma variável, desde estratégias elementares, passando pelo esboço dos gráficos de funções, à utilização de software que nos permitam traçar os gráficos das funções, que estávamos estudando, até os problemas de otimização.

Sendo assim, optamos por apresentar aos alunos uma sequência de atividades que contemplem esses recursos no intuito de obtermos dados para posterior análise que servirão como subsídios para a pesquisa em questão. Iniciados os encontros com os participantes na análise dos protocolos iniciais que avaliei a necessidade de tomar um caminho mais produtivo e viável, dado o tempo disponível para os encontros. Passei a investigar os aspectos cognitivos e conceituais mobilizados na resolução de problemas de otimização. Acreditamos que o cenário dos problemas de otimização é motivador para as aulas de Cálculo Diferencial, por acreditar que esse pode ser um recurso/estratégia válido para despertar o interesse pelo Cálculo, uma vez que vivemos um momento no qual as mudanças ocorrem de forma muito rápida e essa velocidade nos desafia na busca por novas alternativas de resolução para os problemas que a vida nos oferece.

A certeza da importância de se oferecer recursos variados para que os participantes da pesquisa solucionassem os problemas propostos foi ratificada a partir da leitura do trabalho de Bianchini & Puga (2006), que constataram que nem sempre a relação entre as diversas formas de representar uma função (algébrica e gráfica) é de domínio dos alunos, ou seja, as pesquisadoras perceberam que os alunos não conseguem, na maioria dos casos, coordenar essas duas formas de representação. Sendo assim, confirmávamos a coerência de nossa proposta metodológica.

Após o apresentado até aqui, no que se refere ao trajeto tomado por nosso estudo, salientamos que o objetivo geral passou a ser o de apontar quais aspectos cognitivos e conceituais são mobilizados por estudantes de engenharia, no momento em que trabalham com valores de Máximo e Mínimo de funções de uma variável real, por meio dos problemas de otimização.

Para atingirmos nosso objetivo geral, o trabalho terá como eixos norteadores as seguintes questões de pesquisa:

a) Quais são os aspectos cognitivos e conceituais mobilizados na resolução de problemas de otimização?
b) Quais são as estratégias utilizadas pelos alunos no momento da construção do conceito de ponto de máximo e/ou mínimo de uma função de uma variável real?
c) Como os alunos interagem frente às diferentes alternativas de resolução dos problemas oferecidos pela sequência de ensino, a saber: calculadoras, esboço de gráficos, técnicas operatórias, uso de softwares?
d) Uma proposta de ensino de funções baseada em problemas de otimização, é capaz de despertar no aluno o gosto e interesse pelo estudo do Cálculo Diferencial?

Como o presente estudo encontra-se vinculado à linha de pesquisa Ensino e Aprendizagem de Matemática e suas Inovações, torna-se redundante dizer que o foco de interesse é o conhecimento e a aprendizagem matemática, e por conta disso, o raciocínio matemático encontra nesse contexto um local privilegiado.

Dentre os vários campos do conhecimento matemático, o Cálculo Diferencial se apresenta como um campo fértil para a utilização e exploração das várias representações dos objetos matemáticos, em especial das funções. Sabemos que as funções são objetos matemáticos abstratos, não estando assim acessíveis à percepção de maneira direta. A construção das ideias relativas ao comportamento das funções, foco do trabalho do Cálculo Diferencial, pressupõe a utilização de representações desse objeto.

Diante do exposto, justifica-se a escolha da Teoria das Representações Semióticas, de Raymond Duval, como uma das teorias que irão fundamentar o presente estudo.

Para conduzir a análise dos aspectos cognitivos e conceituais mobilizados na resolução de problemas de otimização por estudantes de engenharia, faz-se necessária a utilização de outra teoria que juntamente à teoria de Duval, sustente o presente estudo em seus aspectos cognitivos. As teorias escolhidas foram a Teoria dos Três Mundos da Matemática de David Tall e a Teoria do Pensamento Matemático Avançado de David Tall e ShlomoVinner.

A escolha da Teoria do Pensamento Matemático Avançado deve-se ao fato de Tall e Vinner integrarem um grupo que há quatro décadas realiza pesquisas relacionadas aos fenômenos ocorridos no ensino e na aprendizagem de matemática do ensino superior, mais especificamente, sobre os objetos do Cálculo Diferencial, enquanto a escolha da Teoria dos Três Mundos da Matemática, justifica-se pelo fato de que ela contempla adequadamente o estágio de evolução construtiva do pensamento matemático.

Metodologicamente, optamos por trabalhar com o Design Experiment. Essa opção metodológica atende aos objetivos desta pesquisa por seu caráter dinâmico e por sua natureza intervencionista. O Design permite o repensar das conjecturas iniciais da pesquisa e, através de uma abordagem iterativa, possibilita a elaboração e a realização de novas tarefas.

A presente pesquisa possuiu o seguinte encadeamento metodológico: inicialmente propusemos um diagnóstico contendo problemas de otimização com objetivo de avaliar o conhecimento já construído pelos participantes a respeito do nosso objeto de estudo. Ainda na fase diagnóstica, apresentamos aos participantes uma sequência de atividades, na qual pretendíamos explorar a variação de funções, que é a ferramenta matemática para a resolução dos problemas, com objetivo de verificar o conhecimento dos alunos a esse respeito e ainda detectar quais eram os elementos da imagem de conceito sobre a variação de funções que eles já possuíam.

Destacamos ainda que, durante a execução da pesquisa, optamos por entrevistar professores, buscando uma visão geral de quem eram eles e conhecer um pouco da sua atuação e suas concepções em relação ao nosso objeto de estudo. Também entrevistamos os participantes em dois momentos distintos. No início da pesquisa, como objetivo, além das informações gerais sobre eles, pretendíamos obter dados a respeito de seus conhecimentos no que tange ao nosso objeto de investigação. Após o término da intervenção, o objetivo foi investigar se a proposta de ensino apresentada e baseada em problemas de otimização foi capaz de despertar neles o gosto e interesse pelo estudo do Cálculo Diferencial.

O presente estudo está estruturado em cinco capítulos, a saber:

O capítulo 1 é dedicado à revisão de literatura. Devemos inicialmente destacar que a revisão de literatura não foi uma tarefa fácil. O número de estudos feitos no cenário da Educação Matemática na área do Cálculo Diferencial e Integral ainda é bastante restrito e dentre os que existem não encontramos trabalhos que tratassem da mesma problemática pretendida por esse estudo. Por conta disso, optamos por tratar, na revisão de literatura, de estudos nacionais e internacionais relacionados ao nosso objeto de estudo.

O capítulo 2 é dedicado à fundamentação teórica. Uma vez que nosso objeto de estudo está pautado no comportamento das funções de uma variável real, estamos conscientes de que iremos trabalhar com representações, uma vez que as funções constituem um campo abstrato. Dessa forma, optamos por três teorias que fossem capazes de nos orientar na elaboração de um conjunto de atividades a serem desenvolvidas com os estudantes, bem como nos fornecer elementos ou parâmetros para a análise dos protocolos. A utilização das representações justifica nossa escolha pela Teoria das Representações Semióticas de Duval e, em contrapartida, o tipo de raciocínio exigido para o trabalho com o Cálculo Diferencial justifica nossa escolha pelas teorias dos Três Mundos da Matemática de David Tall e a do Pensamento Matemático Avançado de Tall e Vinner. A utilização de artefatos manipuláveis, nos conduziu ao trabalho com a Teoria dos Três Mundos da Matemática.

O capitulo 3 destina-se à Metodologia da pesquisa e aos procedimentos metodológicos. A metodologia utilizada no presente estudo foi o Design Experiment. Por se tratar de uma metodologia que tem como sua parte essencial um “olhar” para o que os alunos falam e fazem, estabeleceu-se a organização dos procedimentos, de modo a permitir ao pesquisador especificar padrões sucessivos no raciocínio dos alunos. Nos procedimentos metodológicos, apresentaremos a forma como a pesquisa foi proposta e o processo utilizado na execução do presente estudo.

O capítulo 4 é dedicado à observação de como o objeto de estudo deste trabalho é abordado nos livros didáticos presentes na ementa de Cálculo I, na instituição onde se desenvolveu o estudo. Por acreditarmos que o livro didático é um elemento que compõe o cenário do processo de ensino e de aprendizagem, resolvemos analisar os livros de Cálculo I presentes nas ementas dos cursos de Engenharia da universidade onde se desenvolveu a pesquisa. Nessa análise buscamos observar o encadeamento adotado pelos autores ao trabalhar com pontos Máximos e Mínimos de função e suas possíveis articulações com os problemas de otimização. Foram parâmetros para análise os referenciais teóricos da pesquisa.

O capítulo 5 é dedicado às entrevistas. Nesse capítulo são detalhadas e analisadas entrevistas realizadas com alunos que já cursaram as disciplinas de Cálculo e também com os professores de Cálculo I, todos da universidade onde a pesquisa se desenvolveu.

O capítulo 6 é dedicado às intervenções. Apresentam-se, nesse capítulo, a descrição e análise dos protocolos das atividades desenvolvidas com os participantes da pesquisa. Destacamos que, em alguns momentos, fez-se necessária a utilização de *prints* de telas de computadores utilizados pelos participantes, áudios de conversas entre eles, bem como entrevistas com os participantes, na tentativa de elucidar algumas dúvidas relativas a “como” as questões foram resolvidas.

O capítulo 7 é destinado às considerações finais. Nesse capítulo apresentaremos os resultados encontrados, bem como as respostas para as questões de pesquisa que nortearam o presente estudo.

Capítulo 01

Revisão de Literatura

O ensino de Cálculo Diferencial e Integral constitui-se em objeto de pesquisa por parte da comunidade acadêmica em Educação Matemática. O alto índice de reprovação e evasão nessa disciplina chama a atenção e incentiva grupos de pesquisadores no intuito de verificar as causas, bem como propor alternativas que venham modificar o atual cenário em que nos encontramos.

Esse fato não é típico do Brasil. Em sua tese de doutorado, Rezende (2003) já nos forneceu alguns exemplos de pesquisas feitas no exterior em relação ao ensino de Cálculo Diferencial e Integral, que tratam desde a busca por entender as dificuldades dos alunos, até aquelas que apresentam alternativas metodológicas para o ensino de Cálculo. Dentre elas, o autor destaca David Tall, um dos principais pesquisadores do chamado "pensamento matemático avançado", cujos estudos estão ancorados na análise das dificuldades encontradas na aprendizagem de conceitos concernentes ao Cálculo Diferencial e Integral. Segundo Rezende (2003), a importância dos estudos de Tall está centrada no fato que "estes giram em torno das dificuldades encontradas nas aprendizagens dos conceitos básicos do Cálculo, tendo a psicologia cognitiva como pano de fundo para as suas análises epistemológicas".

Ao analisarmos as pesquisas em Educação Matemática relacionadas ao ensino do Cálculo Diferencial, observamos que, em sua maioria, essas pesquisas têm estudado questões relacionadas ao uso dos computadores como recurso de ensino, às dificuldades encontradas por alunos e por professores durante o curso de Cálculo I e a assuntos relacionados a tópicos de seu conteúdo como o estudo de limites e a construção do conceito de derivada, como veremos adiante.

Um dos aspectos frequentemente ressaltados nesses trabalhos é a necessidade da compreensão dos conceitos matemáticos por parte dos estudantes, bem como a importância das representações no estudo do Cálculo.

Orton (1983) e Artigue (1995) destacam em seus estudos a "supervalorização" das técnicas operatórias e afirmam que essas práticas são muito comuns no ensino do Cálculo Diferencial. Essa concepção é também evidenciada em Vieira (2013).

Nesse capítulo, apresentaremos uma revisão de literatura com foco em questões relacionadas ao ensino de Cálculo Diferencial. Com o objetivo de elaborar uma revisão de literatura que fosse capaz de fundamentar nossa pesquisa e de nos fornecer uma visão panorâmica a respeito do que já foi pesquisado e publicado no contexto do ensino e aprendizagem do Cálculo Diferencial, busquei inicialmente estudos relacionados ao estado da arte[1] do Ensino de Cálculo Diferencial, sem pretender atingir a mesma amplitude. Como o objetivo do presente estudo é investigar os aspectos cognitivos e conceituais mobilizados na resolução de problemas de otimização por estudantes de engenharia, optamos por pesquisas relacionadas ao estudo das derivadas e suas aplicações e ao ensino de cálculo nos cursos de Engenharia.

Por conta de nosso público alvo, resolvemos fazer um levantamento do que estava sendo investigado por pesquisadores com formação em Matemática, e que atuam no ensino de Cálculo Diferencial em cursos de Engenharia. Nessa perspectiva, encontramos dois estudos: Zeferino, Wrobel&Carneiro (2013), e um panorama sobre dissertações teses e artigos, da pesquisadora Sonia Barbosa Camargo Igliori (2006) e complementadas por MARINI (2013).

No estudo "Um mapa do ensino de cálculo nos últimos 10 anos" do COBENGE, os pesquisadores analisaram artigos relacionados ao ensino de Cálculo I publicados nos últimos 10 anos de edição do COBENGE[2]. Segundo os autores, "a finalidade da pesquisa foi de identificar e analisar as principais preocupações dos autores em relação ao ensino de Cálculo nessa década". Para tanto, os autores identificaram os principais

[1]"Pesquisas denominadas estado da arte podem ser definidas como de caráter bibliográfico, elas parecem trazer em comum o desafio de mapear e de discutir uma certa produção acadêmica em diferentes campos do conhecimento, tentando responder que aspectos e dimensões vêm sendo destacados e privilegiados em diferentes épocas e lugares, de que formas e em que condições têm sido produzidas certas dissertações de mestrado, teses de doutorado, publicações em periódicos e comunicações em anais de congressos e de seminários. Também são reconhecidas por realizarem uma metodologia de caráter inventariante e descritivo da produção acadêmica e científica sobre o tema que busca investigar, à luz de categorias e facetas que se caracterizam enquanto tais em cada trabalho e no conjunto deles, sob os quais o fenômeno passa a ser analisado."(Ferreira, 2002, p.258)

[2] Congresso Brasileiro de Educação em Engenharia, é organizado pela Associação Brasileira de Educação em Engenharia. A escolha de analisarmos textos referentes a esse congresso deveu-se a dois fatos: o primeiro que nossa pesquisa acontece no contexto do Bacharelado em Engenharias e o segundo é o fato de encontrarmos nos anais desse congresso trabalhos de pesquisadores preocupados com o ensino do Cálculo Diferencial e Integral nos cursos de Engenharia

pesquisadores e instituições a que se filiam e as principais referências bibliográficas apresentadas em seus artigos. Após a leitura dos títulos de 3543 artigos, foram selecionados 59 que estavam relacionados ao estudo do Cálculo I. Porém destes, dois (2) não estavam disponíveis online, o que reduziu o número de artigos para 57. O número reduzido de pesquisas em ensino de Cálculo I, já se faz notar, uma vez que apenas 1,66% dos artigos publicados na década estudada, eram relacionados à temática proposta pelos autores.

Cury (2002) apresenta um estudo a respeito do ensino das Matemáticas nas Engenharias, e segundo a autora, essas pesquisas começaram a surgir somente a partir de 1998. Segundo a autora, embora o número de publicações de Matemáticos e/ou Educadores Matemáticos fosse pequeno, dentre estas, 40% eram relacionadas ao Ensino do Cálculo Diferencial e Integral.

Segundo Zeferino etall (2013)“uma hipótese apresentada por Cury(2002) e confirmada por eles em seu estudo, é a de que os professores de disciplinas matemáticas não consideram o COBENGE o fórum mais adequado para essa discussão, preferindo eventos da área de Educação Matemática ou de Informática na Educação”.

Na busca para verificar a veracidade e posteriormente validar a hipótese apontada por Cury, os pesquisadores analisaram os artigos publicados na década de 2002 a 2010 no Encontro Nacional de Educação Matemática, (ENEM) e verificaram que o número de artigos também é bastante pequeno.

Segundo os autores:

> Os resultados mostraram que há um pequeno índice de publicações nessa área e que a grande maioria dos autores publicou apenas um único trabalho. David Tall é o pesquisador mais citado e a tese de doutorado de Maria Cristina BonomiBarufi é a obra mais citada. Dados a variedade de referências bibliográficas e o baixo número de citação de cada obra, perceberam que não há autor ou obra que possa ser considerada uma referência da área. (Zeferino, et al, 2013 p.3)

Dessa forma, os pesquisadores destacam a existência de uma “descontinuidade de pesquisas de um mesmo autor”, ou seja, os pesquisadores publicam uma pesquisa inicial, fruto do seu trabalho de doutoramento, mas não prosseguem com o estudo, como mostra a figura abaixo:

Tabela 2: Quantidade de artigos por autor

Artigos publicados	Quantidade de autores	%
1	123	89,78
2	12	8,76
3	2	1,46
Total	137	100

Figura 1: Tabela de artigos por autor.
Fonte: Zeferino et al 2013

Quanto ao número de autores e suas respectivas universidades, os pesquisadores apresentaram a seguinte tabela.

Tabela 3: Quantidade de artigos por Universidade

IES	UFPA	Mackenzie	Universidade Severino Sombra	Cefet-MG	PUC-PR	Positivo	Unesp Bauru	Unisinos	Unicamp
Autores	4	4	4	3	3	3	3	3	3

Figura 2: Quantitativo de artigos relacionado ao Ensino de Cálculo por universidade

Fonte: Zeferino et al 2013

Após o estudo dos 57 artigos, os pesquisadores puderam observar, dentre outros fatos, que a bibliografia citada por um autor não é a mesma daquela citada por outro e que as pesquisas realizadas sobre o ensino de Cálculo I, publicadas no COBENGE enquadram-se em 4 categorias, a saber: o perfil dos alunos, os recursos didáticos as propostas metodológicas e as dificuldades específicas com foco no conteúdo.

> As classes 1 e 4 se agrupam em um grupo chamado Reprovação em Cálculo I, que trata do alto índice de reprovação dos alunos, pontuando dificuldades específicas com foco no conteúdo (análise de erros e análises estatísticas) e foco no perfil do aluno (relação entre métodos de estudo e sua influência no desempenho acadêmico ou o interesse do aluno pelo curso de engenharia). Artigos na Classe 3 propõem estratégias diferenciadas para lidar com o problema, como "aulões" de conteúdo de ensino médio, provas uniformizadas por uma equipe de professores, mais atenção à prática docente, etc. A Classe 2 reúne artigos com diferentes propostas de uso de recursos didáticos para o ensino de cálculo tais como metáforas e recursos multimídia e computacionais como os softwares Winplot, Mathcad, Wolfram Alfa, Matlab e etc. (Zeferino et al, 2013, p.9)

Ainda no cenário de investigações a respeito do ensino e da aprendizagem do Cálculo Diferencial, encontramos o trabalho “Aspectos epistemológicos da Aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral: um panorama sobre dissertações teses e artigos”, de Wagner Marini (2015), orientado pela professora Doutora Sonia Barbosa Camargo Igliori. O estudo é classificado pela pesquisadora como sendo uma pesquisa de estado da arte, cuja coleta de dados buscou investigar o número de pesquisas relacionadas ao estudo do Cálculo Diferencial e Integral, inicialmente pelo banco de teses da CAPES. A pesquisadora complementou a coleta com as pesquisas no Banco de teses da PUC-SP, revista SBEM e internet e encontrou mais de cem (100) trabalhos que foram reduzidos a quarenta e dois (42), após a leitura. Os dados foram organizados e foi apresentado o quadro 01, segundo o seguinte critério: ano de publicação, autor, modalidade (artigo, dissertação de mestrado, dissertação de mestrado profissional, tese de doutorado), instituição, foco e quadro teórico.

Item	Ano da Publicação	Autor (a)	Modalidade	Instituição	Foco	Teoria
1	1981	David Tall e Shlomo Vinner	A		Aprendizagem	Conceito Imagem Conceito Definição
2	1988	David Tall	A		Aprendizagem	Conceito Imagem Conceito Definição
3	1994	Geraldo Oliveira Barbosa	A		Aprendizagem	NI
4	1999	Lígia Arantes Sad	A		Ensino/Aprendizagem	Modelo de Campos Semânticos
5	2003	Cristina Meyer	M	PUC-SP	Aprendizagem	Conceito Imagem Conceito Definição
6	2003	Jawme do Carmo Macedo Leme	M	PUC-SP	aprendizagem	Processos Estruturais de Sfard
7	2003	Wanderley Moura Resende	D	USP	Ensino/Aprendizagem	Obstáculos Epistemológicos Segundo Bachellard
8	2004	Agnaldo Herculio de Oliveira	M	PUC-SP	Ensino	Processos Estruturais e Processuais de Sfard
9	2004	Marcos Antônio Barbosa	M	PUC-PR	Ensino/Aprendizagem	Transposição Didática de Chevalard
10	2004	Maria Cecilia Arena Lopes Barto	M	PUC-SP	Aprendizagem	Tall, Sierpinska e Artigue
11	2005	José Roberto Damasceno da Silva	M	Universidade Federal do MS	Aprendizagem	Semiotica de Duval
12	2006	Luiz Carlos Almeida de Domenico	M	PUC-PR	Ensino	NI
13	2006	Pedro Mateus	MP	PUC-SP	Ensino	Semiotica de Duval
14	2006	João Pereira da Silva Neto	MP	PUC-SP	Ensino	Mediação de Vigotsky e A. Sig. De Ausubel
15	2007	Desiree Fransson Balielo Picone	M	PUC-SP	Ensino	Semiotica de Duval
16	2007	Fernando Eduardo de Souza	M	PUC-SP	Enino	Conceito Imagem Conceito Definição
17	2007	Katsuyoshi Kurata	M	CETESP	Ensino	Piaget, Vgostiky, ausubel, \\legendre
18	2007	Sandra Regina Leme Foster	MP	PUC-SP	Ensino	Semiotica de Duval e Interativista de Vygotsky
19	2008	Rodolfo Miranda de Barros	D	UNICAMP	Ensino/Aprendizagem	Aprendizagem Significativa de Ausubel
20	2008	Marcos Roberto Celestino	D	PUC-SP	Ensino	Modelo de Campos Semânticos
21	2008	kassiana schmidt Surjus Cirilo	M	Universidade Estadual de Londrina	Ensino	Transposição Didática de Chevalard
22	2008	Leornado Barichello	M	UNESP-Rio Claro	Ensino/Aprendizagem	Aprendizagem e Desenvolvimento de Vygostsky
23	2008	Marcelo Cavasotto	M	PUC-RS	Aprendizagem	Obstáculos Epistemológicos Segundo Bachellard
24	2009	Janice Valia de Los Santos	D	PUC-SP	Ensino	NI
25	2009	Natália Maria Cordeiro Barroso	D	Universidade Federal do Ceará	Ensino	Piaget, Vgostiky, ausubel, \\legendre
26	2009	Marco de Miranda Paranhos	M	PUC-SP	Ensino	Situações Didáticas
27	2010	Iêda do Carmo Cruz e Joao Laudares	A	CEFET-MG	Ensino	NI
28	2010	Gislene Garcia Nora de Oliveira	M	Universidade Federal de Minas Gerais	Aprendizagem	Aprendizagen Situada ngerde Lave e Wenger
19	2010	Patricia Olveira Costa	M	Universidade Federal de Uberlândia	Ensino/Aprendizagem	Situações Didáticas
30	2010	Macos Vinicius Ribeiro	M	UNESP-Rio Claro	Ensino/Aprendizagem	NI
31	2010	Andricele Richait	M	UNESP-Rio Claro	Ensino	NI
32	2011	Benedito Antonio da Silva	A	PUC-SP	Ensino/Aprendizagem	NI
33	2011	Marco Antonio Esher	D	UNESP-Rio Claro	Ensino	NI
34	2011	Osvaldo Honorio de Abreu	M	Universidade Federal de Ouro Preto	Aprendizagem	Conceito Imagem Conceito Definição
35	2011	Monique Sequeira Lehmann	MP	Universidade Severino Sombra	Ensino/Aprendizagem	Campos Conceituais de Vergnaud
36	2011	Odiléia da Silva Rosa	MP	Universidde Severino Sombra	Ensino	Psicologia Cognitiva MSLQ
37	2011	Walquiria Correa dos Santos	MP	PUC-SP	Estudo Histórico	NI
38	2012	Silvia Pereira dos Santos e Marcia Graci e Oliveira Matos	A	Universidade Federal da Bahia	Aprendizagem	NI
39	2013	Marcio Vieira de Almeida e Sonia Barbosa Camargo Iglioli	A	PUC-SP	Aprendizagem	Conceito Imagem Conceito Definição
40	2013	Jayro Fonseca da Silva e Herminio Borges Neto	A	Universidade Federal do Ceará	Ensino	NI
41	2013	Maria Raquel M. Morelatte	A	UNESP- Presidente Prudente	Ensino/Aprendizagem	Aprendizagem Significativa de Ausubel
42	2013	Raimundo Moais Santos e Herminio Borges Neto	A	Universidade Federal do Ceará	Ensino/Aprendizagem	NI

Quadro 1: Estado da Arte , pesquisas em Cálculo.
Fonte: Wagner Marini (2015)

Após análise dos dados apresentados no quadro, podemos verificar que as pesquisas relacionadas ao Cálculo Diferencial, em nível de Doutorado, ainda são raras no cenário nacional. É importante destacar que a abordagem que propusemos no presente trabalho ainda não foi encontrada na literatura, e, sendo assim, apresentaremos na revisão de literatura, estudos das dificuldades relacionadas ao processo de ensino e aprendizagem do Cálculo e ao uso da tecnologia no ensino do Cálculo.

1.1 Dificuldades no ensino e na aprendizagem do Cálculo

Tanto no Brasil quanto no exterior, pesquisas têm sido feitas na tentativa de obter uma explicação para os problemas enfrentados por alunos e professores no que se refere ao processo de ensino e de aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral. Nesse cenário, destacam-se as pesquisas de Barufi 1999), Rezende (2003), Orton (1983), Artigue (1991), Scher (1993), Tasmir (2013) dentre outros.

Em sua tese de doutorado, Rezende(2003) apresenta um estudo sobre as dificuldades epistemológicas no ensino do Cálculo. Um dos pontos destacados pelo autor é que a dificuldade nessa disciplina não está relacionada às condições locais, sociais ou culturais:

> Engana-se quem pensa que tal problema é cultural e que se justifica pela condição sócio-econômica da sociedade brasileira. A situação do ensino de Cálculo nos países "desenvolvidos" não é muito diferente, visto que trabalhos sobre esse tema têm sido publicados e recebidos merecido destaque por parte da literatura especializada internacional. (Rezende, 2003, p.4)

Na busca de compreender o que o autor denominou "fracasso no ensino do Cálculo", são apontadas possíveis justificativas, discutidas em pesquisas na área de Educação Matemática. Segundo ele, as razões poderiam estar centradas em torno dos processos de aprendizagem, ou na falta de preparo dos alunos, ou ainda no próprio professor, além da estrutura curricular da matemática, que não proporciona aos alunos no Ensino Médio o suporte de que eles necessitam para iniciarem o estudo do Cálculo.

> Diante da complexidade do problema, têm sido muitas as respostas e os encaminhamentos apresentados pelos pesquisadores da área. Uns preferem justificar o problema no âmbito da psicologia cognitiva: acreditam que o problema é de natureza psicológica, isto é, os alunos

> não aprendem por que não possuem estruturas cognitivas apropriadas que permitam assimilar a complexidade dos conceitos do Cálculo. Há quem julgue, no entanto, que o problema é de natureza mais simples: as dificuldades de aprendizagem são decorrentes do processo didático, isto é, a solução reside em se encontrar uma forma apropriada para se ensinar a disciplina de Cálculo. (Rezende, 2003, p.4)

Na busca para entender o problema retromencionado, Rezende (2003) opta por apresentar uma nova forma de entender o quadro do ensino de Cálculo:

> Não obstante, pensamos de forma diferente: acreditamos que grande parte das dificuldades de aprendizagem no ensino de Cálculo é essencialmente de **natureza epistemológica**. Pode-se dizer ainda mais: as raízes do problema estão além dos métodos e das técnicas, sendo inclusive anteriores ao próprio espaço-tempo local do ensino de Cálculo. (Rezende, 2003, p.6, grifo do autor)

Em sua tese, Rezende apresenta macroespaços de dificuldades de aprendizagem epistemológica do Cálculo tratadas como dualidades discreto/contínuo; variabilidade/permanência; finito/infinito; local/global; dualidade sistematização/construção.

No macroespaço da dualidade discreto/contínuo, o autor evidencia a "ignorância" (REZENDE, 2003) dos alunos, uma vez que, para o autor, existe uma dicotomia entre a aritmética e a geometria, bem como uma limitação conceitual dos alunos a respeito do que sejam os números reais. Afirma que mesmo os alunos que fizeram um curso de Cálculo e/ou Análise ainda pensam os números reais de forma "nebulosa", uma vez que conceituam os "irracionais como aqueles que não são racionais e os reais como sendo o conjunto formado por racionais e irracionais". Nesse contexto, para Rezende, a dualidade discreto/contínuo irá se apresentar como um agente complicador no momento em que o aluno for construir a ideia de continuidade.

No macroespaço da dualidade variabilidade/permanência, o autor destaca a ênfase dada aos aspectos estáticos do cálculo em detrimento de seus aspectos dinâmicos, como por exemplo o trabalho com derivada associando-a ao coeficente angular da reta tangente e relegando a segundo plano a interpretação como taxa de variação instantânea. Outra crítica feita pelo autor nesse macroespaço é sobre o trabalho com funções no Ensino Médio.

> No estudo das funções reais a variável “x” é assumida tacitamente como a “variável independente universal”. Cabe, entretanto, ressaltar que a idéia de função é estabelecida aqui, não no contexto da “variabilidade”, mas, em termos de uma correspondência estática entre os valores das variáveis “x” e “y”. O gráfico da função é, em geral, “plotado” através de uma tabela em que os valores “notáveis” são escolhidos pelo professor. A curvatura das curvas que compõem o gráfico da função é, em geral, induzida pelo professor que tenta convencer o aluno, pelo acréscimo de mais pontos, ou mesmo através de um sofisticado programa computacional, que a única possibilidade é a dele - professor. (Rezende, 2010, p.5)

No macro espaço do infinito/finito, o autor afirma que, mesmo que os alunos já tenham feito um curso de Cálculo ou de Análise, suas interpretações sobre o infinito são “ingênuas”, prova disso é a tentativa de se tentar trabalhar com o infinito atrubuindo-lhe um “status” de número.

> O infinito é um elemento estranho para o nosso aluno do ensino médio e, por conseguinte, para o nosso aluno de Cálculo. Mas continua estranho para o estudante, mesmo após um curso de Análise. Alguns desses estudantes agora são professores de matemática, lecionam nos ensinos médio e fundamental, e o conceito de infinito continua estranho para a maioria deles. Com isso, reproduzem o ciclo que eles próprios vivenciaram. (Rezende, 2010 p.6)

No que se refere ao macro espaço local/global, o autor nos mostra que muitas das ideias do Cálculo Diferencial são definidas, incialmente, de maneira local e depois são desenvolvidas na intenção de torná-las globais, como por exemplo, a continuidade em um ponto, a diferenciabilidade num ponto etc.

Para Rezende :

> Assim, para assimilar a estrutura do resultado matemático, o aluno precisa saber propriamente as condições locais e/ou globais de suas hipóteses, do seu resultado (tese) propriamente dito e das correlações entre eles. Se tal habilidade não foi trabalhada com o aluno em fases anteriores de sua aprendizagem escolar, as consequências são, em geral, catastróficas: os resultados do Cálculo são deformados ou enfraquecidos pelos estudantes. (Rezende, 2003, p.370)

Quando fala no macroespaço sitematização/construção, o autor nos chama a atenção para a prática normalmente adotada nas aulas de Cálculo:

> (...)os conceitos são definidos formalmente e os resultados são demonstrados passo a passo segundo um modelo axiomático que parte da definição formal.(...)Exercícios de cálculos e fixação são acrescentados ao final de cada tópico do conteúdo programático para que o treinamento possa ser realizado.(...)A significação dos conceitos e dos resultados é realizada no âmbito da justificação lógica formal das "definições" dos conceitos básicos e das "demonstrações" dos teoremas.(...) Assim, com essa sistematização exacerbada, surge um dos grandes obstáculos de natureza epistemológica do ensino normal de Cálculo: a "desmaterialização" dos seus resultados e conceitos básicos. (Rezende, 2003, p.379).

Com a apresentação e discussão desses macroespaços, Rezende conclui sua pesquisa enfatizando que um dos fatores que colaboraram para a Reforma do Cálculo ou Calculus Reform[3] foi o uso excessivo de procedimentos técnicos que acabam por afastar os alunos das ideias do Cálculo.

No estudo que faremos sobre os problemas de otimização, os aspectos relacionados à dualidade, variabilidade e permanência se farão presentes, pois com a utlização do software, iremos retomar uma discussão a respeito dos pontos críticos da função, já que falaremos em ponto de máximos e mínimos e sua importância na representação gráfica da função, pois como nos afirma Rezende(2003) "os pontos críticos, que são, em verdade, os elementos de articulação do esboço do gráfico de uma função real de uma variável (também real)".

Os aspectos local/global se farão presentes uma vez que iremos fomentar discussões a respeito da diferenciabilidade da função no ponto e também ao "longo" das funções. Em nossas intervenções também iremos propor situações que propiciem a discussão a respeito da diferença entre valores locais e globais, como por exemplo os pontos de Máximos e/ou Mínimos.

Barufi, em sua tese de doutorado, em 1999, tomando como pressuposto teórico a rede de conhecimentos e significados, se propôs a compreender as dificuldades no ensino do Cálculo a partir da análise de 24 livros didáticos. A escolha do trabalho com

[3]Segundo Rezende(2003) O Calculus Reform foi um movimento nascido nos Estados Unidos em prol da reforma do ensino de Cálculo iniciado nos anos 80. Segundo o pesquisador, a característica básica da Calculus Reform é uso da tecnologia tanto para o aprendizado de conceitos como o de teoremas, como na resolução de problemas.O pesquisador afirma que a grande preocupação desse movimento foi o de mostrar a aplicabilidade do Cálculo por meios de exemplos reais e que supria o pouco conhecimento algébrico dos alunos pelo uso dos programas de computação Algébrica.

livros didáticos foi justificada pela autora pelo fato destes serem um recurso didático que se faz presente na prática dos professores e estudantes de Cálculo.

Para a pesquisadora, conhecer algo implica necessariamente conhecer seu significado.

> (...) a compreensão não pode simplesmente ser fruto da transmissão. Ela decorre da apreensão do significado do objeto do conhecimento. Quando falamos em significado de um dado conhecimento, estamos nos referindo a todas as relações que dizem respeito a esse conhecimento. Assim sendo, o significado não é algo material que se transfere de um indivíduo a outro. Constitui-se num feixe de relações, analógicas, metafóricas, que podem ser estabelecidas, envolvendo aquilo que se pretende conhecer, *enredando-o* ao que já é conhecido. Os significados podem emergir das experiências individual ou coletivamente vivenciadas, a partir da interação dos indivíduos com objetos ou com outros indivíduos. (Barufi, 1999, p.13)

Barufi nos chama a atenção para o fato de que o conhecimento não pode ser transferível de alguém que conhece para alguém que não conhece por meio de transmissão de informações.

Ao fazer alusão ao conhecimento matemático em sua pesquisa, a autora enfatiza as diferenças entre o Matemático e o professor de Matemática. Para a pesquisadora:

> (...) O matemático produz Matemática, realiza pesquisa num campo restrito e profundo, descobre novos resultados, reorganiza-os da maneira mais geral possível, *descontextualizada, despersonalizada, atemporal.* (...) o matemático estabelece comunicação com uma comunidade restrita, dentro da qual os resultados que encontrou são reconhecidos, e, portanto validados, constituindo-se em conhecimento matemático. (...) O professor de Matemática executa uma tarefa muito diferente, na medida em que ele precisa recontextualizar e repersonalizar o conhecimento que seus alunos necessitam articular, isto é, realiza um processo que é contrário, em certo sentido, ao dos matemáticos que produziram o conhecimento. (Barufi, 1999, p.29-30)

Para a efetivação do processo de construção do conhecimento, a autora enfatiza a responsabilidade do professor em criar situações de problematização dos conteúdos para que o aluno construa significados relacionados aos conceitos que estão sendo trabalhados e, a partir desses significados se desenvolva a compreensão do conceito.

Para gerar o interesse dos estudantes pelas ideias que deseja desenvolver, “o professor pode buscar aqueles problemas importantes que, historicamente, deram origem ao desenvolvimento dos conceitos, ou mesmo buscar problemas relevantes na atualidade”. (Barufi, 1999,p.34)

Segundo Barufi (1999), o professor precisa valer-se de alguns recursos para que o aluno construa sua rede de significados em relação ao conceito que está sendo trabalhado. Para a pesquisadora, destacam-se os trabalhos em grupo – por conta da interação entre os elementos - destacam-se ainda a utilização da língua materna e de imagens pictóricas.

Em sua tese, a pesquisadora apresenta um quadro no qual descreve a construção do conhecimento em sala de aula.

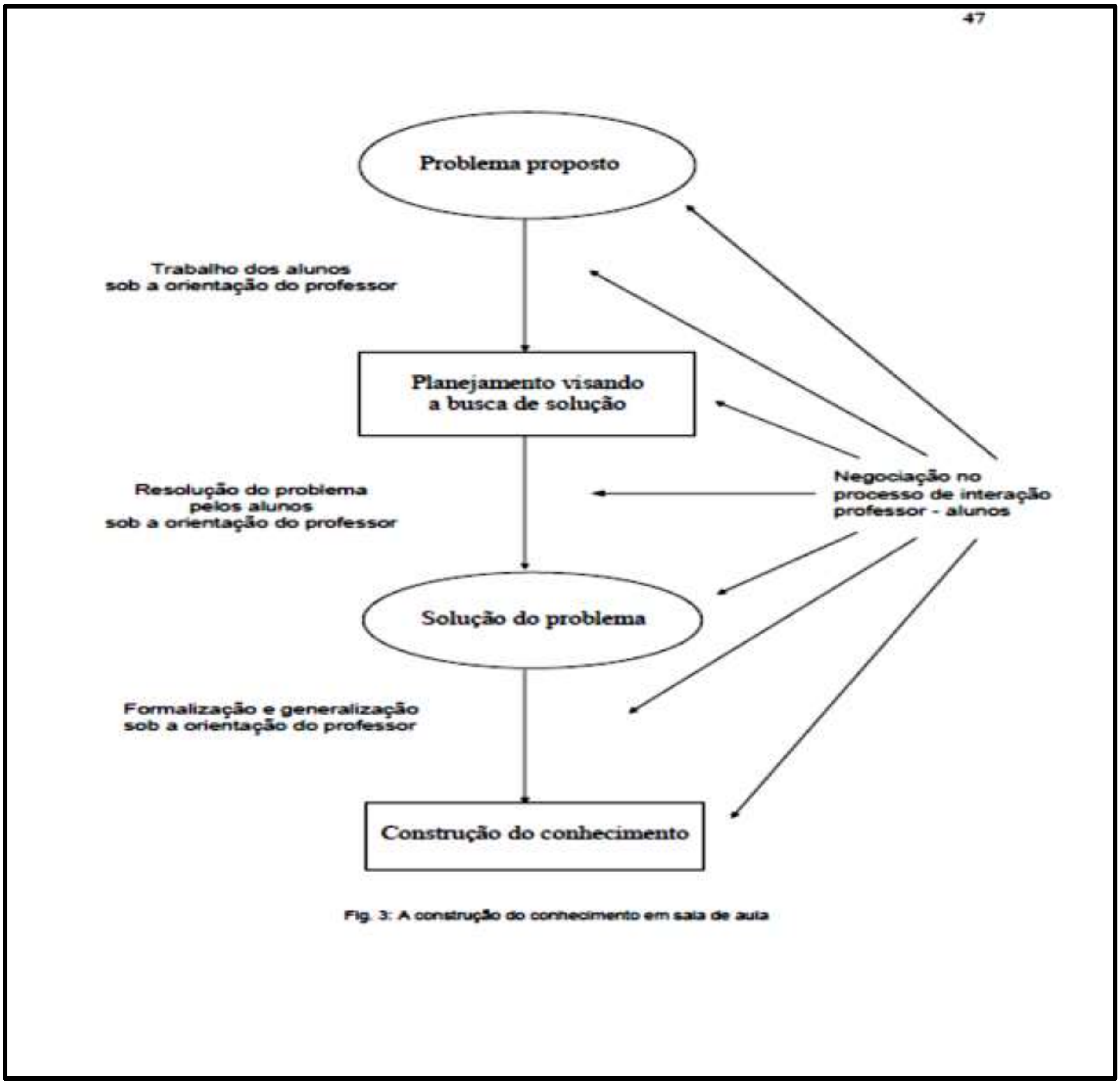


Figura 3: construção do conhecimento em sala de aula
Fonte: Barufi, 1999, p.47

Em suas análises a respeito dos livros de Cálculo, a pesquisadora afirma que dentre os livros analisados para elaborar sua tese, em 25% deles as ideias fundamentais do Cálculo não são explícitas, enquanto em 46% deles os conceitos são apresentados prontos. No que tange à problematização, apenas 38% deles partem de problemas realmente significativos para a compreensão e construção dos conceitos fundamentais do Cálculo.

Outra crítica feita pela pesquisadora, diz respeito às demonstrações. Barufi não é contra a demonstração, muito pelo contrário, mas afirma que o aluno dos cursos de Cálculo acaba por fazer a demonstração, mas não percebe sua relevância.

> (...) a coerência e a justificação através de prova, apesar de perfeitas, não fornecem estímulo suficiente para a grande maioria dos alunos, pois para eles não fica, de modo algum, clara a razão pela qual certas afirmações são importantes, precisam ou não ser demonstradas, e assim por diante. (Barufi, 1999, p.150).

A autora faz críticas ao modelo de ensino de Cálculo em nossas universidades, uma vez que este ainda prima por “uma visão dogmática de alguns conteúdos” (Barufi,1999) contrariando novas formas de se pensar o ensino da Matemática e do próprio Cálculo Diferencial e Integral.

Segundo a autora, o trabalho com o Cálculo é conduzido por meio de um grande número de exercícios que levam os alunos à memorização, sendo assim “reduz-se a ideia, o conceito, ao algoritmo e sobra aquela eterna pergunta dos estudantes, não respondida e “odiada” pelos professores: Pra que serve isto?” (Barufi, 1999)

Para Barufi, uma forma de romper essa visão dogmática do Cálculo, seria levar os estudantes, via ferramentas do Cálculo, a resolverem problemas “reais, importantes e seus”. Segundo a autora, quando pensamos nessa nova forma de ver a produção do conhecimento estamos nos referindo a um processo de reflexão sobre os conceitos de construção dos mesmos, ou seja, uma proposta de ensino que leve o aluno a pensar sobre o Cálculo.

Sobre essa forma de ver e de apresentar o Cálculo, a autora pondera:

> Enfocando o Cálculo sistematizado como um ramo do conhecimento, temos, diante de nós, uma sucessão de conceitos, propriedades, técnicas operatórias, com inúmeras aplicações práticas. Trata-se, sem dúvida, de um todo logicamente bem estruturado, formalmente correto. Entretanto, o quanto é importante para os estudantes, o quanto é significativo? (Barufi, 1999, p.152)

Para a autora, a significação do Cálculo está também ligada ao fato de ele se fazer presente em outras ciências, e sendo assim, encontrar problemas que tornem o ensino de Cálculo instigante e significativo seria uma tarefa possível.

As considerações de Barufi foram levadas em conta na preparação da nossa intervenção, uma vez que nos preocupamos em elaborar um conjunto de situações problematizadoras para que o aluno pudesse estabelecer uma rede de significados e articulações entre as informações que estavam sendo trabalhadas e, a partir desses significados, emergisse a compreensão do conceito.

Pensando a respeito do trabalho com o Cálculo pautado em atividades problematizadoras, com articulação entre as várias formas de representação, encontramos a tese de doutorado de Reis.

Em sua tese, Reis (2001) buscou compreender como acontece e como se manifesta a relação de "tensão" entre o rigor e a intuição no ensino de Cálculo e de Análise. O estudo foi realizado por meio de análises de manuais didáticos e por entrevistas semiestruturadas com pesquisadores na área.

Em seu estudo o autor afirma que, para acontecer uma mudança no ensino de Cálculo, "será necessário, também uma mudança nas crenças, concepções e valores daqueles que ensinam" (Reis,2001). Nesse sentido, o autor destaca que

> (...) a solução dos problemas do ensino de Cálculo não é técnica, pois exige, antes de mais nada, uma reconceptualização das ideias epistemológicas, isto é, que se trabalhe o Cálculo de maneira problematizadora, explorando os múltiplos significados e representações destas ideias. (REIS, 2001, p.189).

Em relação às propostas pedagógicas presentes nos livros de Cálculo, o autor destaca o predomínio dos procedimentos algébricos sobre os conceituais, afirmando que a proposta de ensino de Cálculo apresentada por muitos livros didáticos "é, ainda, predominantemente formalista e procedimental". Nesse sentido, autor sugere que o professor reflita sobre a utilização desses livros.

Também levamos em conta, na preparação das atividades, livros que apresentassem problemas que se articulassem com a tecnologia e que primassem por apresentar situações-problema nas quais o espírito investigativo do estudante fosse "provocado" e se constituíssem como ponto de partida para todo o trabalho matemático a ser desenvolvido.

Chamou-nos a atenção o trabalho “ Os conceitos relevantes na aprendizagem de gráficos[4]” de Trigueros e Escandón (2008), no qual as pesquisadoras afirmam que os alunos possuem dificuldades em compreender conceitos do Cálculo Diferencial e que, os obstáculos estão em integrar diferentes conceitos do Cálculo para resolver determinadas situações. Dentre esses obstáculos, encontra-se a representação gráfica de funções.

O estudo teve por objetivo responder a 3 questões de pesquisa:

- Que conceitos usados em construção de gráficos de funções vêm a ser chave para auxiliar os alunos a estabelecer relações necessárias para resolver com êxito tais atividades?
- Existe alguma estrutura que tem um papel dominante na resolução das atividades?
- Que tipo de situações-problema podem revelar as diferentes concepções dos alunos[5]? (Trigueros e Escandón(2008 p.61, tradução nossa)

Com base nas respostas das questões acima, as pesquisadoras acreditam ser possível a elaboração de propostas didáticas que venham a ajudar os estudantes de Cálculo a relacionarem os seus conhecimentos de forma significativa. Na elaboração do trabalho, as pesquisadoras apoiaram-se na teoria Acción–Proceso–Objeto–Esquema (APOE).

A teoria APOE[6] é baseada na análise de conceitos matemáticos e apresenta um interesse especial nas construções cognitivas que se fazem necessárias no momento da aprendizagem. As autoras justificam sua escolha teórica, por entenderem que a APOE se define como sendo um conjunto de ações, processos e conceitos que estão

[4]Los conceptos relevantes em la aprendizaje de la graficación.

[5]“ ¿Cuáles conceptos, de entre los que se utilizan em la graficación de funciones resultan ser clave para que los Estudiantes puedan establecer las relaciones que se requieren para resolver exitosamente este tipo de problemas?
¿Existe algunaestructura que tenga un papel dominante en la solución de los problemas?
• ¿Qué tipo de situaciones problemáticas pueden revelar las distintas concepciones de los alumnos?

[6] A teoria APOE (Ação – Processo- Objeto- Esquema) é uma interpretação da teoria construtivista que se baseia principalmente no conceito de abstração reflexiva, introduzida por Piaget.

relacionados e que “podem ser utilizados na resolução problema da área de matemática”.

Ainda nessa teoria, segundo as pesquisadoras, uma ação é uma transformação de um objeto percebida por um sujeito. Quando essa ação se repete e o sujeito, a partir da reflexão, a interioriza, podemos dizer que essa ação se constitui em uma construção interna. Uma vez que o sujeito está consciente de todas as construções internas e já é capaz de pensar num objeto como um todo, bem como atuar sobre esse objeto, pode-se dizer que ele já adquiriu um conceito desse objeto.

Segundo as autoras, essa teoria toma como referência a Teoria Epistemológica de Piaget.

> A partir das ideias de Piaget sobre como se passa de um estágio de conhecimento para outro, na teoria APOE faz-se uma construção para referir-se apenas à forma como as pessoas constroem os conhecimentos matemáticos em particular os que são apresentados no Ensino Superior[7](Trigueros e Escandón 2008, p.62. Tradução nossa)

De acordo com Piaget, o principal responsável pela construção de um conhecimento é a abstração reflexiva[8].

Segundo as pesquisadoras, durante a aprendizagem da Matemática, os estudantes se deparam com situações nas quais devem trabalhar com conceitos complexos que se originam de diferentes campos da própria Matemática; sendo assim, querer explorar um único conceito, ou um conceito específico, torna-se insuficiente para explicar ou realizar a atividade matemática. No estudo, evidenciam que a resolução de algumas tarefas matemáticas exige do estudante a realização de diferentes ações. No trabalho com gráficos, por exemplo, as ações que irão interagir serão aquelas relacionadas à função cujo gráfico se pretende traçar.

---

[7]A partir de las ideas piagetianas sobre la forma en que se pasa de un estado de conocimiento a otro, em lateoría APOE se hace una construcción para referir se únicamente a la forma en que las personas construy en conocimientos matemáticos, en particular aquellos que corresponden a la matemática que se introduce em la educación superior”(TRIGUEROS, Maria; ESCANDON,Covadonga, 2008,p.62).

[8]Nesse tipo de abstração, as informações retiradas a partir da análise da ação sobre o objeto. Pode também ser chamada de “pensar sobre o agir”. O processo de abstração reflexiva (réfléchissement) ocorre sempre em dois momentos. Primeiro, o sujeito retira algo de um patamar inferior e projeta este conteúdo sobre um patamar superior (por exemplo, da ação à representação); em segundo lugar reconstrói e reorganiza mentalmente, sobre o patamar superior, o que foi transferido do inferior. É um processo que procede das ações ou operações dos sujeitos, remetendo para um plano superior ao que foi retirado de um nível inferior de atividade (Piaget, 1995, p.30)

Metodologicamente, as pesquisadoras optaram por trabalhar com um “questionário” com questões abertas que deveriam ter todas as respostas justificadas. As questões eram relacionadas a gráficos de funções de uma variável real. Além de estarem relacionadas aos gráficos, todas as questões eram relacionadas a conceitos do Cálculo Diferencial como continuidade e derivadas, elaboradas de forma a obter dos questionários a maior quantidade de informações possíveis a respeito de como os alunos “dominavam” os conceitos e de que maneira os relacionavam.

Os questionários foram aplicados a 40 alunos que já tinham concluído o curso de Cálculo Diferencial, de diferentes sexos, cursos e períodos. As análises eram feitas sobre vinte e duas categorias, dentre as quais destacamos: compreensão do significado de continuidade de uma função, compreensão do significado da primeira derivada de uma função, capacidade de reconhecer graficamente os intervalos em que uma função cresce ou decresce.

As análises das respostas dos questionários aplicados pelas pesquisadoras mostram que os conceitos-chave para o desenvolvimento das habilidades relacionadas à representação gráfica de funções são os conceitos relativos à continuidade, bem como a articulação entre o conceito de continuidade com o conceito de derivada de primeira ordem. No que se refere à derivada de segunda ordem, as articulações devem ser observadas, em especial, nos conceitos de ponto de inflexão e as articulações entre os conceitos de continuidade e de derivada de primeira ordem.

Os estudantes participantes da pesquisa em questão mostraram, em sua maioria, serem guiados, em suas análises de gráficos por uma estrutura dominante, ou seja, pelo uso de uma única ferramenta - a derivada de primeira ordem - para responder às questões relativas à análise da variação das funções.

Para as pesquisadoras, o fato de os estudantes resolverem as questões valendo-se de informações oriundas apenas da primeira derivada, demonstra que a primeira derivada pode vir a ser um obstáculo para a compreensão da importância da segunda derivada e em especial para a compreensão, por parte dos estudantes, da inter-relação entre a primeira e a segunda derivadas no que diz respeito a se estudar o comportamento de uma função.

A análise dos resultados, segundo as autoras, evidencia a necessidade de se trabalhar com situações problema, em que os alunos sejam levados a construir relações entre os conceitos do Cálculo Diferencial.

Na concepção das pesquisadoras, essas relações não devem ficar a cargo dos estudantes, elas precisam ser entendidas como responsabilidade do professor, que para isso pode promover um trabalho "explícito e ostensivo" dessas relações.

A leitura desse trabalho corroborou nossa hipótese inicial de que a sequência didática deveria contemplar um conjunto de atividades que estivessem "para além" da exploração do nosso objeto de estudo, ou seja, chamou a atenção para o fato de que querer explorar um conceito específico pode ser insuficiente para explicar ou realizar a atividade matemática. Sendo assim, nossas atividades deveriam contemplar conceitos variados da Matemática, para que a partir das articulações entre esses conceitos, o nosso objeto de estudo fosse construído de maneira satisfatória.

Ainda no cenário internacional, destacamos o artigo de Tsamir e Ovodenko, (2013). Segundo as pesquisadoras israelenses, a noção de ponto de inflexão ainda não é bastante discutida quando nos deparamos com investigações sobre funções em Cálculo Diferencial.

Em seu trabalho, as pesquisadoras apontam erros comuns que aparecem quando investigamos os pontos de inflexão. Dentre esses erros, o mais comum, segundo elas é o fato de que "como a derivada é nula em um ponto implica em se afirmar que esse ponto é de inflexão"[9] (Tsamir e Ovodenko, 2013).

As pesquisadoras apontam estudos feitos por elas mesmas, nos quais encontraram outras concepções erradas, por parte dos alunos, a respeito dos pontos de inflexão. Dentre esses erros, elas destacam a tendência em considerar que "$f'(x_0) = 0$ é uma condição necessária para a existência de um ponto de inflexão em x = x_0[10] " Tsamir e Ovodenko,2005.

[9]"how the second derivative being zero at a point implying the point being an inflection point" Tsamir e Ovodenko, 2013).

[10]"tendencies to regard $f'(x_0) = 0$ necessary for the existence of an inflection point at x = x_0." " Tsamir e Ovodenko,2005

Tsamir e Ovodenko (2006) afirmam, em seu estudo, que a análise de erros cometidos por estudantes requer a utilização de um quadro teórico, que possa “clarear” os dados obtidos pela pesquisa. No caso do presente estudo, as pesquisadoras optaram por trabalhar com as perspectivas de Tall e Vinner, Fischbein e Duval. Para realizar o estudo, trabalharam com 53 participantes. Todos eles haviam cursado Matemática, Ciências da Computação, Engenharia Computacional ou Engenharia Eletrônica. Além disso, já haviam concluído com sucesso os cursos de Cálculo I, Cálculo II, Álgebra Linear I, Álgebra Linear II e Equações Diferenciais. As idades dos participantes variavam entre 25 e 35 anos e todos apresentaram, segundo as pesquisadoras, interesse e entusiasmo em participar do estudo.

Os instrumentos de pesquisa foram entrevistas e questionários compostos por questões relacionadas a pontos de inflexão. Todos os 53 participantes responderam às questões 1,2 e 3 e 52 deles responderam às questões 4,5 e 6. Os questionários eram compostos das seis questões apresentadas nas Figuras 4 e 5.

Task 1: True or false?

Statement 1: f: $R \Rightarrow R$ is a continuous, differentiable function.
If $A(x_0, f(x_0))$ is an inflection point, then $f'(x_0)=0$.
True/false, prove:

Statement 2: f: $R \Rightarrow R$ is a continuous, (at least twice) differentiable function.
If $f''(x_0)=0$, then $A(x_0, f(x_0))$ is an inflection point.
True/false, prove:

Task 2: Investigate the graphs
Figure 1 presents five graphs. On each graph mark Z_i all points of intersection with the axes; X_i maximum-points; N_i minimum-points; and P_i inflection points.

Task 3: Define
What is an inflection point?

Figura 4: Questões 1,2 e 3, Tsamir e Ovodenko, 2005

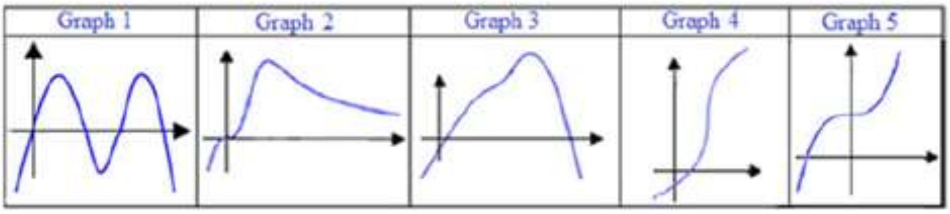
Task 4: Investigate the function

Investigate the function $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - x^3$. Are there:

(a) Points of intersection with the axes? Yes/no, if "yes" what are the points? Explain.
(b) Maximum/minimum points? Yes/no; if "yes," what are the points? Explain.
(c) Inflection points? Yes/no; if "yes," what are the points? Explain.
(d) Asymptotes? Yes/no; if "yes," what are they? Explain.

Task 5 Investigate $f'(x)$

Note: in the following task, $f'(x)$ is given, but the questions are about $f(x)$.
$f'(x) = 15x^2 - 5x^3$. Does $f(x)$ have:



(a) Maximum/minimum points? Yes/no; if "yes," find the related Xs. Explain.
(b) Inflection points? Yes/no, if "yes," find the related Xs. Explain.

Task 6: Investigate the graph of $f'(x)$

Note: in the following task, the graph of $f'(x)$ is given, but the questions are about $f(x)$.
Figure 2 presents the graph of $f'(x)$. Does $f(x)$ have:

(a) Maximum/minimum points? Yes/no; if "yes," find the related Xs. Explain.
(b) Inflection points? Yes/no, if "yes," find the related Xs. Explain.

Figura 05: Questões 4,5 e 6, Tsamir e Ovodenko, 2005

Durante a apresentação dos resultados do estudo, as pesquisadoras destacaram as quatro principais imagens errôneas dos entrevistados em relação ao conceito de ponto de inflexão: (1) inclinação zero, $f'(x) = 0$ é condição necessária para um ponto de inflexão , (2) inclinação diferente de zero, $f'(x) \neq 0$, é condição necessária para inexistência do ponto de infelxão, (3) $f''(x) = 0$ é condição suficiente para a existência do ponto de inflexão, (4) os pontos de pico do gráfico são os pontos de inflexão[11]."(Tsamir e Ovodenko, 2013)

Segundo as pesquisadoras, 45% dos entrevistados afirmaram que a condição suficiente para que uma função $f(x)$ possua ponto de inflexão é que $f'(x) = 0 \; e \; f''(x) = 0$. Quando os entrevistados foram solicitados a marcar os pontos de inflexão de uma função em seu gráfico, as pesquisadoras nos mostram que nenhum deles acertou todas a respostas.

[11]"(1) slope zero, $f'(x) = 0$ is necessary for an inflection point, (2) non-zero slope, $f'(x) \neq 0$ is necessary for an inflection point, (3) $f''(x) = 0$ is sufficient for an inflection point, and (4) peak points, "where the graph bends" are inflection points.

As pesquisadoras afirmam que quando apresentaram os resultados aos seus pares, estes afirmaram que os resultados eram autoevidentes, ao mesmo tempo que encontraram poucos resultados de pesquisas em Educação Matemática nessa área. Ressaltam ainda a importância do seu estudo, afirmando que ele oferece aos professores, indicativos de concepções erradas dos alunos acerca dos pontos de inflexão. Segundo elas, essas concepções vão variar de classe para classe, mas no momento de se elaborar um plano de ensino para os pontos de inflexão, essas concepções devem ser levadas em consideração.

Chamou-nos a atenção, um estudo sobre as crenças, concepções e conhecimento profissional de professores que ensinam Cálculo Diferencial a estudantes de Ciências Econômicas, (Garcia et al).

Os pesquisadores classificam o seu trabalho como sendo um estudo de caso. O estudo foi desenvolvido com dez (10) professores que ensinam Cálculo Diferencial e Integral em cursos de Ciências Econômicas[12], em uma Universidade na Venezuela, por meio de um questionário aberto, além de uma ficha com dados a respeito da formação acadêmica desses professores e seu trabalho docente.

O objetivo do estudo foi investigar o processo de ensino de Cálculo Diferencial, particularmente, o ensino das derivadas e a posição dos professores em relação a uma proposta de ensino com problemas que envolvessem situações reais, relacionadas às carreiras dos estudantes.

Os pesquisadores definem crença do professor como sendo:

> (...) as crenças dos professores são ideias pouco elaboradas, gerais e específicas, que compõe o conhecimento desse professor e que influenciam de maneira direta em seu desempenho. As crenças funcionam como filtro para todo o processo de ensino em aprendizagem.[13].(García, Balnco, & Salvador, 2006, p. 87)

[12]Os autores, no decorrer do artigo, informam que os cursos que participaram da pesquisa foram os de Ciências Econômicas,ou seja: Economia, Administração de Empresas e “ Contaduria Publica”

[13]Las creencias del professor sonideas poco elaboradas, generales o específicas, las cuales forman parte del conocimiento que posee el docente – pero carecen de rigor para mantenerlas– e influyen de manera directa em su desempeño. Lascreenciassirvencomofiltroparatodoaquelloquesuponeelprocesoenseñanza-aprendizaje.

Os pesquisadores defendem a ideia de que as concepções e as crenças de um professor podem ser fatores que irão influenciar sua prática.

Dentre os objetivos específicos da pesquisa, chamaram-nos a atenção – por estarem bem próximos de nosso objeto de estudo - os objetivos relacionados à investigação sobre a importância dada pelos professores pesquisados em relação ao ensino da derivada, bem como saber a opinião deles em relação a uma proposta de trabalho que consistiria em ensinar derivadas por meio de situações reais no âmbito das ciências econômicas.

Após a análise das respostas dos professores participantes da pesquisa, ficou constatado que a maioria "enxerga" a derivada como uma ferramenta para a resolução de problemas matemáticos; apenas três dos professores entendem a derivada como um mediador entre os conhecimentos gerais e situações específicas da formação dos seus alunos e somente dois professores ressaltaram a importância da derivada como ferramenta para análise e interpretação de modelos, sejam eles matemáticos ou econômicos.

Quando perguntados sobre que opinião têm a respeito de uma proposta de ensino de derivadas por meio de situações reais, que podem ser modeladas, segundo os pesquisadores, as respostas foram superficiais. Seis professores disseram estar de acordo, porém não justificaram de forma substancial seu posicionamento, apenas mencionaram que poderia ser interessante como uma parte introdutória do conteúdo a ser ensinado.

De acordo com os pesquisadores, quando perguntados sobre a utilização de problemas de aplicação das derivadas em suas aulas e sobre a importância de um trabalho com derivadas em cursos de Ciências Econômicas, os entrevistados não apresentaram nenhuma justificativa substancial.

Nossa pesquisa também prevê entrevistas com professores para nos fornecer uma visão geral de quem eram esses professores e conhecer um pouco da sua atuação e suas concepções em relação ao nosso objeto de estudo. Também entrevistamos alunos que já haviam cursado a disciplina de Cálculo I recentemente (os participantes do estudo) e alunos que já haviam cursado a disciplina há mais tempo, com a intenção de observar e analisar os significados construídos por estudantes, quando inseridos em ambientes de ensino de Cálculo Diferencial, especificamente no que se refere ao nosso objeto de estudo.

Pelo que vimos até aqui, na maioria dos casos, o trabalho com Cálculo ainda tem sido feito privilegiando aspectos algébricos em detrimento dos aspectos conceituais; sendo assim, faz-se necessário um trabalho com situações-problema que modelem situações da realidade, para que o estudante de Cálculo possa refletir a respeito de sua aplicação em contextos reais.

Os modelos de ensino aplicados, como mostrados nessa revisão de literatura, comprovam as lacunas que existem nos conhecimentos dos nossos alunos quando falamos de Cálculo Diferencial, em especial nos problemas relacionados aos pontos críticos de uma função e a relação entre esses pontos e as derivadas.

Nos últimos anos, os recursos tecnológicos se apresentam como uma possibilidade de inovação na forma de se implementar a construção de conceitos matemáticos, em especial, nas aulas de Cálculo. Na tentativa de aprofundarmos ou complementarmos essas discussões, vamos encaminhar nossa revisão de literatura para o uso da tecnologia e o trabalho com o Cálculo Diferencial.

1.2 A tecnologia e o ensino de Cálculo

Antes de começar o estudo sobre o que já foi pesquisado a respeito do uso da tecnologia no ensino do Cálculo, achamos por bem fazer uma análise sobre a etimologia da palavra tecnologia. Para tal iremos buscar em dois dicionários o significado.

Segundo o dicionário Aurélio:

> tecnologia
> Substantivo feminino.
> 1. Conjunto de conhecimentos, esp. princípios científicos, que se aplicam a um determinado ramo de atividade:

Já no dicionário Aulete, encontramos a seguinte definição para o termo:

> (tec.no.lo.*gi*.a) Tec.
> sf.1. <u>Conjunto das técnicas, processos e métodos específicos de uma ciência</u>, ofício, indústria etc...; ciência que trata dos métodos e do

> desenvolvimento das artes industriais: a tecnologia das telecomunicações. 2. Explicação dos termos próprios das artes, ofícios; linguagem especial das ciências, indústrias, artes etc. 3. O estado de desenvolvimento das tecnologias como um todo: A tecnologia é fator fundamental do desenvolvimento econômico. [F.: Do fr. *technologie*, deriv. do gr. *technología.* Cf.: *técnica.* Ideia de:*tecn(o)*-, -*tecnia,* -*logia.*] (grifo nosso).

Embora cientes de que o lápis, o papel, a caneta também possam ser considerados elementos tecnológicos, precisamos estar atentos a que tipo de tecnologia nos referimos em sala de aula, ou tecnologia como recurso didático para as aulas de Cálculo.

Ferruzi alerta para a velocidade dos avanços tecnológicos nos últimos 30 anos:

> “(...) os últimos trinta anos caracterizam-se por uma acelerada transformação no campo tecnológico com consequências no mercado de bens e serviços, nos sistemas de produção, no modo de organização dos trabalhadores e em sua qualificação e inclusive nas relações sociais. Esta evolução se intensificou ainda mais com a recente indústria eletrônica e informática, as quais provocaram significativas mudanças sociais, políticas e econômicas, levando a tecnologia, com o uso de suas teorias e métodos científicos para solucionar problemas do uso das técnicas, a atingir seu absoluto sucesso. É evidente o grande desenvolvimento da pesquisa tecnológica desde então, alcançando esta posição que a caracteriza atualmente como dominante na cultura moderna. (Ferruzi, 2003, p.11).

Em seu estudo, a pesquisadora justifica esse avanço tecnológico por conta do papel que a tecnologia vem desenvolvendo nos dias atuais bem como na capacidade de adaptação da sociedade moderna no que se refere ao seu uso. Para a autora, o papel da tecnologia é o de “aumentar a eficiência da atividade humana”, para isso, as pessoas precisam estar propensas a se adaptarem e em especial precisam se preparar para se relacionarem com a tecnologia.

Estando cientes de que a utilização das tecnologias vem se tornando uma constante em nossas vidas, nas mais variadas práticas sociais como, por exemplo, supermercados, bancos, atividades pessoais, etc., fica fácil entender que a introdução do uso tecnologia como o uso de computadores e softwares nas aulas de Cálculo seria um processo “natural”.

Uma das vantagens do trabalho com a tecnologia no ensino de Cálculo é, segundo Heid(1988), o fato de que os alunos podem focar sua atenção nos conceitos, atribuindo-lhes significado.

A respeito do uso da tecnologia no ensino de Cálculo, Artigue nos afirma que:

> O uso da tecnologia nos oferece um novo recurso no esforço para superar algumas dificuldades conceituais: o poder da tecnologia é particularmente importante para facilitar o trabalho dos alunos em assuntos como infinito/discreto; contínuo e finito. Visualização e especialmente gráficos dinâmicos são também utilizados.[14](Artigue& Perrim, 1991)

Em suas pesquisas, Artigue destaca que uma importante vertente do trabalho com tecnologia e o ensino do Cálculo é o fato da facilidade de visualização proporcionada ao aluno nas atividades propostas com uso de computadores e calculadoras gráficas, além de, segundo a pesquisadora, constituir-se num facilitador no momento da conversão entre as representações semióticas de um determinado objeto matemático.

> Um aspecto fundamental que quase todos os projetos de reforma apontam é o uso de calculadoras gráficas, ou computadores com software gráfico, para ajudar os alunos a desenvolverem uma melhor compreensão intuitiva. Como a aprendizagem do Cálculo inclui a análise das variações, a tecnologia tem um papel crucial, pois permite representações gráficas dinâmicas e animações. A tecnologia foi incorporada inicialmente como suporte para visualização e coordenação entre registros semióticos[15].(Artigue& Perrim, 1991, p. 15)

Heid (1998) é favorável à utilização dos computadores em aulas de Cálculo e justifica seu posicionamento, afirmando que o computador, além de economizar tempo nos procedimentos algébricos, também é um agente que facilita a compreensão de conceitos matemáticos e pode possibilitar o acesso a um amplo espectro de exemplos.

> Cálculos feitos a mão, além de demorados, muitas vezes fazem com que o aluno ao fim da atividade perca de vista seus objetivos iniciais, bem como as inter-relações entre os conceitos matemáticos envolvidos. O computador pode ser usado para fornecer os resultados de execução de algoritmos, representando não apenas economia de tempo, mas também por possibilitar aos estudantes, de forma mais

[14]The use of technology offered a new mean in the effort to overcome some of the conceptual difficulties: the power of technology is particularly important to facilitate students' work with epistemological double strands like discrete/continuous and finite/infinite. Visualization and especially dynamic graphics were also used.(Artigue& Perrim p.4)

[15]A key aspect of nearly all the reform projects has been the use of graphics calculators, or computers with graphical software, to help students develop a better intuitive understanding. Since learning calculus includes the analysis of changing quantities, technology has a crucial role in enabling dynamic graphical representations and animations. Technology was first incorporated as support for visualization and coordination between semiotic registers. (Artigue&Perrim, p.15)

> rápida, o acesso a novos exemplos de um conceito. Uma gama mais vasta de exemplos pode ser utilizada e os alunos podem ser menos interrompidos do que quando fazem as atividades a mão. O uso do computador como ferramenta para o estudo das ideias matemáticas pode resultar em um entendimento diferente dos conceitos matemáticos[16]. (Heid, 1998, p. 12)

Para Heid, com a utilização dos computadores, os estudantes não precisarão focar sua atenção prioritariamente aos processos algébricos, podendo assim, dedicar-se ao entendimento real do conceito em questão. O pesquisador destaca o espaço de um curso de Introdução às Ideias do Cálculo como sendo o ideal para o uso dos computadores. Em seu estudo, ele aponta a sua utilização nesse modelo de curso e ainda se propõe a responder se os alunos poderiam aprender os conceitos do Cálculo mesmo sem ter domínio das técnicas algorítmicas.

Segundo o autor, quando conceitos como limites, derivadas e integrais, são apresentados aos alunos iniciantes de Cálculo, cria-se por parte do professor uma expectativa de que os alunos irão entender os conceitos relativos a esses objetos.

Heid (1998) sinaliza que os alunos gastam uma grande parte do tempo com resolução de exercícios e em especial, decorando regras de derivação e integração.No desenvolvimento do estudo, o uso do computador foi introduzido nas aulas de Cálculo, com o objetivo de responder a duas questões;

> 1. Os conceitos do Cálculo podem ser aprendidos sem o domínio concomitante ou anterior das habilidades algorítmicas usuais das derivadas, integrais ou as de desenho de curvas?
> 2. Qual é a diferença entre as “compreensões” dos conceitos do Cálculo entre alunos que frequentaram o curso de Cálculo proposto no estudo e os que frequentaram uma versão tradicional? ”[17] (Heid, 1998,p.4)

---

[16]Hand calculation is time consuming, and at its end students have often lost sight of their initial goals as well as the interrelationships among the mathematical concepts involved. The computer can be used to provide the results of algorithm executions, not only saving time usually spent on hand execution of these procedures but also giving students quicker and easier access to exemplars of a concept. A wider range of exemplars can be used in instruction, and students might be less distracted than when they must produce the exemplars by hand. The use of the computer as a tool for the study of mathematical ideas might result in a different understanding of mathematical concepts.”(Heid, 1998, p.1)

[17]Instructors introduce limits, derivatives, exponential and logarithmic functions, and integration with soon-to-be-dashed hopes that students will understand these concepts. Students spend most of their time and energy mastering derivative and integration rules and using sample exercises as models for solving problems. In the present study the computer was used as a tool in a concept-oriented introductory calculus course. The study addressed two questions:

Segundo Heid, para responder às questões, e acreditando que seria possível que os estudantes construíssem conceitos relacionados ao Cálculo, mesmo sem dominar os procedimentos algorítmicos, uma nova proposta de ensino precisou ser "confeccionada".

A partir da utilização da tecnologia em sala de aula de Cálculo Diferencial, Heid afirma que no caso do uso das calculadoras, além de reduzir o tempo da execução das atividades e de desenvolver nos alunos habilidades computacionais, o novo currículo permitiu que os alunos fossem levados para o trabalho com problemas mais complicados e ainda apresentaram um aumento no desempenho do conhecimento conceitual.

Participaram da pesquisa alunos de Cálculo no primeiro semestre da universidade. Para comparar os resultados, a pesquisadora comparou o rendimento desses estudantes com o dos alunos dos cursos tradicionais de Cálculo.

Os alunos do grupo experimental, por estarem usando computadores, não precisavam traçar gráficos com as mãos, mas durante 12 semanas observaram muitos gráficos e foram estimulados a estudar semelhanças e diferenças entre eles. Segundo a autora, além de observar gráficos, os alunos eram levados a construir os seus próprios.

> Embora os alunos não tenham construído gráficos a mão até a parte final do curso, durante as primeiras 12 semanas eles examinaram uma grande variedade de gráficos gerados por computador, raciocinaram a partir destes gráficos, estudaram as semelhanças, diferenças e conexões entre os gráficos relacionados, quer na fórmula ou em uma interpretação aplicada. Por exemplo, os alunos nas aulas experimentais estudaram gráficos das funções linear, quadrática, cúbica, e as funções de quinto grau, bem como de uma variedade de funções racionais. Além de analisar os gráficos gerados por computador, eles também construíram seus próprios gráficos das funções e usando as informações vindas do computador sobre os zeros e outros valores das derivadas. Eles analisaram como as propriedades do gráfico da função eram refletidas nos gráficos da sua função derivada. Eles deduziram propriedades gráficas de uma função a partir de propriedades da função inversa, observando as relações entre os

---

1. Can the concepts of calculus be learned without concurrent or previous mastery of the usual algorithmic skills of computing derivatives, computing integrals, or sketching curves?

2. How does student understanding of course concepts and skills attained in a concepts first course differ from that attained by students in a traditional version of the course?" (Heid, 1998,p.4)

> interceptos, assíntotas, intervalos de concavidade e inclinações[18].(Heid, 1998, p.8)

Segundo a autora, as atividades propostas para o cenário descrito - a utilização de computadores e softwares - favorecem o desenvolvimento de habilidades de compreensão das ideias do Cálculo e estimula a criação de alternativas de resolução de problemas a partir das situações apresentadas ao grupo.

Ela destaca em seu estudo, que um dos pontos fortes do trabalho com computadores é a possibilidade de existir um maior número de representações diferentes de um mesmo conceito, o que não é comum numa aula convencional de Cálculo Diferencial. Segundo a pesquisadora, normalmente os cursos introdutórios de Cálculo concentram-se em apresentar uma representação simbólica ou estereotipada dos conceitos. Ainda segundo o estudo, discussões em aula, tarefas e provas visam principalmente melhorar a capacidade dos alunos para mostrar um conjunto fixo de conclusões sobre os conceitos com base em sequências padrão de manipulações de símbolos algébricos. Quando os professores colocam problemas que dependem de formulações não simbólicas (gráficos, conjuntos de dados, tabelas, aplicações), eles frequentemente começam com instruções sobre como reduzir o problema a símbolos algébricos ou fórmulas. O raciocínio necessário é feito dentro do contexto dos símbolos e fórmulas e resultados são convertidos de volta para o contexto original.

A autora ainda enfatiza a nova forma de trabalhar, por exemplo, com os problemas de otimização. Em sua proposta, ao invés de se tratar os problemas de otimização apenas por meio de exercícios que primam por procedimentos algébricos, os alunos deveriam aproximar soluções para problemas a partir da análise de gráficos e

[18]Although the students did not construct graphs by hand until the final 3-week skills portion of the course, during the first 12 weeks they examined a large variety of computer-generated graphs, reasoned from these graphs, and studied the similarities, differences, and connections between graphs related to each other either in formula or in an applied interpretation. For example, the students in the experimental classes studied graphs of linear, quadratic, cubic, quartic, and quintic functions, as well as rational functions of a variety of forms. In addition to analyzing computer-generated graphs, they also constructed their own graphs of the functions using computer-generated information about the zeros and about other values of the derivatives. They analyzed how the properties of the function's graph were reflected in the graphs of its derivative functions. They deduced graphical properties of a function from properties of the inverse function, noting relationships between intercepts, asymptotes, intervals of concavity, and slopes."(Heid, 1998, p.8)

tabelas de valores associados a funções a serem otimizadas. O computador seria uma ferramenta útil ainda para a construção da representação gráfica dos fenômenos estudados.

A partir das considerações apontadas por Artigue e pelos autores que apresentaremos a seguir, optamos por inserir em nossa sequência de ensino um conjunto de atividades que pudessem e devessem ser resolvidas em ambientes computacionais por defendermos a ideia de que aprendemos enquanto experimentamos e a partir dessa experimentação somos instigados a agir sobre o objeto de aprendizagem, dessa forma estabelecendo conexões entre aprendizagens já efetivadas e o conhecimento que está em processo de construção.

Ainda no contexto das pesquisas internacionais a respeito das vantagens do uso da tecnologia nas aulas de Cálculo, destacamos o estudo de Palmiter (1991). Em seu estudo, a pesquisadora investigou a possível existência de diferenças significativas entre alunos que estudavam Cálculo em ambientes computacionais e aqueles que se utilizavam de procedimentos mais convencionais como o lápis e o papel.

> Este estudo investigou a existência de diferenças entre estudantes de Cálculo que foram ensinados usando um sistema de álgebra computacional para calcular limites, derivadas e integrais e estudantes que usaram procedimento padrão em (A) conhecimento dos conceitos do Cálculo, (b) conhecimento nos procedimentos do Cálculo e (c) notas em cursos subsequentes de Cálculo.(Palmiter, 1991,p.152)[19]

Após o desenvolvimento da pesquisa, a autora constatou que os alunos que trabalharam em ambiente computacional obtiveram notas mais altas e que em especial passaram a observar que a matemática era muito mais do que fazer cálculos.

Em sua tese de doutorado, Miskulin(1999) propõe uma reflexão a respeito do uso das tecnologias e sobre o ensino de Matemática. Em seu estudo, a pesquisadora afirma que o processo de mediação no momento da aprendizagem de conceitos

---

[19]"This study investigated whether there is a significant difference between students who have been taught calculus using a computer algebra system to compute limits, derivatives, and integrals and students who have used standard paper-and pencil procedures in (a) knowledge of calculus concepts, (b)knowledge of calculus procedures, and (c) grades in subsequent calculus courses". (Palmiter, 1991,p.152)[19]

matemáticos não podem ser feitos por modelos “obsoletos”. A pesquisadora sugere que a prática docente esteja pautada em metodologias que partam de novos processos educacionais.

> (...) Assim sendo, o saber matemático deve ser vivenciado no contexto tecnológico, se assim não for, infere-se que a exploração, pelos alunos, das possibilidades inerentes ao desenvolvimento científico e tecnológico que perpassam a sociedade estará cada vez mais restrita. (Miskulin, 1999, p.189).

Em sua tese, Miskulin (1999) considera que a maior vantagem no trabalho com ambientes computacionais é o fato de propormos atividades que levem o aluno a criar novas formas de visualizar e representar o objeto matemático que está sendo estudado naquele momento.

Em nossa busca para encontrarmos estudos sobre o uso das tecnologias em problemas de otimização de uma função de variável real, nosso objeto de estudo, encontramos apenas uma dissertação de mestrado que mostravam uma pequena semelhança com o que pretendemos fazer.

Em sua dissertação, Menk(2005) apresenta um estudo cujo objetivo foi “investigar as possíveis contribuições de um software de Geometria Dinâmica na exploração de problemas de Máximos e Mínimos, principalmente aqueles que de alguma forma estão relacionados a conceitos e propriedades geométricas”.

Para a realização dos seus estudos, a autora optou por trabalhar com alunos do segundo ano da Licenciatura em Matemática da universidade onde a pesquisadora trabalha. Na tentativa de detectar as maneiras como os conteúdos sobre o estudo de Máximos e Mínimos são apresentados, a pesquisadora optou por analisar os livros de Cálculo, que a autora chamou de “clássicos” no ensino de Cálculo, ou seja, livros que se encontravam presentes em várias ementas das Licenciaturas em Matemática de várias universidades. Segundo a autora, na maioria dos livros por ela analisados, não foram encontradas sugestões de um trabalho com software de geometria dinâmica.

Um contraexemplo do exposto anteriormente (foi segundo a autora), encontrado no prefácio de um dos livros, que aponta uma possibilidade de uso das tecnologias no ensino do Cálculo. Nesse livro, o autor sugere que o uso de calculadoras gráficas e computadores colaboram para a compreensão e descoberta de alguns conceitos do

Cálculo. O autor do mesmo livro ainda afirma que uso do computador ou da calculadora gráfica não significa que o estudante não usará mais lápis e papel. Para o autor, o uso do computador e/ou das calculadoras gráficas vai fazer com que alunos e professores decidam quando e quais formas de resolução de exercícios vão escolher, dependendo do tipo de questão que se está trabalhando.

No que se refere aos problemas sobre Máximos e/ou Mínimos, num cenário de problemas de otimização, a autora afirma que a maior dificuldade encontrada pelos alunos de Cálculo é o de transcrever os dados da linguagem materna para linguagem matemática, ou seja, a criação de um modelo matemático. A autora destaca que tais dificuldades se ampliam quando a situação proposta possui conceitos geométricos, podendo se constituir num obstáculo da realização das atividades propostas.

> Transformar a situação dada pelo enunciado do problema em uma representação gráfica (geralmente uma figura geométrica) e analisar as propriedades que dessa representação podem emergir, provavelmente sejam as primeiras dificuldades a serem enfrentadas para a realização da tarefa, pois a determinação da função, nesses casos, depende de uma representação gráfica que nem sempre é feita de maneira adequada (Menk, 2009, p.17)

Para a autora, os softwares desempenham um papel importante nesse cenário, uma vez que permitem aos estudantes criar e recriar modelos geométricos que auxiliam no processo de compreensão do contexto apresentado.

Nesse sentido, o estudo nos alerta para o fato de que o professor e o aluno de Cálculo estejam conscientes de que as representações numéricas, algébricas e gráficas de um fenômeno são formas complementares de se analisar uma situação.

Embora não defina o que seja conhecimento por simulação, a autora deixa claro em seu estudo que o computador é o ambiente ideal para que tal aprendizagem ocorra. Para a autora, os computadores permitem que os estudantes "manipulem variáveis, alterem parâmetros além de observar resultados e comportamentos de determinados fenômenos". Em sua análise final, enfatiza que o Software por ela escolhido possibilitou que os alunos interpretassem, testassem hipóteses e entendessem o conceito que se estava trabalhando em cada atividade proposta. Além dessa facilidade, a pesquisadora nos afirma que outro ponto positivo no trabalho foi a oportunidade que o software oferece de diálogo entre os participantes. Menk também destaca que, pelo fato de poderem se comunicar no momento em que realizavam as atividades propostas, fez com que percebessem o domínio de validade das funções que modelavam a situação que estava sendo estudada.

Barbosa(2009) em sua tese de doutorado elaborou um estudo cuja pergunta central, segundo a autora, foi: "Como o coletivo, formado por alunos com tecnologias, produz o conhecimento acerca de função composta e regra da cadeia, a partir duma abordagem gráfica"?

Segundo a autora, embora já exista um número de pesquisas relacionadas ao uso de tecnologias no ensino de Matemática, ainda há espaço para pesquisas nessa área.

> Apesar da quantidade de pesquisas envolvendo a informática no ensino e na aprendizagem do Cálculo, com orientações próprias em boa parte de suas características, tais como, referenciais teóricos, objetivos, metodologias, perfil da população pesquisada, conteúdos específicos abordados e tipos de TIC utilizadas, ainda existem lacunas a serem preenchidas. (BARBOSA, 2009, p.56)

Segundo Barbosa, as imagens não eram consideradas partes integrantes da aprendizagem de funções. Segundo a autora, as imagens "as imagens foram, muitas vezes, consideradas apenas um apoio para imaginar o gráfico de uma função, dada por sua expressão algébrica."

A autora afirma que, com o advento da tecnologia, tal quadro foi, ou está sendo revertido. O que era encarado como um simples apoio para a construção de determinados conceitos matemáticos, passa a ser considerado "um recurso fundamental, devido ao fato de se poder manipulá-la de forma dinâmica".

Em relação à importância da visualização para o ensino da Matemática, a pesquisadora avança um pouco mais e afirma que "a abordagem visual de um conceito matemático, ou de qualquer outra área do conhecimento, pode ser considerada, atualmente, como um dos elementos que caracterizam novos modos ou estilos de produção do conhecimento". (BARBOSA 2009).

Ainda no contexto da visualização e sua importância para aprendizagem matemática, a autora define visualização. Segundo ela, a visualização "é a habilidade de interpretar e entender a informação figural e a capacidade de conceituar e transladar relações abstratas e informações não figurais (representações) em termos visuais". (BARBOSA,2009)

Para a autora, a visualização em Matemática exerce um papel de comunicação, pois expressa ideias e conceitos matemáticos quando a linguagem algébrica não pode ou não é utilizada.

Para justificar seus procedimentos metodológicos, por exemplo, uma das atividades tinha por objetivo levar o aluno a deduzir a fórmula da regra da cadeia de uma forma indutiva, ou seja, dada as funções $f(x) = x^2$ e $g(x) = 3x$, era pedido ao aluno que plotasse, no ambiente do software Winplot, os gráficos das funções $f(g(x))$, $g'(x)$, $f'(g(x))$, $f(g(x))'$ e que apresentasse as suas representações algébricas. A autora define visualização como sendo "um processo que associa a compreensão dos estudantes, entre si, e a mídia externa". Nesse contexto, a relação entre a visualização e a utilização da tecnologia atinge um novo patamar no que se refere à construção de conceitos matemáticos por parte dos estudantes, podendo assim ser capaz de transformar a interpretação e o entendimento dos conceitos matemáticos.

Como o objetivo do estudo proposto era investigar como os alunos produziriam o conhecimento acerca de função composta e regra da cadeia a partir de uma abordagem gráfica, foi necessário que se oferecesse um curso sobre o software a ser utilizado aos alunos participantes do seu estudo. Um dos fatores que chamou a atenção, durante a realização do curso, foi a motivação por parte dos alunos.

Durante suas análises evidenciou-se a importância do software escolhido como agente facilitador dos conceitos no qual seus alunos estavam trabalhando. Esse recurso computacional permitiu que alguns alunos com dificuldades em compreender determinados conceitos valendo-se apenas da linguagem algébrica, pudessem a partir da visualização, confirmar ou refutar conjecturas.

Outra pesquisa no cenário da Educação Matemática e do uso das tecnologias no ensino do Cálculo Diferencial que nos chamou atenção foi a tese de doutoramento de Escher, em 2011, que se propôs a estudar as influências, limites e potencialidades do uso das Tecnologias de Informação e Comunicação no Cálculo Diferencial e Integral.

De acordo com Escher (2011) a partir da década de 80, encontramos as primeiras políticas públicas objetivando a inserção da tecnologia nas escolas públicas. No contexto das escolas particulares, o autor destaca que esse movimento acontece nos anos 90 com o objetivo muito mais de marketing do que o pedagógico.O autor destaca que muitos desses programas não obtiveram o sucesso esperado e aponta possíveis causas desse fracasso.

> Além disso, muitas outras inquietações surgem nesse cenário como, por exemplo, as precárias instalações dos laboratórios, a não existência de mão de obra especializada para manutenção dos equipamentos e suporte aos usuários, a necessidade de cursos efetivos aos professores. (Escher, 2011,p.28)

Um dos fatores apontados pelo pesquisador como causa de insucesso de alguns programas que tentaram implantar o uso das tecnologias nas escolas está a rejeição de alguns professores e pais de alunos. Eles que entendiam que como os conteúdos matemáticos eram os mesmos desde que estudaram, não havia necessidade da implantação de novas tecnologias na escola.

De acordo com Escher, o número de pesquisas que são produzidas no meio acadêmico, vem de encontro à visão citada anteriormente (a rejeição por parte dos professores em relação aos recursos tecnológicos). Tais pesquisas objetivam comprovar e discutir a importância do uso da tecnologia no ensino.

No caso da Matemática, destaca-se o grande número de softwares produzidos para serem utilizados no processo de ensino de "geometria, álgebra, gráficos de funções, simulações numéricas, trigonometria, enfim, em quase todos os conteúdos matemáticos normalmente trabalhados no ambiente escolar". O autor ainda nos afirma que esses softwares são produzidos não só voltados para o ensino e a aprendizagem de matemática na Educação Básica, mas que estes também são utilizados até a formação acadêmica superior. Outro ponto que mereceu destaque foi que o uso de softwares em aulas de Cálculo Diferencial e Integral pode agir como elemento facilitador do processo de ensino e aprendizagem de conteúdos "ditos" complexos como os conceitos de Limites, Continuidade, Derivadas e Integrais.

Baseando-se em análises de livros de Cálculos, o estudo destaca o aparecimento de livros que já estão incorporando a tecnologia como recurso didático para construção de determinados conceitos e que essa nova forma de se “escrever” um livro de Cálculo interfe na forma como as aulas de Cálculo são ministradas.

Na perspectiva definida como didático pedagógica, o autor pesquisou possibilidades e limites do uso da tecnologia nas aulas de Cálculo. Nesse sentido, chama-nos atenção para o fato de que alguns livros de Cálculo já estão apresentando uma nova linguagem, uma vez que já estão inserindo em seus capítulos uma simbologia que sugere que determinados exercícios sejam resolvidos por softwares específicos.

O trabalho também destaca que, por meio de entrevistas feitas a professores que ministram aulas de Cálculo durante muito tempo, foi constatado que estes apresentam dificuldades em trabalhar com os recursos tecnológicos, quadro que não se apresenta quando as entrevistas foram feitas a professores de Cálculo com menos tempo de magistério e que em seu processo de formação mantiveram alguma relação com a tecnologia.

Quando os entrevistados foram perguntados sobre a utilização da tecnologia nas aulas de Cálculo, os professores entrevistados, em sua totalidade afirmaram ser uma necessidade. O que o autor salienta nesse ponto é fato de que os professores estão conscientes da necessidade do uso dos recursos tecnológicos não como dimensão epistemológica.

> (...) a necessidade da utilização de computadores no processo de ensino e aprendizagem dos conceitos de Cálculo, observamos que ela foi mencionada por todos os professores entrevistados, contudo sempre justificada pelo fato técnico e não tanto pela dimensão epistemológica, ou seja, não há como não usar a tecnologia nas aulas de Cálculo. Ela está presente nos livros e na prática diária das pessoas, porém, esse fato não tem uma ligação direta com um possível resultado diferente de quando não se utiliza a tecnologia. (Escher, 2011, p.137)

No que se refere ao uso da tecnologia no ensino de Cálculo, o autor afirma que o aparecimento do uso das tecnologias no ensino de Cálculo não é um privilégio ou simplesmente uma necessidade dessa disciplina, muito pelo contrário, o aparecimento da tecnologia em aulas de Cálculo é reflexo de uma sociedade cada vez mais tecnológica.

No cenário da Educação Matemática, o pesquisador destaca, como todos os outros apresentados até aqui que a tecnologia

> (...)deve ser tratada de forma mais ampla. Diferente de outras tendências como, por exemplo, a Resolução de Problemas, Etnomatemática, e ainda outras, que existem na área de Educação Matemática, os estudos sobre as TIC sobrepõem todos os outros campos de conhecimento. Não que ela não possa ser tratada como uma tendência de pesquisa, mas tratá-la apenas desse contexto provoca uma redução ao caráter epistemológico, ignorando a característica epidêmica aqui mencionada. (Escher, 2011, p.141)

O trabalho ainda nos alerta para o fato que mesmo que o uso da tecnologia em aulas de Matemática ocorra de forma lenta, ainda assim ela está ocorrendo e merece ser estudada e pesquisada, com objetivo de disseminar junto a professores e futuros professores de Matemática, todas as possibilidades e vantagens que essa ferramenta pode apresentar no cenário dos processos de ensino e aprendizagem.

Ainda investigando trabalhos relacionados ao ensino de Cálculo e o uso de tecnologia, encontramos o trabalho de Vieira (2013). Em sua tese de doutorado, o pesquisador motivado por “As dificuldades epistemológicas e metodológicas do ensino de Cálculo Diferencial e Integral em cursos do ensino superior presenciais, a rápida evolução tecnológica (tanto em hardwares como em softwares)” investigou as possibilidades e os limites do uso da tecnologia da informação nas aulas de Cálculo.

Vieira (2013) nos afirma que o uso da tecnologia em sala de aula promove, junto às instituições de ensino, uma discussão sobre novas formas de aprender. Para ele, a aprendizagem passa a ser participativa e integrada. No que se refere ao ensino de Cálculo, o pesquisador nos afirma que o uso da tecnologia em aulas de Cálculo resulta em “reconfigurar didaticamente a abordagem” dos conteúdos, uma vez que as tecnologias podem e devem ser utilizadas como instrumentos que funcionem como “mediadores da compreensão cognitiva”.

Em seu trabalho, o autor também enfatiza a importância do preparo do professor para o trabalho com a tecnologia no ensino de Cálculo.

> Mais do que nunca, é importante valer-se da máxima de que “quem precisa aprender é quem ensina”. Em outras palavras, quanto melhor preparado estiver o professor melhor será a qualidade do ensino, o que

> faz deflagrar a urgência no processo de qualificação profissional. (Vieira, 2013, p.101).

Para Vieira, a qualificação do professor para o trabalho com a tecnologia no ensino de Cálculo está associada a uma busca por entender as potencialidades do software escolhido, na busca por entender suas potencialidades pedagógicas.

Quanto à utilização dos softwares, durante as aulas de cálculo, o pesquisador afirma que precisamos estar atentos, pois a proposta do seu estudo não é transformar as aulas de Cálculo em um espaço em que os alunos apenas "alimentem" os programas na busca por resultados que lhe convenham. Na verdade, o que se propõe é o uso da tecnologia acoplada ao raciocínio relativo às ideias do Cálculo, na busca por uma superação das dificuldades "epistemológicas" por meio da tecnologia, constituindo assim, o que o pesquisador chama de "humans-with-media".

No desenvolvimento do estudo, o pesquisador apresenta algumas sugestões metodológicas para o trabalho de matemática, como por exemplo "a resolução da equação de segundo grau $x^2 - 5x + 6 = 3x - 9$ por representações gráficas". Nesse exemplo, o autor ainda enfatiza que muitos dos alunos que chegam ao Ensino Superior, desconhecem esse tipo de resolução, a qual ele chama de "básica".

Os exemplos de equações a serem trabalhadas com recursos de softwares, vão se "refinando", uma vez que nos são apresentadas equações como $x.e^x = 2$.

Na busca de justificar seus objetivos de pesquisa, o autor nos apresenta a equação $\sqrt{x}\ln x + 7 senx.\cos x = 0{,}3$, que segundo o autor, seria muito mais fácil ser resolvida por um aluno midiático do que por um aluno que usasse o método de Newton.

Nesse sentido, ele ainda nos afirma que:

> Neste ponto, é apropriado salientar que não se defende aqui o desconhecimento de álgebra ou de métodos de Cálculo Numérico pelo aluno. O presente trabalho não compara as TI´s a estes conhecimentos simplesmente pela impossibilidade de realizar tal comparação diante de competências e conhecimentos tão diferentes. Intenta-se, sim, apontar os limites e possibilidades do uso das tecnologias informáticas como recurso na mediação entre as dificuldades epistemológicas do ensino do Cálculo Diferencial e Integral e o conhecimento tácito do humano midiático. (Vieira, 2013, p.149).

Em suas considerações finais, fica reiterada a opinião do pesquisador no que se refere à impossibilidade da dicotomia entre tecnologia e ensino – aprendizagem de Cálculo no século XXI. Mais do que simplesmente a aceitação do uso das TI's por parte do professor, torna-se indispensável o conhecimento das potencialidades e limites enquanto aliados no ensino das ideias do Cálculo Diferencial.

Um outro estudo que aproxima o trabalho com Cálculo Diferencial e a tecnologia é a tese de doutorado de Olimpio Junior, de 2006.

O estudo tem início apresentando dados numéricos que demonstram o alto índice de reprovação em Cálculo I na UFF e na USP no ano de 2003, além de afirmar que "no que se refere ao ensino e à aprendizagem de Cálculo, o fenômeno transcende os limites nacionais e tem motivado as mais variadas reações na comunidade acadêmica".(Olimpio Junior, 2006).

Outro ponto destacado pela pesquisa, é o fato de que o que ocorre normalmente nas aulas de Cálculo é uma "comunicação" e não uma "interação" entre professor e aluno e essa comunicação, via de regra, se dá por meio da língua escrita.

> O problema é que, em geral, nestes escritos a linguagem simbólica matemática é a predominante e, pior, quando ocorre, em muitos casos, já é tarde demais, como, a propósito, os dados supra referidos ilustram: a hora da prova. Pelo menos alguns indícios do que o(a) estudante pensa, quais são suas dúvidas, ideias e dificuldades, que visão ele ou ela tem sobre determinado conceito ou procedimento, tudo isso fica mais ou menos encoberto, guardado, compondo, juntamente com as demais sessenta colegas (em média) um limbo de compreensões que permanecem em suspensão até serem, de forma anêmica - e até mesmo equivocada -, materializadas, direta ou indiretamente, nos quatro ou cinco momentos de avaliação formal de um curso clássico anual de Cálculo.(Olimpio Junior, 2006, p.6)

Pautado nessas afirmativas, o autor salienta que o objetivo do seu estudo foi de "investigar as compreensões, emergentes da integração entre oralidade, escrita (em linguagem natural) e informática (representada pelo CAS MAPLE), sobre conceitos fundamentais do Cálculo Diferencial".

Para a realização do estudo, foram selecionadas pelo pesquisador oito duplas de voluntários, alunos do primeiro ano do curso de Matemática de uma universidade pública do Estado de São Paulo. A escolha dos referidos alunos foi pautada pela disponibilidade de horário dos participantes. A coleta de dados ocorreu em 3 (três) fases num período de 6 meses. Em cada uma das fases foram elaboradas atividades individuais e em duplas.

Para a análise dos resultados, foram observadas respostas escritas individuais, respostas escritas pela dupla e gravações dos diálogos produzidos pelas duplas. As atividades propostas buscavam investigar a relação entre escrita, linguagem e tecnologia em conteúdos específicos do Cálculo Diferencial, a saber: função, limite, continuidade e derivada.

Em relação ao estudo de funções, a pesquisa nos mostra que, dos temas estudados, o que mais forneceu "atrito" entre os participantes foram os episódios relacionados ao trabalho com funções. Segundo o pesquisador, a visão a respeito das funções eram:

> Uma visão predominante estática, povoada por exemplares de funções bem-comportadas, mais ou menos familiares, parece embaraçar a necessária articulação e os movimentos que caracterizam a essência dos conceitos do Cálculo Diferencial: a dinâmica. (Olimpio Junior, 2006,p.245).

Foi apontado o uso das potencialidades da tecnologia não como algo desejável, mas como um recurso para dar "mobilidade" a alguns objetos matemáticos. Assim como a tecnologia precisa estar a "mão" do estudante de Cálculo, a pesquisa demonstra que a integração desse recurso, a comunicação e a linguagem natural são formas que permitem ao professor, verificar ou mesmo "enxergar" como seus alunos estão aprendendo, que obstáculos estão enfrentando e como precisam ser ajudados. Sendo assim, a relação entre os três elementos que acabamos de citar podem se constituir num recurso que permita uma maior qualidade no processo de ensino e aprendizagem do Cálculo como nos mostrou o estudo proposto por Olimpio Junior.

Neste capítulo, apresentamos um conjunto de pesquisas que de maneira direta ou indireta se relacionam ao nosso objeto de estudo. Os trabalhos foram divididos em duas vertentes: uma relacionada às dificuldades no ensino e na aprendizagem do Cálculo e a outra relacionada uso da tecnologia no ensino de Cálculo.

Como mencionado no escopo do capítulo, a partir da leitura dos textos, fomos moldando nossa intervenção e delineando os objetivos do presente estudo.

Tomando como eixo norteador o objetivo geral do estudo, ou seja, a investigação dos aspectos cognitivos e conceituais mobilizados na resolução de problemas de otimização por estudantes de engenharia, buscamos em cada estudo descrito nesse capítulo contribuições para o desenvolvimento do nosso trabalho.

Capítulo 02
Quadro Teórico

Ao pensarmos um estudo do Cálculo Diferencial, em especial, em um que se trate do comportamento de funções, devemos estar atentos que iremos trabalhar, quase na totalidade do tempo, com representações, uma vez que durante toda a execução da pesquisa estaremos "negociando" com os enunciados dos problemas, a modelagem em termos de representação funcional, o estudo da variação da função e o gráfico.

Como o estudo das funções é um campo da matemática predominantemente abstrato, faz-se necessária a utilização das representações para seu entendimento e compreensão. Tal uso de representações justifica que nossa pesquisa seja, em parte, fundamentada pelos estudos da Teoria das Representações Semióticas de Duval, uma vez que essa teoria proporciona um viés de explicação e descrição para diversos fenômenos vinculados ao amplo conjunto de representações e simbologias da quase totalidade dos objetos conceituais do Cálculo.

Uma das grandes preocupações da Educação Matemática é a busca pelo entendimento de como os alunos constroem os conceitos matemáticos. Nesse sentido, optamos pelo trabalho com a Teoria do Pensamento Matemático Avançado, de David Tall, para junto com a Teoria das representações Semióticas, sustentarem teoricamente nosso estudo. A escolha desse quadro teórico deve-se ao fato de Tall integrar um grupo que há quatro décadas já realiza pesquisas relacionadas aos fenômenos ocorridos no ensino e na aprendizagem de matemática do ensino superior, mais especificamente, sobre os objetos do Cálculo Diferencial.

Ao longo do desenvolvimento das intervenções, percebemos que os participantes em algumas atividades apresentavam um considerável grau de dificuldade em modelar a situação proposta e, como apresentaremos no capítulo 05, parte dessa dificuldade encontrava-se no que os participantes denominaram "dificuldade em enxergar" a situação. Com a inserção de recursos manipulativos, tais dificuldades foram reduzidas de maneira significativa. Tal fato nos conduziu a buscar um quadro teórico que fundamentasse o quadro descrito. Nesse sentido, nos valemos da Teoria dos Três

Mundos da Matemática, que contempla adequadamente esse estágio de evolução construtiva do pensamento matemático.

2.1 A teoria das Representações Semióticas

Segundo Duval (2009), aprender matemática é diferente de aprender outras disciplinas. Para ele, a aprendizagem matemática requer uma atividade cognitiva diferente das que são exigidas em outros campos do conhecimento.

> A particularidade da aprendizagem das matemáticas considera que essas atividades cognitivas requerem a utilização de sistemas de expressão e de representação além da linguagem natural ou das imagens: sistemas variados de escrituras para os próprios números, notações simbólicas para os objetos, escrituras algébrica e lógica que contenham o estatuto de línguas paralelas à linguagem natural para exprimir as relações e as operações, gráficos cartesianos, etc. (Duval, 2009,p.13)

Para Duval, durante a aprendizagem matemática podemos observar dois tipos de dificuldades de aprendizagem que são bastante diferentes. O primeiro tipo, Duval chamou de dificuldade local, é relacionada à introdução de um novo procedimento ou de uma nova noção; a segunda, seria a dificuldade global recorrente, que segundo o pesquisador, está relacionada ao raciocínio à resolução de problemas, às habilidades de visualização, ou seja, à transferência de conhecimentos adquiridos ou sua aplicação.

Duval chama nossa atenção para o fato de que as dificuldades globais podem aparecer durante uma aula ou mesmo durante uma sequência de atividades, mas que estas não podem ser confundidas com as dificuldades locais.

Segundo o autor, se estivermos preocupados em entender as razões dessas dificuldades, será muito superficial ou pouco eficaz focarmos nossa atenção apenas naqueles que as possuem ou ainda nos tipos de tarefas que foram propostas e que as produziu. Nossa atenção deve sim estar voltada para uma questão mais ampla: o que seria o conhecimento matemático e o que esse tipo de conhecimento tem de diferente em relação aos outros.

Nessa perspectiva, se nos preocupamos em entender a construção de um conceito matemático, devemos estar atentos à natureza desse objeto, à maneira pela qual ele está sendo apresentado e às formas pelas quais podemos compreender esse objeto.

De acordo com Duval, três são as questões que norteiam a formação de conceitos matemáticos:

> (...) Temos acesso direto e imediato aos objetos - por que empregamos muitas vezes o termo geral e plurívoco "intuição"?
>
> Quais são os sistemas, as estruturas, ou as capacidades do sujeito necessárias ou mobilizadas para ter acesso aos objetos, diretamente ou por uma sequência de processos, conscientes ou não conscientes?
>
> Qual a natureza da relação cognitiva entre todos esses processos e os objetos? (Duval, 2011, p.16)

Nessa linha de pensamento, observamos que essas questões se relacionam com a natureza do funcionamento das estruturas cognitivas no que se refere à construção e apreensão de conceitos. Para Duval, essas questões encontram-se em todas as ciências, mas é na matemática que elas se manifestam de maneira mais exacerbada.

Se pretendemos compreender a construção de um conceito em matemática, devemos nos ater ainda a dois argumentos que Duval considera importantes: o primeiro é o fato de que a compreensão de um objeto matemático exige que se faça uma distinção entre esse objeto e sua representação e o segundo refere-se às representações mentais.

Em relação ao primeiro argumento, Duval defende que no processo de aprendizagem matemática, o sujeito diferencie o objeto de sua representação e ainda nos afirma que um mesmo objeto pode ser dado por uma variedade de representações que podem ser bastante diferentes. Conscientes da possibilidade das várias representações possíveis para um mesmo objeto, devemos nos valer dessa ideia, para estabelecermos a diferença entre o objeto e sua representação.

Na tentativa de ilustrarmos que um mesmo objeto pode ser dado a partir de representações bastante diferentes, tomemos como exemplos algumas notações que estão relacionadas à derivada de uma função de uma variável num ponto particular: $f\,'(\mathrm{x}_0)$; $\dfrac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}}(x_0)$; $\dfrac{\mathrm{df}}{\mathrm{dx}}(x_0)$, $\mathrm{D}_{\mathrm{x}}(f(x_0))$; $\mathrm{y}'(\mathrm{x}_0)$.

Para Duval (2009), as representações mentais constituem um argumento que é mais global e psicológico que o anterior. Segundo ele, o termo representações mentais está relacionado a todas as imagens e conceitos que um indivíduo associa a um objeto.

Na perspectiva do autor, a representação simbólica seria na verdade uma forma de se externar as imagens mentais.

> As representações semióticas, ou seja, as produções construídas pelo emprego de regras de sinais (língua materna, fórmula algébrica, gráficos, figura geométrica,...) parecem apenas ser o meio que o indivíduo dispõe para exteriorizar suas representações mentais, ou seja, para tornarem visíveis ou acessíveis ao outro. Elas seriam, então, inteiramente subordinadas às representações mentais e contemplariam apenas as funções de comunicação. (DUVAL, 2009, p.15).

Estendendo essa linha de pensamento aos conceitos de semíosis[20] e de noésis[21] poderíamos então dizer que a noésis é que dirige a semíosis.

No caso da matemática, as representações semióticas[22] desempenham um papel bastante particular, uma vez que elas não se constituem apenas como um meio de externar as imagens mentais, as representações; devem ser enxergadas como “ferramentas” necessárias ao desenvolvimento da conceituação e por que não dizer, do desenvolvimento das atividades matemáticas.

Para Duval, torna-se impossível a tentativa de estudarmos fenômenos que são relativos ao conhecimento se estes não estiverem atrelados às noções de representação. O autor afirma que todo o conhecimento, ao ser mobilizado pelos indivíduos, “passa” por uma atividade de representação.

> A questão da necessidade de representações semióticas no conhecimento matemático abrange dois problemas muito diferentes segundo o aspecto que consideramos, seja aquele de “referência” do objeto, seja o de “transformação” em outras representações semióticas. (Duval, 2011, p.40)

Segundo Duval (2011), as questões relacionadas à utilização das representações nas atividades matemáticas, podem ser entendidas no seguinte contexto:

[20]Termo relacionado à apreensão ou à produção de uma representação semiótica (Duval, 2009, p.15

[21] Termo relacionado aos atos cognitivos como a apreensão da representação semiótica (Duval, 2009, p.15)

[22] As representações semióticas são produções constituídas pelo emprego de signos pertencentes a um sistema de representações que tem inconvenientes próprios de significação e de funcionamento. Uma figura geométrica, um enunciado em língua natural, uma fórmula algébrica, um gráfico são representações semióticas que exibem sistemas semióticos diferentes (Duval, 2009, p.16)

- ✓ Num primeiro “cenário” as representações seriam necessárias quando a complexidade do objeto matemático fosse maior do que nossas capacidades de intuição ou de memória imediata.
- ✓ O segundo “cenário” seria o campo cognitivo, o campo de funcionamento do pensamento matemático. Segundo Duval, “a questão cognitiva é considerada sobre os gestos intelectuais desenvolvidos no trabalho matemático”.
- ✓ Com base em tudo que já foi dito, concluímos que não podemos estudar fenômenos relativos ao conhecimento matemático se não nos ativermos às representações desse objeto, uma vez, que para Duval, não há conhecimento que não mobilize representações.
- ✓ Por fim, precisamos ainda enfatizar que as representações mentais fazem referência a um domínio cognitivo mais profundo que o das imagens mentais, mas ambos são indispensáveis ao raciocínio matemático e que estes são facilitadores da abstração de conceitos matemáticos.

2.1.1 Registros de Representação Semiótica e Aprendizagem Matemática.

Duval (2009) enfatiza que, se estamos fazendo um estudo pautado nas representações, precisamos fazer um “resgate” das aparições do termo no contexto da psicologia e dos significados diferentes que esse termo adquiriu em cada uma de suas aparições.

Na primeira vez que o termo representação foi utilizado, ele veio relacionado à capacidade da criança de evocar objetos ausentes. Essa conotação do que seria a representação foi dada por Piaget por volta de 1926. Entre 1955 – 1960, o termo representação ganha a conotação de codificação da informação. Sendo assim, entendemos representação como sendo a forma pela qual uma informação é descrita em um determinado sistema de tratamento. A terceira apresentação do termo representação já conota esse termo como representação semiótica, ou seja:

> (...)um sistema particular de signos, a linguagem a escrita algébrica ou os gráficos cartesianos, e que podem ser convertidas em representações equivalentes em um outro sistema semiótico, mas podendo tomar **significações** diferentes para quem as utiliza. A noção de representação semiótica pressupõe, então, a consideração de sistemas semióticos diferentes e de uma operação cognitiva de

> conversão das representações de um sistema semiótico para o outro. (grifo do autor) (DUVAL, 2009, p.32)

Para o autor, o que há de mais relevante numa representação semiótica, não é a representação propriamente dita, mas as transformações que se podem fazer sobre essas representações.

Segundo Duval, se estamos interessados em analisar cognitivamente as atividades matemáticas, devemos estar atentos e devemos saber distinguir e classificar os tipos de representações semióticas que estão sendo utilizadas por nossos alunos. Precisamos ainda, estar conscientes de que a diversidade das representações e o funcionamento de cada um dos tipos de representação são pontos chaves no processo de construção de conceitos/objetos matemáticos.

Duval (2003) ainda nos alerta para o fato de que a "atividade matemática mobiliza sempre, de maneira explícita ou implícita dois tipos de transformações". Uma na qual a nova representação semiótica é do mesmo tipo da representação inicial e a segunda é aquela onde a nova representação semiótica é de um tipo diferente. Ao primeiro tipo de transformação semiótica Duval chamou de tratamento e a segunda de conversão.

Segundo Duval, acreditar que um sistema semiótico dê conta das transformações – conversão e tratamento – pode levar ao pesquisador a dois inconvenientes. O primeiro, o de acreditar que as transformações podem ser resumidas a um conjunto de regras de combinação, esquecendo-se de que as operações de transformação das representações são específicas de cada transformação. E que por mais simples que pareçam, essas transformações exigem que se conheçam as unidades de sentido[23] do objeto, ou seja, as operações mentais que permitem a transformação não dependem apenas do conteúdo, mas do tipo de representação.

O autor ainda destaca que não devemos entender as representações semióticas como aquelas que vão desempenhar o papel de codificar as representações mentais. Segundo ele, esse equívoco pode provocar uma redução das transformações a uma simples codificação.

---

[23] Unidades de sentido: Informações matemáticas importantes e presentes na questão.

Na busca por entender e explicar os tipos de transformações que distinguem a atividade matemática das demais atividades, Duval, introduz um novo conceito. O conceito de registro de representação semiótica.

Para Duval:

> Um registro é, evidentemente, um sistema semiótico, mas um sistema semiótico particular que não funciona como um código, nem como um sistema formal. Ele se caracteriza essencialmente, pelas operações cognitivas que ele permite realizar. (DUVAL, 2011, p.70).

Para entendermos o que Duval chama de registro de representação precisamos estar atentos para perceber a diferença entre os signos, os códigos e os registros.

Peirce(2000) define signo da seguinte maneira:

> O signo representa alguma coisa, o seu objeto. Representa esse objeto não em todos os seus aspectos, mas com um tipo de ideia que eu, por vezes, denominei *fundamento do representâmen.* (PEIRCE, 2000, p.46, grifo do autor)

Podemos então entender que os signos, na visão de Peirce, são algo que representa algo para alguém.

Para Peirce, o signo entra numa relação triádrica de representações. Essa tríade é composta por:

- ✓ **Ícone**: signo que possui traços comuns, relações de semelhança com o objeto. São os signos mais fáceis de serem reconhecidos. Exemplos: fotos, estátuas, representações figuradas, etc.
- ✓ **Símbolo**: signo que designa um objeto independente de qualquer semelhança, sendo fruto de uma convenção. Exemplos: logotipos e os símbolos da própria matemática;
- ✓ **Índice**: signo cuja relação com o objeto é direta, causal. Associa uma coisa a outra. Também pode ser entendido como o signo que sugere algo. Ex.: Nuvens negras indicam chuva, o nome de um objeto qualquer, etc.

Esquematicamente poderíamos representar essa tríade pelo esquema abaixo:

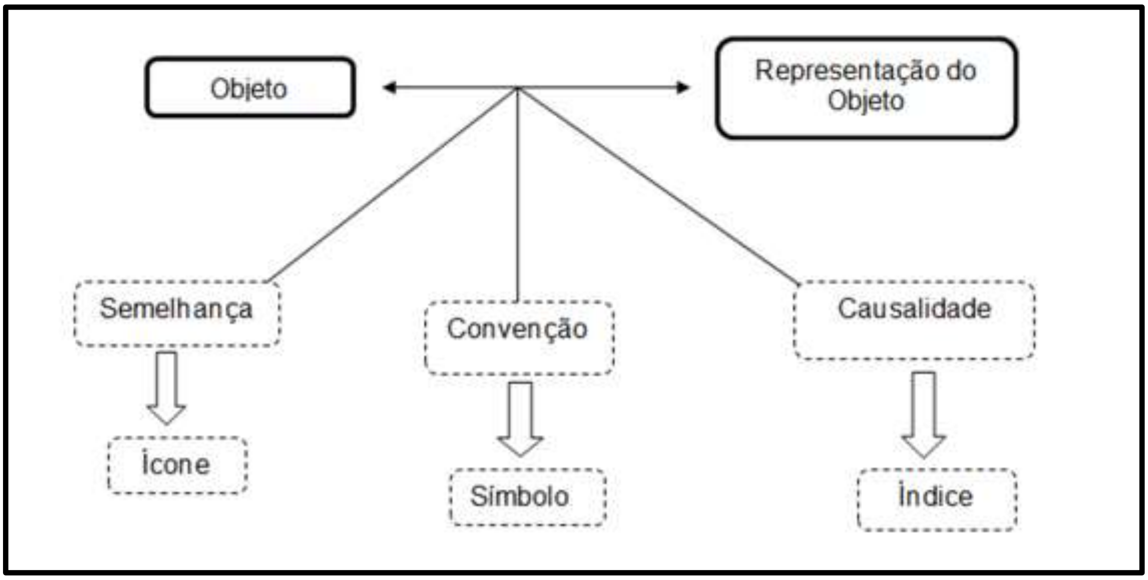


Figura 06: Relação triádrica entre as representações. Pierce, 2000

Segundo Duval, essas definições dos signos se constituíram em uma ferramenta potente na busca por análises das diversidades dos sistemas semióticos. Devemos estar atentos ao fato de que a aprendizagem matemática geralmente lida com os símbolos, como, por exemplo, o trabalho com funções, limites e derivadas.

Duval chama atenção para os códigos, um outro tipo de sistema semiótico:

> Existem sistemas semióticos que cumprem apenas as funções de comunicação, porque permitem transmitir informações, ou mudar o suporte físico de comunicação, como por exemplo, os alfabetos que permitem passar da fala à escrita. Esses sistemas são os códigos. (DUVAL, 2011, p.71)

O pesquisador é bastante enfático ao afirmar que os registros de representação e os códigos são sistemas de semióticos radicalmente diferentes.

Enquanto os registros são sistemas cognitivamente produtores de representações, os códigos são sistemas que não remetem a nada e, portanto, não representam nada.

Para Duval, tomando como parâmetro o ponto de vista cognitivo, a diferença entre registro e código "não está na maior ou menor complexidade dos sistemas semióticos e seu tipo de produção". A diferença está na impossibilidade, por parte dos códigos, de produzirem transformações do conteúdo das transformações como ocorrem nos registros.

Vejamos um quadro comparativo os registros e dos códigos.

		Tipo de produção Semiótica	Possibilidade de transformação das produções	Mudança de Sistema Semiótico
SISTEMAS **Produtores de representações que se referem aos objetos**	**REGISTROS** Línguas, figuras, gráficos, etc.	**um conteúdo articulando várias unidades de sentido** conforme dois ou três níveis de organização	**substituição** por equivalência referencial **Operações semióticas próprias de cada registro**	**Conversões** por **Correspondência das unidades de Sentido.** Não reversibilidade
SISTEMAS **Transmissores** ou **conversores do modo físico de transmissão**	**CODIGOS** Código binário Alfabetos etc	**Sequência de caracteres** Cada caractere da sequência resulta de uma escolha de codificação dos dados(estados sucessivos, sons, ...) e não da regra de combinação	Somente a **programação externa de ações** sobre as sequências de valores binários (Máquina de Turing)	**Codificação ⇔ Decodificação**

Quadro 2: Comparação de registros e códigos (Duval, 2011, p.73)

Uma vez esclarecido o que são signos e o que são códigos, podemos voltar nossa atenção aos registros.

Duval considera que para um sistema de representações semióticas ser chamado de registro, ele necessita cumprir três atividades cognitivas fundamentais:

- ✓ **A formação de uma representação identificável**.

Conhecida como operação de formação, trata-se de um enunciado compreensível em uma determinada língua natural, composição de um texto, desenhos de uma figura geométrica, a escrita de uma fórmula, de um gráfico etc. Dessa maneira, poderia ser comparada a realização de uma tarefa de descrição.

- ✓ **O tratamento**

O tratamento de uma representação é a transformação desta representação no mesmo registro onde ela foi formada. O tratamento é uma transformação interna a um registro.

A paráfrase[24] e a inferência[25] são formas de tratamento em língua natural. O cálculo é uma forma de tratamento próprio das expressões simbólicas (cálculo numérico, cálculo algébrico, cálculo proposicional...). A reconfiguração é um tipo de tratamento particular para as figuras geométricas: é uma das numerosas operações que dá ao registro das figuras o seu papel heurístico. A anamorfose[26] é uma forma de tratamento que se aplica a toda representação figural.

✓ **A conversão**

A conversão de uma representação é a transformação dessa função em uma interpretação em outro registro, conservando a totalidade ou uma parte somente do conteúdo da representação inicial. A conservação é uma transformação externa ao registro de início (o registro da representação a converter). A ilustração é a conversão de uma representação linguística em uma representação figural. A tradução é a conversão de uma representação linguística numa língua dada, em outra representação linguística de outro tipo de língua. A descrição é a conversão de uma representação não verbal (esquema, figura, gráfico) em uma função linguística. (Importa, neste propósito, não confundir esta situação com a descrição de um objeto ou de uma situação que não são ainda semioticamente representados: a seleção de traços não obedece aos mesmos entraves).

Duval (2012) nos chama atenção para o fato de que as conversões se constituem de fenômenos cognitivos que são independentes do tratamento. Tal afirmativa é comprovada pelo pesquisador, quando ele toma como exemplo a adição de números em sua forma fracionária e/ou decimal. Para Duval, é possível que os alunos possam adicionar números em sua forma decimal ou em sua forma fracionária, mas podem ser incapazes de converter uma expressão fracionária em decimal ou vice-versa.

Essas atividades cognitivas desempenham um papel muito importante nos processos de aquisição/ construção de conceitos matemáticos, uma vez que são produtores de novas representações.

[24]Explicação ou tradução mais desenvolvida de um texto por meio de palavras diferentes das nele empregadas
[25] Dedução
[26]Deformação das imagens dos objetos vistos nos espelhos cônicos, cilíndricos etc

Para Duval, o conteúdo das representações produzidas num determinado registro apresenta sempre duas propriedades; uma relacionada à função cognitiva, que consiste no fato de se referir a um objeto e outra que seria a de possibilitar a descoberta de novas unidades de sentido e são essas características que permitem que passemos de um tipo de representação a outra.

Tomando como parâmetros as representações semióticas, poderíamos pensar que a atividade matemática, ou melhor, o conhecimento matemático é construído a partir das representações semióticas dos objetos e/ou dos conceitos, mas se estivermos bastante atentos iremos perceber que essa atividade tem início efetivamente nas transformações entre os registros.

Duval, (2009), classifica as representações em internas/ externas e conscientes/inconscientes.

	Interna	Externa
Consciente	Metal ✓ Função de Objetivação	Semiótica ✓ Função de objetivação ✓ Função de expressão ✓ Função de tratamento intencional
Inconsciente	Computacional ✓ Função de tratamento automático ou quase instantâneo	

Quadro 3: Classificação das representações. Duval, 2009

A oposição consciente/não consciente é a oposição entre o que de uma parte é reconhecido pelo sujeito e que ele nota, e de outra parte, o que lhe escapa completamente e ele não pode notar. As representações conscientes são aquelas que apresentam um caráter intencional e que complementam as funções de objetivação[27].

As representações mentais são internas e conscientes e são todas as representações que permitem ao sujeito uma visão do objeto matemático na ausência do

[27] A objetivação corresponde à descoberta pelo próprio sujeito do que até então ele mesmo não supunha, mesmo que os outros houvessem explicado. (DUVAL, 2009,p.41)

significante perceptível. As representações semióticas externas são aquelas que necessitam de um significante para representar o objeto. Já as operações computacionais são internas e inconscientes. Nesse tipo de representação, o sujeito realiza uma tarefa sem pensar em todos os "passos" necessários a sua realização, é o caso, por exemplo, dos algoritmos das operações.

Duval (2009) aponta para a existência de outros dois tipos de tratamento que interferem no processo de aprendizagem matemática, mas que se complementam. São eles, os tratamentos intencionais e os quase instantâneos.

Os tratamentos quase intencionais são aqueles que "produzem as informações e as significações em que um sujeito tem imediatamente consciência" (Ibidem, p.50) e são tratamentos que não necessitam de um grande espaço de tempo. Intuitivamente podemos dizer que esse tipo de tratamento corresponde à familiaridade ou à experiência resultante de uma longa prática ou competência adquirida em um domínio. Um exemplo de tratamento quase intencional é o cálculo de $\frac{d}{dt}e^{3t^2}$, por um estudante que já tenha uma familiaridade com as técnicas de derivação. Esse tipo de tratamento está associado às representações computacionais, que são "todas aquelas cujos significantes, não requerem visão do objeto e que permitem uma transformação algorítmica de um significante em outro" (ibidem, p.47).

Os tratamentos intencionais podem ser entendidos como sendo aqueles que necessitam de um "controle consciente do que o sujeito vê ou nota" (ibidem p.52). Um exemplo de tratamento intencional seria o cálculo de $\frac{d}{dt}e^{3t^2}$por um aluno que esteja sendo apresentado às regras de derivação.

É importante salientar que

> Toda a atividade cognitiva humana repousa sobre a complementaridade desses dois tipos de tratamentos. Sendo que dada a não extensibilidade da capacidade de tratamento intencional, a diferença das performances cognitivas entre os sujeitos depende da diversidade e da arquitetura dos tratamentos quase- instantâneos que eles dispõem. O conjunto de tratamentos dos quais um sujeito dispõe determina o nível e o horizonte epistêmicos para a aplicação de tratamentos intencionais. (DUVAL, 2009, p.52)

No caso do Cálculo Diferencial e Integral, as atividades de tratamento tem um papel de facilitador da situação estudada, uma vez que ele revela uma informação implicita ao registro incial.

2.1.2 Atividades cognitivas fundametais de representação

Como já foi dito anteriormente existem três atividades cognitivas que são importantes no processo de aprendizagem matemática: a formação das representações, os tratamentos e as conversões.

No processo de formação das representações semióticas é necessário que as regras do sistema que está sendo empregado sejam respeitadas, sob pena deestarmos criando uma representação que não terá função de comunicação nem possibilidade de transformação. A esse conjunto de regras que devemos estar atentos no momento da representação, Duval chamou de regras de conformidade.

As regras de conformidade, são aquelas que vão garantir que a representação feita está em conformidade com o sistema escolhido. Para Duval, deve haver:

> (...) a) a determinação (estritamente limitada, ou ao contrário aberta) de unidades elementares (funcionalmente homogêneas ou heterogêneas...): símbolos, vocabulário, (...)
>
> b) a combinações admissíveis de unidades elementares de nível superior: regras de formação para um sistema formal, gramática para as línguas naturais, ...
>
> c) as condições para que as representações de ordem superior seja uma produção pertinente e completa: regras canônicas próprias a um gênero literário ou a um tipo de produção num registro. (DUVAL, 2009, p.55)

Cabe ainda salientar que a aplicação das regras de conformidade é menos complexa~~ s~~ que a formação das representações semióticas.

Uma vez construída a representação, precisamos analisar as outras duas atividades cognitivas importantes no processo de aprendizagem matemática: o tratamento e a conversão.

Como dito anteriormente, para Duval, o tratamento consiste na transformação de uma representação semiótica em outra no mesmo registro de partida. Assim sendo, podemos entender a transformação como sendo uma transformação interna a um registro.

Duval, (2009) afirma que "de modo geral podemos dizer que o tratamento de uma representação semiótica corresponde a sua expansão informacional". Podemos ilustrar o tratamento quando pensamos nas regras de derivação. Essas regras permitem um tratamento a um registro inicial, ou seja, a partir de um registro de saída obtemos um registro de chegada, porém estamos trabalhando com registros diferentes que estão contidos num mesmo quadro, nesse caso, o quadro algébrico.

Em contrapartida temos as conversões, ou seja, a conversão consiste numa transformação externa ao registro de representação inicial, uma vez que a representação de chegada se encontra num quadro diferente da representação inicial.

Para Duval, a atividade de conversão exige que percebamos a diferença entre referência e sentido. Para esse pesquisador,

> A distinção entre sentido e referência está estreitamente ligado ao princípio da substituição, que é essencial nos procedimentos de cálculo ou de dedução: duas expressões tendo a mesma referência podem ser trocadas uma pela outra em uma frase ou fórmula sem que o valor da verdade mude. (DUVAL,1988, p.7)

O autor ilustra seu pensamento, valendo-se da representação decimal e fracionária de um mesmo número. Observe o exemplo:

$$\frac{5}{5}+\frac{2}{5}=1+\frac{2}{5}=1+0{,}4=1{,}4$$

Ainda nesse cenário, Duval, nos afirma que a conversão das representações semióticas constitui a atividade cognitiva menos espontânea e mais difícil para a grande maioria dos estudantes em matemática.

2.1.3 A identificação das variáveis cognitivas e a aprendizagem matemática.

Se pretendermos realizar qualquer atividade cognitiva em matemática, devemos estar atentos que existem duas condições que são indispensáveis a esse propósito: o reconhecimento das unidades de sentido[28] e as transformações de registros. Para Duval (2011) "essas são duas condições preliminares e absolutamente indispensáveis para que alguém possa compreender e fazer qualquer coisa em matemática. "

No cenário que acabamos de citar, encontra-se a conceituação que é o funcionamento cognitivo do pensamento e que tem um caráter notavelmente semiótico.

De acordo com Duval (Ibidem) "o interesse pela modelagem do funcionamento cognitivo do pensamento em termos de registro não é um princípio teórico, mas metodológico. "

Para o Duval, se estamos interessados em analisar o que significa uma determinada representação, faz-se necessário que consideremos outra representação que possua uma relação com a primeira, ou seja, a compreensão de uma representação está condicionada a análise de outra representação que seja uma variação da primeira.

> (...) em outras palavras, não poderemos jamais interpretar uma representação semiótica, qualquer que seja, se considerarmos apenas ela, independentemente de todas aquelas nas quais ela pode ser transformada. (DUVAL, 2011, p.104)

Quanto à primeira condição, mencionada no início do subcapítulo, ou seja, o reconhecimento das unidades de sentido e as transformações de registros, somos levados ao seguinte procedimento: se desejamos isolar as unidades de sentido, precisaremos de duas operações. Primeiro devemos converter essa representação num outro registro. Depois gerar todas as modificações possíveis dessa representação para convertê-las para esse outro registro. Dessa forma poderemos observar se as variações feitas no primeiro registo produzem ou não produzem covariações no segundo.

Para Duval, a escolha do segundo registro é metodologicamente importante, uma vez que é ele que nos permite verificar se duas representações, pertencentes a registros diferentes, representam ou não o mesmo objeto.

Em relação à segunda condição, o procedimento se limita a um único registro sem mobilizar, mesmo de maneira implícita, outro registro. Trata-se então, de fazermos um rol de todas as possíveis variações que permitem passar de uma representação para

[28] Dados ou informações matematicamente pertinentes.(DUVAL, 2011, p.103)

outra, num mesmo registro. Com isso, poderemos distinguir as operações de transformação que são possíveis dentro de um tipo de registro.

2.1.3.1 Como Isolar e reconhecer as unidades de sentido matematicamente pertinentes no conteúdo de uma representação

Para Duval, não é possível que se distinga as unidades de sentido matematicamente pertinentes no conteúdo de uma representação sem a converter, de forma implícita ou explícita, em outro registro. Mas o pesquisador também nos informa que uma única conversão não suficiente para reconhecer as unidades de sentido ou para justificar a pertinência das correspondências entre as representações de partida e chegada. Segundo ele, para que essas correspondências possam ser verificadas, faz-se necessário a produção de variações, de maneira sistemática, entre os conteúdos das representações de partida e fazer uma nova conversão para cada variação feita.

De acordo com Duval (2011), o ponto decisivo ´"é a variação sistemática das representações das quais queremos isolar as unidades de sentido". Para Duval, no caso das representações cartesianas, essas variações devem ser exclusivamente visuais e devem "corresponder oposições qualitativas no reconhecimento visual da forma do gráfico, de sua orientação e de sua posição em relação aos eixos".

2.1.3.2 A análise da atividade matemática em função dos registros mobilizados.

A atividade Matemática real, não se limita à utilização de um único registro. Ela sempre ultrapassa as produções explicitas no registro em que efetuamos os tratamentos.

Desta, forma, Duval nos orienta sobre a análise do funcionamento cognitivo do pensamento, exigido pela matemática, e nos mostra a necessidade de uma mobilização de uma diversidade de registros, ou seja, em matemática não há como pensar em um único registro mas sim em vários registros ao mesmo tempo.

Duval (2011), quando aborda a análise das atividades matemáticas objetivando a aprendizagem destaca a importância de se considerar todos os registros utilizados em matemática. Segundo ele, para analisar a resolução de um problema não podemos privilegiar o registro no qual fizemos o tratamento que resolveu o problema. “A mobilização dos outros registros relativos aos dados do problema, a maneira pela qual eles são representados é essencial”.

Duval (2004)divide os registros semióticos em quatro grandes grupos: discursivos e não discursivos ; monofuncionais e plurifuncionais.

Em relação à dualidade discursivo não discursivo, o pesquisador nos afirma que não se pode reduzir os registros discursivos à lingua materna ou às escritas formais da mesma maneira que não seria ideal reduzir-se a ideia de registro não discursivo às imagens, às figuras da geometria e aos gráficos cartesianos. Segundo ele, “cada um desses registros favorece um tipo de transformação das representações que o outro tipo de registro não permite.

Em relação a dualidade multifuncionais/monofuncionais, Duval adota a seguinte diferença. Os registros monofuncionais são próprios da matemática em quanto os registros multifuncionais são utilizados fora da matemática, para as funções de comunicação e objetivação e não primeiramente, para a função de tratamento.

Duval apresenta no quadro a seguir os quatro tipos de registros usados em matemática.

	Registros DISCURSIVOS Linearidade fundamentada na sucessão para a produção, apreensão e organização das expressões	Registos NÃO DISCURSIVOS Apreensao simultânea de uma organização bidimensional
Registros MULTIFUNCIONAIS: os trtamentos são algoritmizáveis	As línguas : três operações hieraquicamente incluídas (designação de objetos, enunciação e raciocínio) Duas modalidades de produção: oral e escrita	Icônica: produção a mao livre, conservação interna das relações topológicas características das partes do objeto. Configuração Geométrica: três operações independentes:(construção instrumental, divisão e reconfiguração merológicas, desconstrução dimensional das formas)
	Representações auxiliares transitórias para as operações livres ou externas	
Registos MONOFUNCIONAIS: as transformações de expressões são algoritmizáveis	As escritas simbólicas para as operações de substituições ilimitadas (sistema de numeração, escrita algébrica, linguas formais) Uma modalidade de produção : escrita	Junção entre os pontos ou nós, e orientação marcadas por flechas. Gráficos cartesianos, operação de zoom, interpolação, mudança de eixos. Esquemas

Quadro 4: Classificação dos tipos de registros semióticos.(Duval, 2011, p.118)

Para Duval, é importante que estejamos atentos à capacidade do aluno de realizar conversões diretas e inversas entre dois registros. As conversões diretas ou inversas são duas tarefas cognitivas diferentes, porém para que haja uma coordenação conjunta de vários registros, é necessario que se seja capaz de converter as representações nos dois sentidos.

2.1.3.3Os fenômenos de congruência e não congruências nos fenômenos das representações

De acordo com Duval (2011), o primeiro gesto do pensamento em matemática, é exatamente a mudança de um registro de uma representação obtida após um tratamento.Para o pesquisador, sem esse gesto (que deve ser quase automático) nenhuma atividade matemática seria possível.

Fazer mudança entre representações faz emergir um fenômeno denominado por Duval de congruência semântica que procura medir o grau de transparencia entre representações de um mesmo objeto. Para Duval, o fenômeno da congruência semântica se faz mais presente na operação de conversão por se tratar de uma operação entre diferentes tipos de registro, uma vez que “para que a conversão seja efetuada ou objeto reconhecido em dois sistemas distintos é necessário também reconhecer as regras de funcionamento semiótico em cada um dos sistemas”.

Ainda em relação as conversões, Duval (2003) afirma que a tarefa de conversão apresenta um grau de dificuldade por parte dos estudantes e essas difculdades influenciam de forma direta a aprendizagem do objeto matemático em estudo . Para o pesquisador essas dificuldades podem estar relacionadas ao fenômeno de congruência das conversões.

De acordo com Duval (2009), o procedimento de correspondência de duas representações pertencentes a registros diferentes pode ser estabelecido localmente por uma associação das unidades significativas.

Observe os exemplos presentes em Duval 2009:

Ex.$_1$) “o conjunto dos pontos cuja ordenada é superior a abscissa”

y > x

Nesse exemplo, percebemos que a correspondência termos a termo foi suficiente para efetuar a conversão.

Ex$_2$) “ o conjunto dos pontos que tem uma abscissa positiva.”

x > 0

No exemplo 2, observamos a falta de uma escrita unidade de sentido que corresponda a palavra “positivo”, recorre-se a “> 0”que é a combinação de de duas unidades de sentido para suprir a ausência.

Ex_3) “ O conjunto dos pontos que tem abscissa e ordenadas com mesmo sinal”

$$xy > 0$$

Nesse caso, percebemos que não existe mais correspondência termo a termo entre as unidades de sentido.

Ainda, segundo Duval, a realização das conversões pode vir a se tornar mais simples ou mais complexa, dependendo do fenômeno de congruência.

Duval, chamou de investigação do fenômeno de congruência, a ação de designar as conversoes em congruentes ou não congruentes.

Duval (2003) enuncia que para ser congruente, uma conversão deve satisfazer três condições:

1. **Correspondência semântica, ou correspondência uma a uma entre os elementos significantes**: para cada elemento simples no registro de saída tem um elemento simples correspondente no registro de chegada.

2. **Unicidade semântica terminal**: cada unidade significante no registro de saída tem uma única unidade significante no registro de chegada.

3. **Ordem que compõe cada uma das representações**: diz respeito à forma de apresentação de cada uma das representações.

Para Duval, se uma dessas condições não está satisfeita, a conversão é chamada de conversão não congruente.

Se desejamos julgar duas representações em congruentes ou não, é preciso segmentá-las em suas unidades de sentido, de tal forma que essas unidades possam ser postas em correspondência.

Segundo Duval (2004), existe uma relação entre o fenômeno de congruencia nas conversões e o sucesso de estudantes em atividades matemáticas. De acordo com ele, as conversões não congruentes são aquelas onde os alunos apresentam a maior taxa de insucesso.

2.2 Os três mundos da Matemática

A perspectiva teórica de David Tall tratando de “Três Mundos da Matemática” surge do estudo de teorias que tratam do desenvolvimento cognitivo e da necessidade de explicar como se dá o aprendizado em matemática. Tall se refere aSfard (1991) que defende que durante o desenvolvimento dos conceitos encontram-se três estágios de estruturação, caracterizados como interiorização, condensação e reificação*;* aoestudo das abstrações empíricas, pseudo-empíricas e reflexivas de Piaget, baseadas na percepção, ação e reflexão sobre os objetos; aos modos de representação mental, sensório motor, icônico e simbólico definidos por Bruner (1966) como sequenciais no crescimento cognitivo do indivíduo.

Referindo-se às experiências matemáticas, Tall (2004) associa denominados os Três Mundos da Matemática com três formas de desenvolvimento cognitivo em relação à matemática ao mesmo tempo distintas e relacionadas entre si e considera o Mundo Conceitual Corporificado, o Mundo Proceitual Simbólico e o Mundo Axiomático Formal. Esses mundos são descritos pelo autor como maneiras distintas e interligadas de desenvolvimento do pensamento matemático que, por sua vez, estão associadas a procedimentos, ações e à linguagem dos sujeitos para com os objetos matemáticos.

O **Mundo Conceitual Corporificado** - ou apenas Mundo Corporificado - como afirma Tall (2004), “diz respeito às percepções acerca do mundo e o pensamento a respeito das coisas que são percebidas e sentidas não apenas no mundo físico, mas em um mundo mental de significados[29]”. Este mundo está baseado na ação e na percepção e envolve os objetos corporificados, tais como, gráficos e diagramas, que podem ser fisicamente manipulados e, posteriormente, concebidos como objetos mentais. Os modos de operar no Mundo Conceitual Corporificado são associados com a percepção, a observação e a descrição que visam o entendimento de propriedades relativas aos conceitos matemáticos. De acordo com Lima(2007) esses “modos” de operar possibilitam perceber propriedades matemáticas nesses objetos e agirmos sobre eles para entender o que significam.

[29]The first grows out of our perceptions of the world and consists of our thinking about things that we perceive and sense, not only in the physical world, but in our own mental world of meaning.” (TALL, 2004, p. 2)

O **Mundo Proceitual Simbólico** (ou simplesmente Mundo Simbólico – como afirma Tall)

> [...] é o mundo dos símbolos que são usados para cálculos e manipulações na aritmética, na álgebra e no cálculo, por exemplo. As atividades neste mundo se iniciam com ações (como apontar e contar) e são incorporadas como conceitos por meio do uso de símbolos [...][30] (TALL, 2004, p. 2).

De acordo com Lima(2007), no mundo proceitual simbólico, os significados dados aos conceitos no mundo corporificado são ampliados e para que algo seja aceito como verdade, são necessárias manipulações dos símbolos existentes nesse mundo. Os símbolos passam a representar o significado dado tanto aos conceitos pensáveis quanto as ações que são efetuadas. (Processos + conceitos = Proceitos).

O Mundo Axiomático Formal (ou Mundo Formal - como afirma Tall, 2004,) por sua vez, "é baseado em propriedades, expressas em termos de definições formais que são usadas como axiomas para especificar as estruturas matemáticas (por exemplo, 'grupo', 'campo', 'espaço vetorial' e 'espaço topológico' e assim por diante)[31]" que constituem o sistema axiomático da Matemática. Em termos gerais, este mundo pressupõe um movimento em direção ao formalismo nas representações e no uso dos conceitos.

O esquema abaixo explica o desenvolvimento do pensamento cognitivo, à luz dos Três Mundos da Matemática.

[30]"[...] is the world of symbols that we use for calculation and manipulation inarithmetic, algebra, calculus and so on. These begin with actions (such as pointing and counting) that are encapsulated as concepts by using symbol [...]". (TALL, 2004, p. 2)

[31]"[...] is based on properties, expressed in terms of formal definitions that are used as axioms to specify mathematical structures (such as 'group', 'field', 'vector space', 'topological space' and so on)." (TALL, 2004, p. 3).

Figura 7: Desenvolvimento do pensamento cognitivo, à luz dos Três Mundos da Matemática.
Fonte: Lima(2007)

Segundo Tall(2004) devemos considerar que em cada Mundo da Matemática há diferentes maneiras de lidar com os objetos matemáticos, e, nesse sentido, a linguagem exerce um importante papel, pois é por meio dela que os sujeitos representam seus conhecimentos e os compartilham com os outros.

Para Tall(2007), precisamos estar atentos ao fato de quecada indivíduo tem suas próprias experiências e, devido a isso, cada um desenvolve de maneira distinta sua trajetória pelos Três Mundos da Matemática, desenvolvendo, assim, seu pensamento matemático, sendo assim o desenvolvimento cognitivo dos alunos não é, necessariamente, sequencial, considerando suas ações em relação aos três mundos caracterizados. Isto é, podemos considerar que os alunos transitam (em termos cognitivos) nos Três Mundos em vez de tomá-los como estágios consecutivos a serem percorridos em suas atividades matemáticas, indo do Mundo Conceitual Corporificado ao Mundo Axiomático Formal.

Como já foi dito, os alunos percorrem trajetórias individuais pelos Três Mundos da Matemática e à medida que tal percurso vai se desenvolvendo, é natural que ocorram dificuldades, que acabarão por exigir dos alunos a utilização conhecimentos adquiridos anteriormente na tentativa de superação dessas dificuldades.

Para Tall (2004), cada sujeito lida com estas dificuldades de maneiras diferentes, de acordo com experiências que teve anteriormente e que, por sua vez, podem afetar o aprendizado atual, tanto de maneira positiva quanto negativa.

2.3. O pensamento matemático avançado

A forma como os alunos pensam os objetos matemáticos, constitui-se um dos campos de investigação na Educação Matemática. Nesse cenário, destacam-se as pesquisas relacionadas ao pensamento matemático avançado.

Tall, ao estudar o pensamento matemático avançado procurou analisar a natureza desse tipo de pensamento do ponto de vista psicológico, porém não se afastou da busca da compreensão desse pensamento para o matemático em seu trabalho como professor e/ou pesquisador.

Tall(1991) e Dreyfus(1991) nos afirmam que o pensamento matemático avançado pode estar presente em assuntos tratados na matemática elementar da mesma maneira que em assuntos da matemática avançada quando tratados de forma elementar. "É possível pensar em tópicos matemáticos avançados numa forma elementar e pode ter-se pensamento avançado sobre tópicos elementares" (Tall p. 26). Sendo assim precisamos estar atentos para não confundirmos a matemática elementar e/ou a matemática avançada com o pensamento matemático elementar e/ou avançado.

2.3.1Como fazer a distinção entre o pensamento elementar e o pensamento avançado?

Como já dissemos anteriormente, para Tall (1991), muitas atividades cognitivas que ocorrem no pensamento matemático elementar também ocorrem no pensamento matemático avançado, porém, é nesse último que a capacidade de definição formal e de dedução se fazem presentes, constituindo-se assim em fatores capazes de distinguir as duas formas de pensamento.

> Nós postulamos que muitas das atividades que ocorrem neste ciclo também ocorrem em matemática elementar resolução de problemas, mas a possibilidade de definição formal e dedução é um fator que distingue o pensamento matemático avançado[32](Tall, 1991,p.22)

Nesse sentido, o presente subcapítulo destina-se a estudar alguns dos aspectos do pensamento matemático avançado presentes na matemática do ensino superior.

Em relação ao ensino de matemática nos cursos superiores, Tall nos afirma que em muitos casos, os alunos são apresentados a uma teoria já deduzida, em detrimento de se permitir ao aluno a construção do conceito do objeto matemático que o professor está trabalhando.

O autor ainda nos chama atenção para o fato de que os métodos que estão sendo utilizados para o trabalho com conceitos da matemática avançada, além de não contribuírem para o desenvolvimento do pensamento matemático, ainda podem primar por uma apresentação demasiadamente lógica, o que também, segundo ele, pode não ser apropriado ao desenvolvimento do pensamento**.**

> Os métodos atuais de apresentar o conhecimento matemático avançado acabam por deixar de propiciar ao aluno todo o poder do pensamento matemático, além disso, eles possuem outra grave deficiência: a apresentação lógica pode não ser apropriada para o desenvolvimento cognitivo do aluno (Tall, 1991, p. 22) [33]

Tall (1991) também destaca que sempre que nos valemos de uma teoria para estudarmos a aprendizagem matemática devemos estar atentos às concepções dos alunos e dos professores em relação ao objeto matemático estudado, pois segundo ele, “cada um de nós tem uma maneira sutilmente diferente de vermos um determinado conceito matemático, dependendo de nossas experiências”.

Em 1981, Tall e Vinner apresentam uma distinção entre o que é a forma de se pensar de maneira individual um conceito e a definição formal desse conceito. Com isso

---

[32]We postulate that many of the activities that occur in this cycle also occur in elementary mathematics problem solving, but the possibility of formal definition and deduction is a factor that distinguishes advanced mathematical thinking (Tall, 1991,p.22)

[33]Not only may current methods of presenting advanced mathematical knowledge fail to give the full power of mathematical thinking, it also has another, equally serious, deficiency: a logical presentation may not be appropriate for the cognitive development of the learner.

eles propõem uma forma de se distinguir a matemática como uma atividade mental e a matemática como um sistema formal.

Para Tall, a apropriação de um conceito não ocorre de forma linear. Sempre que precisamos nos apropriar de alguma informação como, por exemplo, algum conceito matemático, acionamos estruturas diferentes e complexas do nosso cérebro de forma simultânea. Essas estruturas evocam diferentes imagens para se apropriar deste novo conceito, acionando toda uma rede complexa de imagens mentais, definições pré-estabelecidas e saberes prévios para compreendermos esta nova informação.

Nesse sentido, o autor, considera o termo "imagem de conceito", como sendo uma estrutura mental que associa todas as imagens mentais, processos e procedimentos associadas a um determinado conceito. Para Tall, a imagem de conceito é construída ao longo da vida e por meio das experiências, de novos estímulos e da maturidade essa imagem do conceito vai se modificando. Como dito anteriormente, para Tall as nossas experiências vão influenciar a nossa forma de "enxergar" um determinado conceito. A partir dessa informação, somos levados a perceber que a imagem de conceito é individual.

Outro ponto a se considerar é que determinados estímulos excitam determinados caminhos neurais e inibem outros; sendo assim, um determinado estímulo é capaz de ativar apenas parte da imagem de conceito. Por conta desse fato, as imagens de conceito podem conter informações e/ou propriedades contraditórias.

Vamos tentar ilustrar o que discutimos até aqui, em relação à imagem de conceito

Imaginemos que um sujeito ouça o nome de um determinado conceito. Nesse momento são geradas na estrutura cognitiva do sujeito um conjunto representações visuais impressões ou experiências que poderão ser expressas de forma verbal. Vale destacar que essas representações nem sempre são precisas.

Tomemos por exemplo o conceito de derivada de uma função.

Quando falamos a um aluno: derivada de uma função de uma variável real, pode vir à mente desse aluno: y', $f'(x), \frac{dy}{dx}$, $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, ou ainda

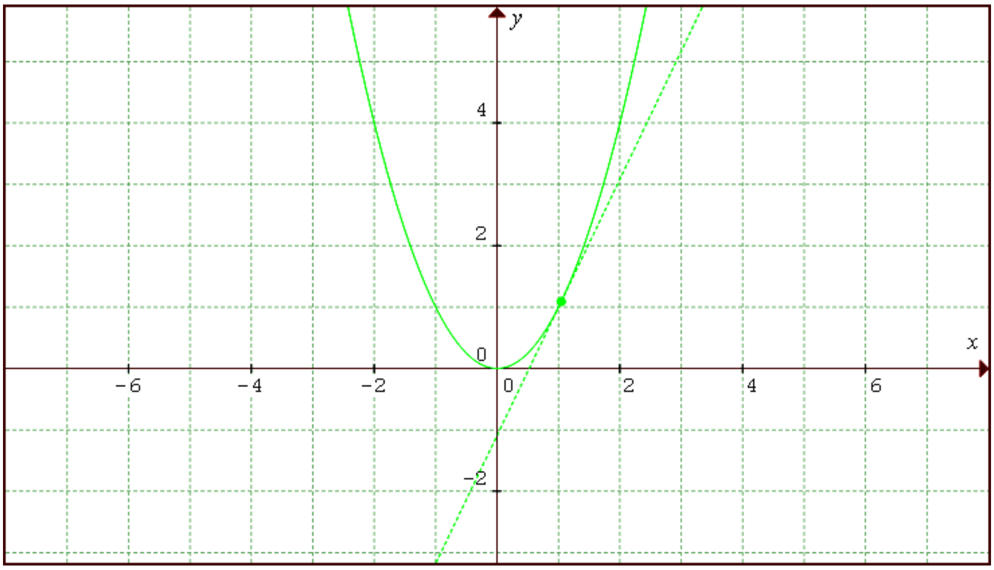


Figura 8: Reta tangente a uma curva num ponto dado

Sendo assim, o termo imagem de conceito representa o conjunto de todas essas imagens, propriedades ou procedimentos que foram associadas à derivada de uma função.

Para Tall e Vinner (1991), saber de cor um conceito não significa entendê-lo. Segundo os autores, a compreensão de um conceito está condicionada a formação de uma imagem desse conceito. Para os pesquisadores, alguns conceitos que adquirimos em nosso cotidiano, são adquiridos sem o envolvimento com as definições, em contrapartida, outros conceitos, mesmo que os da vida cotidiana só serão adquiridos via definições.

> A maioria dos conceitos na vida cotidiana, como a casa, laranja, gato, etc, são adquiridos sem o envolvimento de definições . Por outro lado, alguns conceitos, até mesmo da vida cotidiana, podem ser introduzidos por definições. A palavra "floresta" pode ser introduzida para uma criança dizendo " muitas, muitas árvores juntos" (a definição do dicionário Merriam Webster "um grande crescimento aglomerado de árvores e arbustos" é, naturalmente, uma definição inútil para uma criança[34].(Tall, 1991, p.69)

[34]Most concepts in everyday life, like house, orange, cat, etc., are acquired without involvement of definitions. On the other hand, some concepts, even everyday life concepts, might be introduced by definitions. The word “forest” might be introduced to a child by saying “many, many trees together” (the Merriam Webster dictionary definition “a largen thick growth of trees and underbrush” is, of course, a useless definition for a little child).(Tall, 1991, p.69)

De acordo com Tall e Vinner, as definições ajudam na construção da imagem de conceito, porém no momento em que a imagem é construída, a definição "torna-se dispensável", permanecendo inativa.

Em relação à não utilização das definições pós construção das imagens de conceito, Vinner nos diz que estas têm a função do andaime na construção de um prédio, ou seja, quando o prédio já está construído, os andaimes podem ser retirados. Porém, o próprio Vinner, nos alerta para o fato de que, em contextos "técnicos" as definições ganham outros status. Nesses contextos as definições não só são constituintes das imagens de conceito, mas também desempenham um papel fundamental na atividade cognitiva: elas são capazes de "salvar" os estudantes de "armadilhas" preparadas pela imagem de conceito.

Consideremos o exemplo usado por Vinner para ilustrar o parágrafo anterior: Suponha que você precisa determinar o valor máximo de uma função em um intervalo fechado. Para resolver a questão você se lembra de um gráfico de função, gráfico esse que possua um máximo local. A seguir você tenta derivar a função na busca de encontrar os zeros da função derivada. De acordo com Vinner, nesse momento você está explicitando alguns dos aspectos associados à definição de valor máximo de uma função num intervalo fechado e que poderão vir a ajudá-lo a considerar possibilidades de máximos locais.

Quando cita o exemplo anterior, Vinner ainda nos chama a atenção para o fato de que se valendo da definição de valor máximo num intervalo fechado, o estudante poderá evitar a ocorrência de erros. Segundo ele, no exemplo citado, a não utilização da definição, pode causar a fixação da técnica de derivação associada ao conceito de valor máximo de uma função na cabeça de alguns estudantes. A técnica de utilização da derivada nos leva a resultados desejados em algumas situações, mas não em todas.

Somos então levados a observar que contextos mais técnicos acabam por impor aos estudantes a utilização de hábitos de pensamentos absolutamente diferentes daqueles que eles usam em seu contexto de vida diária.

Para Tall e Vinner(1981) um modelo psicológico que busque explicar o processo cognitivo responsável pela construção de conceitos, precisa estar pautado duas noções: a de imagem de conceito (já apresentada nesse estudo) e a de definição de conceito.

Para os pesquisadores, a definição de conceito pode ser entendida como sendo a forma pela qual usamos as palavras para explicar o conceito. Em outras palavras,

> (...) a forma que as palavras foram utilizadas para especificar aquele conceito. Ela pode ser aprendida por um sujeito de uma forma rotineira ou aprendida mais significativamente e relacionada, em maior ou menor grau, com o conceito. Também pode ser uma reconstrução pessoal do estudante de uma definição[35] (Tall e Vinner,1981, p. 152)

Sendo assim, a definição de conceito, pode ser entendida como a definição verbal que explica de forma precisa um conceito.

Na tentativa de explicar suas ideias sobre a imagem de conceito e a definição de conceito, Vinner propõe que imaginemos que em nossa estrutura cognitiva existem dois tipos diferentes de células – que não devem ser confundidas com células como na biologia. Para Vinner, num desses tipos de células, encontramos as definições de conceito e no outro tipo encontramos as imagens de conceito. Segundo o autor, uma dessas células ou ambas podem estar “vazias”. Esse vazio na célula se justifica pelo fato de que nenhum significado ao nome do conceito ainda foi atribuído pelo sujeito. Vinner justifica que esse fato é bastante comum, especialmente quando a definição foi memorizada de forma não significativa pelo sujeito.

> Um estudante pode ter uma imagem do conceito da noção de sistemas de coordenadas, como resultado de ver muitos gráficos em várias situações. De acordo com este conceito, os dois eixos de um sistema de coordenadas são perpendiculares uns aos outros. Mais tarde, professor de matemática do aluno pode definir um sistema de coordenadas como quaisquer duas linhas retas que se cruzam. Como resultado disto, pode ocorrer três situações:
> I. O conceito de imagem pode ser alterado para incluir também sistemas cujos eixos não formam um ângulo reto de coordenadas. (Esta é uma reconstrução satisfatória ou alojamento.)
> II. A imagem do conceito pode permanecer como está. A célula definição conterá a definição do professor por um tempo, mas esta definição será esquecida ou distorcida depois de um curto período de tempo, e quando o aluno será convidado a definir um sistema de coordenadas ele ou ela vai falar sobre eixos formando um ângulo reto. (Neste caso, a definição formal não tenha sido assimilada.)
> III) Ambas as células vão permanecer como estão. O momento em que o aluno é convidado a definir um sistema de coordenadas ele vai repetir ou definição de seu de seu professor, mas em todas as outras

[35]the way the words are used to specify that concept. It can be learned by a person in a routine manner or learned and most significantly related to a greater or lesser extent with the concept. It can also be a personal student reconstruction of a definition Tall; Vinner,1981, p. 152

> situações que ele ou ela vai pensar em sistema de coordenadas como uma configuração de dois eixos perpendiculares[36](Vinner, 1991, p.70)

Segundo Vinner, o mesmo pode ocorrer quando a aprendizagem se dá por meio das definições, ou seja, as “células” da imagem de conceito estão vazias e à medida que exemplos e explicações são dadas, essa “célula” vai sendo preenchida. Devemos estar atentos que esse tipo de preenchimento não reflete necessariamente todos os aspectos do conceito.

Sendo assim, voltamos a questão retro mencionada: como se articulam as “células” mencionadas por Vinner?

De acordo com o autor, muitos professores acreditam que no processo de construção de um conceito há uma supremacia das definições de conceito em detrimento das imagens de conceito. Para esses professores, “a imagem de conceito é produzida por meio das definições de conceito e controlados por eles.”

Tomemos como ponto de partida que, uma vez apresentado a uma tarefa cognitiva, as imagens de conceito e as definições de conceito sejam ativadas. Nesse cenário, a articulação entre as “células” poderia ser esquematicamente representada como nas figuras abaixo:

---

[36]A student might have a concept image of the notion of coordinate systems as a result of seeing many graphs in various situations. According to this concept image, the two axes of a coordinate system are perpendicular to each other. Later on, the student’s mathematics teacher might define a coordinate system as any two intersecting straight lines. As a result of this, three scenarios might occur:
(I) The concept image may be changed to include also coordinate systems whose axes do not form a right angle. (This is satisfactory reconstruction or accommodation.)
(II) The concept image may remain as it is. The definition cell will contain the teacher’s definition for a while but this definition will be forgotten or distorted after a short time, and when the student will be asked to define a coordinate system he or she will talk about axes forming a right angle. (In this case the formal definition has not been assimilated.)
(III) Both cells will remain as they are. The moment the student is asked to define a coordinate system he will repeat his or her teacher’s definition, but in all other situations he or she will think of coordinate system as a configuration of two perpendicular axes.(Vinner, 1991, p.70)

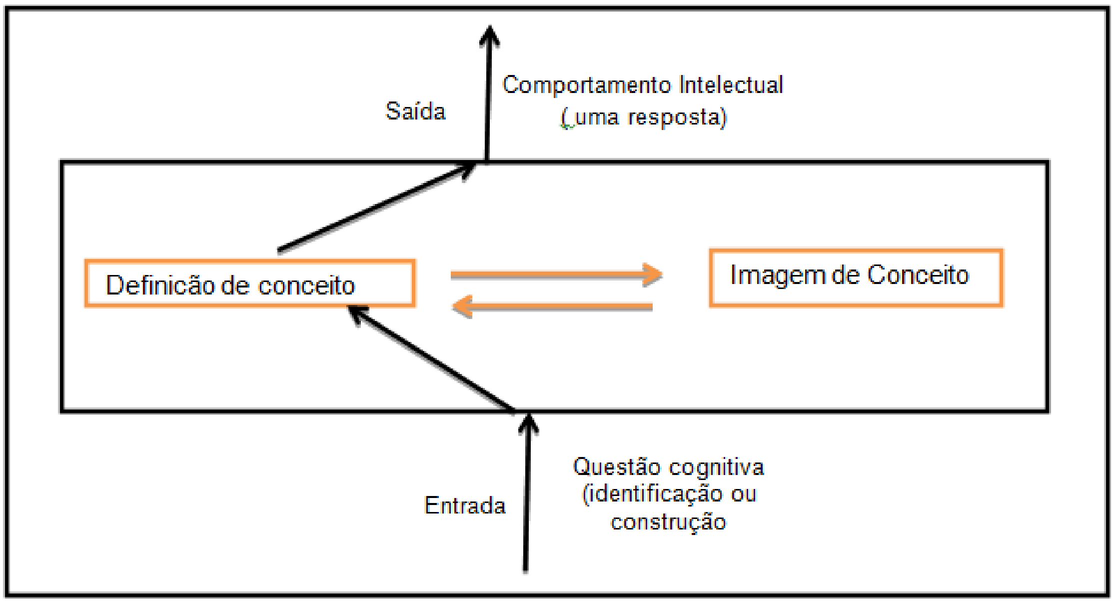


Figura 9: Articulação entre Definição de conceito e Imagem de Conceito.Fonte: Vinner, 1991, p.70

Para Vinner, esse esquema vai variar de acordo com o tipo de tarefa cognitiva apresentada ao aluno.

Observe as figurasqueapresentam a relação entre as imagens de conceito e as definições de conceito, caso a atividade cognitiva seja uma dedução ou uma dedução seguindo o pensamento intuitivo, respectivamente.

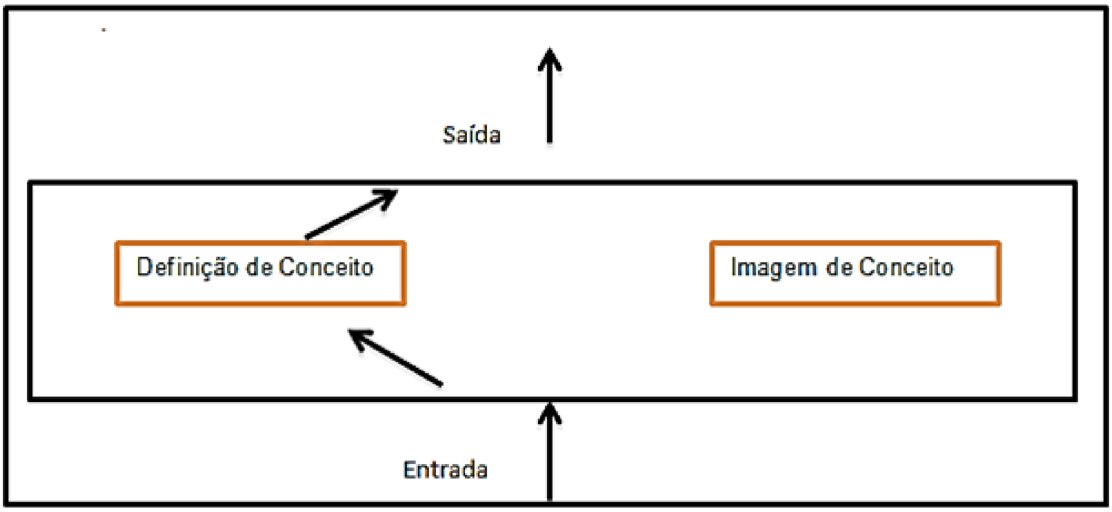


Figura 10: Articulação entre Definição de conceito e Imagem de Conceito
Fonte:Vinner, 1991, p.70

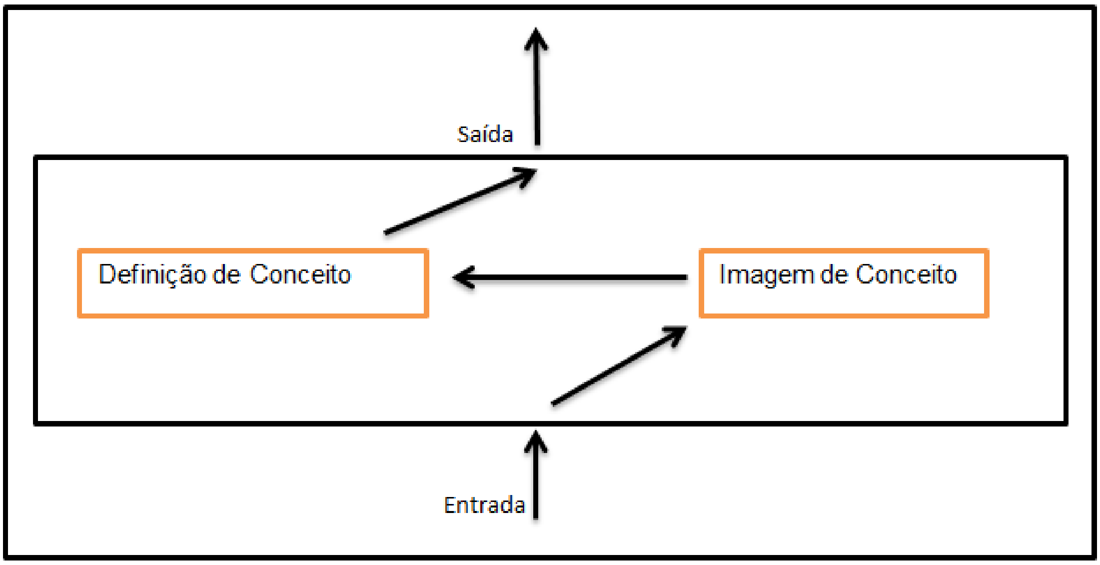


Figura 11: Articulação entre Definição de conceito e Imagem de Conceito
Fonte: Vinner, 1991, p.70

Segundo Vinner, no momento em que o aluno é apresentado a uma atividade cognitiva relacionada a uma situação técnica, a forma como se processa a relação entre as "células" não importa. Para o pesquisador, para que uma solução seja apresentada, antes de que uma solução seja formulada, o estudante irá (deverá) consultar a definição de conceito. Em seus estudos, o autor explicita que não é uma tarefa fácil treinar o sistema cognitivo contra sua natureza, ou seja, força-lo a consultar as imagens de conceito, uma vez que o hábito do pensamento cotidiano não leva o aluno a buscar o pensamento formal. Vinner nos afirma que "é desnecessário afirmar que na maioria dos casos, a consulta à imagem de conceito vai ser muito bem-sucedida na realização das atividades do cotidiano".

Para o pesquisador, apenas a utilização de problemas onde as imagens de conceito são incompletas ou enganosas poderão levar as pessoas a buscarem a definição de conceito. Vinner ainda nos alerta de que o fato de apresentarmos aos alunos esses tipos de problemas, ou seja, problemas técnicos podem ser encarados como uma atividade "injusta". Porém, se acreditarmos nessa "verdade", estaremos frente a um problema ainda maior, pois para o pesquisador, não existe uma outra força aparente que seja capaz de levar o estudante a alterar seus hábitos de pensamento, que são em principio inadequados aos contextos técnicos.

Pelo que observamos precisamos, enquanto professores, despertar no aluno a necessidade de pensar de forma avançada. Mas essa necessidade nos leva a pensar a respeito do seguinte questionamento: como é que se dá a transição do pensamento matemático Elementar para o pensamento Matemático Avançado?

2.3.2 A transição do pensamento matemático Elementar para o pensamento Matemático Avançado

Tall(1995) desenvolveu um método sistemático para explicar a evolução do pensamento matemático. Para isso, ele separou em três as categorias que compõe a atividade humana: a percepção como entrada, o pensamento como uma atividade interna e a ação como saída. Para Tall são esses os três componentes que nos permitem perceber, ou seja, observar, pensar e agir sobre os objetos.

Quando pensamos a matemática elementar, constatamos que esta tem seu início a partir de observações e ações sobre os objetos do mundo externo.

Inicialmente os objetos são percebidos, observados e descritos verbalmente, sendo submetidos a classificações, primeiramente na forma de coleções e depois em formas de hierarquia, o que vem a corresponder a uma forma embrionária de dedução formal relativa às propriedades dos objetos. Este percurso o levou aos chamados Três Mundos da Matemática sobre os quais já discorremos anteriormente.

As ações sobre os objetos, como contar, por exemplo, vão nos conduzir a um outro tipo de desenvolvimento. Precisamos estar atentos para perceber que essas duas formas de desenvolvimento embora partam da observação e da ação sobre os objetos são bastante diferentes. Segundo Tall (1995), "não devemos ver a evolução da matemática elementar como um desenvolvimento simples na forma da teoria dos estágios neo-piagetianos". Para o pesquisador,

> (...) uma teoria alternativa que pode ver dois desenvolvimentos diferentes que ocorrem ao mesmo tempo. Um deles é visuo -espacial se tornar verbal e levando à prova, o outro usa símbolos como processos para fazer as coisas (como a contagem, adição,

multiplicação) e como conceitos para pensar (como número , soma, produto[37](Tall, 1995, p.2)

Tall (1995) chama nossa atenção para o fato que essas formas de desenvolvimento podem ocorrer de forma independente. Numa perspectiva histórica, o pesquisador admite que os gregos desenvolveram uma teoria da geometria (incluindo aritmética por meio de construções geométricas) sem nenhum simbolismo para a álgebra e a aritmética, bem como é possível que se desenvolva a aritmética e a álgebra sem que se faça referência a geometria. Porém, segundo Tall, muitas ligações "vantajosas" têm sido feitas entre os métodos visual e manipulativo simbólico, podendo assim tirar vantagem dessas ligações para a criação de uma abordagem que aproveite o que há de melhor em cada uma delas.

2.3.2.1Mas como começa essa transição?

Tall considera que esta transição começa com a capacidade de *perceber* coisas, *agir* sobre elas refletir sobre estas ações para construir teorias. De acordo com o autor, para que ocorra a transição entre as duas formas de pensamento, é necessária a utilização de estruturas cognitivas que são construídas através de uma variedade de atividades matemáticas que vão ampliar o "repertório conceitual" do estudante.

Na busca para explicar o desenvolvimento cognitivo, Tall (1995) nos aponta que esse desenvolvimento se constrói por dois caminhos. Um vai do visual-espacial para o verbal-dedutivo, no qual os objetos são vistos como estruturas visuais-espaciais e à medida que as propriedades dos objetos são testadas, estes são descritos verbalmente conduzindo ao desenvolvimento de uma demonstração também verbal. O outro é constituído por encapsulações[38] sucessivas de processo para conceito, acompanhadas do uso de símbolos manipuláveis.

De forma geral, no currículo de uma disciplina qualquer, se faz distinção entre habilidades ou procedimentos que um indivíduo precisa adquirir, a fim de que eles consigam fazer as coisas, e os conceitos ou fatos básicos que se espera que eles saibam

[37]an alternative theory is to see two different developments which occur at the same time. One is visuo-spatial becoming verbal and leading to proof, the other uses symbols both as processes to do things (such as counting, addition, multiplication) and also concepts to think about (such as number, sum, product (Tall, 1995, p.2)

[38] A encapsulação é a conversão de um processo (dinâmico) em um objeto (estático)

com os quais eles operam com suas habilidades. Isso sugere uma dicotomia fundamental entre procedimentos e conceitos, entre coisas para fazer e coisas para se saber (Tall e Gray, 1994, p.117). Tendo em mente estes conceitos, Gray e Tall definem (em 1994) o proceito[39] como uma mistura de processo e conceito, em que processo e produto são representados pelo mesmo simbolismo. Assim, o símbolo para um proceito pode evocar um processo e um conceito. (Gray e Tall, 1994, p.117)

A figura abaixo, temos um diagrama das ideias de Tall a respeito do desenvolvimento do pensamento matemático do elementar ao avançado.

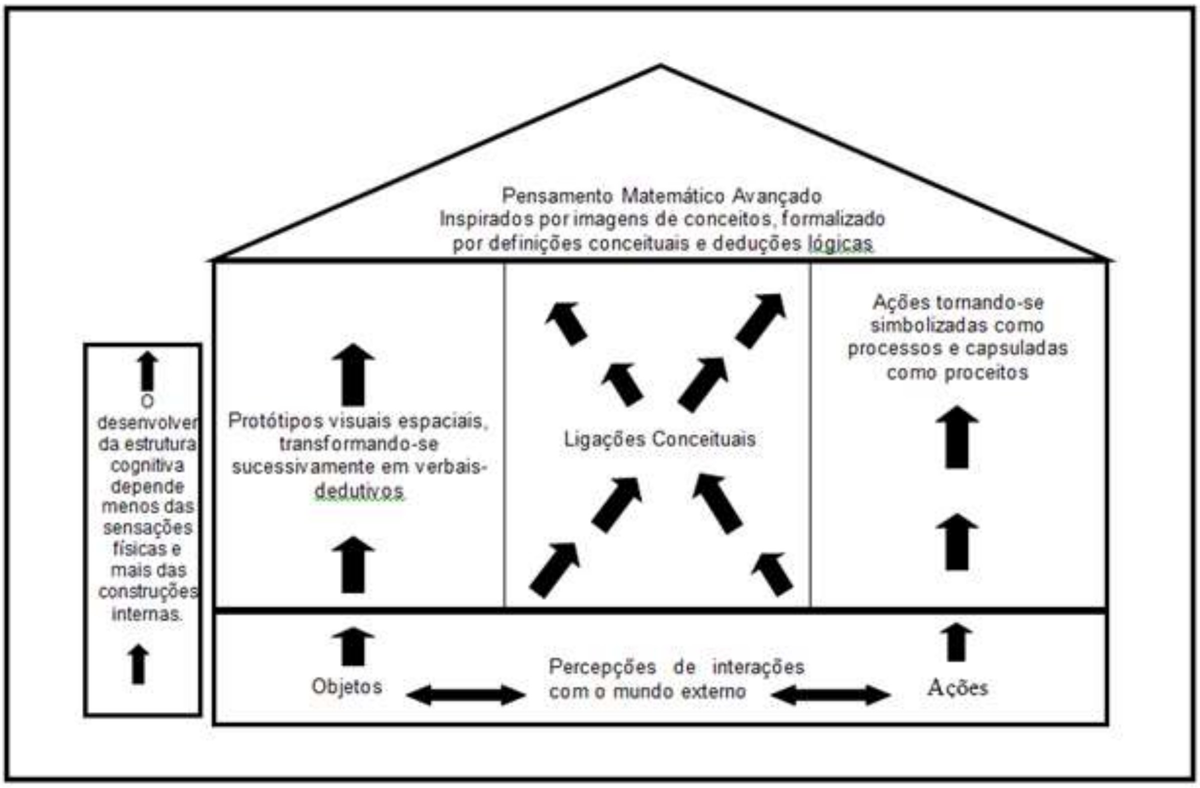


Figura 12: Esboço do desenvolvimento cognitivo desde a criança ao matemático investigador, Fonte: Tall (1995)

Podemos entender o esquema associando os elementos constituintes da transição para o pensamento matemático avançado ao desenho de uma casa. Na base da casa, encontramos as ações e as percepções dos objetos, ou seja, o alicerce para o desenvolvimento do pensamento matemático. As paredes são sustentadas pelas ligações

[39]O termo proceito designa um processo e um conceito representados por um mesmo símbolo

conceituais e a parte mais alta da casa, encontramos o pensamento matemático avançado.

Para a compreensão do processo evolutivo de cada um desses desenvolvimentos, Tall nos alerta para a terceira componente da atividade humana, já mencionada nesse subcapítulo, o pensamento, que se refere à forma como a informação é processada internamente.

Para o pesquisador, essa componente é a mais difícil de descrever e de analisar, porém, segundo ele, podemos conhecê-la através de algumas de suas manifestações como, por exemplo, o estatuto dos objetos mentais produzidos e das representações desses objetos.

Para Tall (1995) o cerne da diferença entre o pensamento elementar e o pensamento avançado é que no primeiro, os objetos matemáticos são descritos enquanto no segundo os objetos são definidos, ou seja, enquanto no pensamento matemático avançado construímos conceitos por meio de definições, no pensamento matemático elementar encontramos propriedades por meio de conceitos já existentes. Tall aprofunda essa discussão a partir do momento em que afirma que nas duas formas de pensamento matemático, ao formular as propriedades do objeto usamos a linguagem, porém no pensamento matemático elementar, essas propriedades do objeto são produzidas a partir das experiências do sujeito com o objeto, enquanto no pensamento matemático avançado, essas propriedades do objeto são construídas por meio das definições.

Tall (1995) afirma que o marco divisório entre as duas formas do pensamento matemático é a mudança cognitiva ocorrida com a introdução do método axiomático onde os objetos passam a ter um estado cognitivo novo como conceitos definidos construídos a partir de definições verbais.

De acordo com o pesquisador, para os iniciantes na matemática avançada faz-se necessário que se recorra a uma variedade de representações por conta da inversão entre as formas como se produzem as propriedades do objeto matemático. Para Tall, devemos incluir as seguintes formas de representação do objeto: as motoras (processos físicos) as icônicas (processos visuais) e as três formas de representação simbólica: a verbal (descrição), a formal (as definições) e a proceitual (dualidade processo - objeto).

Na figura seguinte, Tall, nos apresenta o uso das diferentes formas de representação aplicadas em diferentes tópicos:

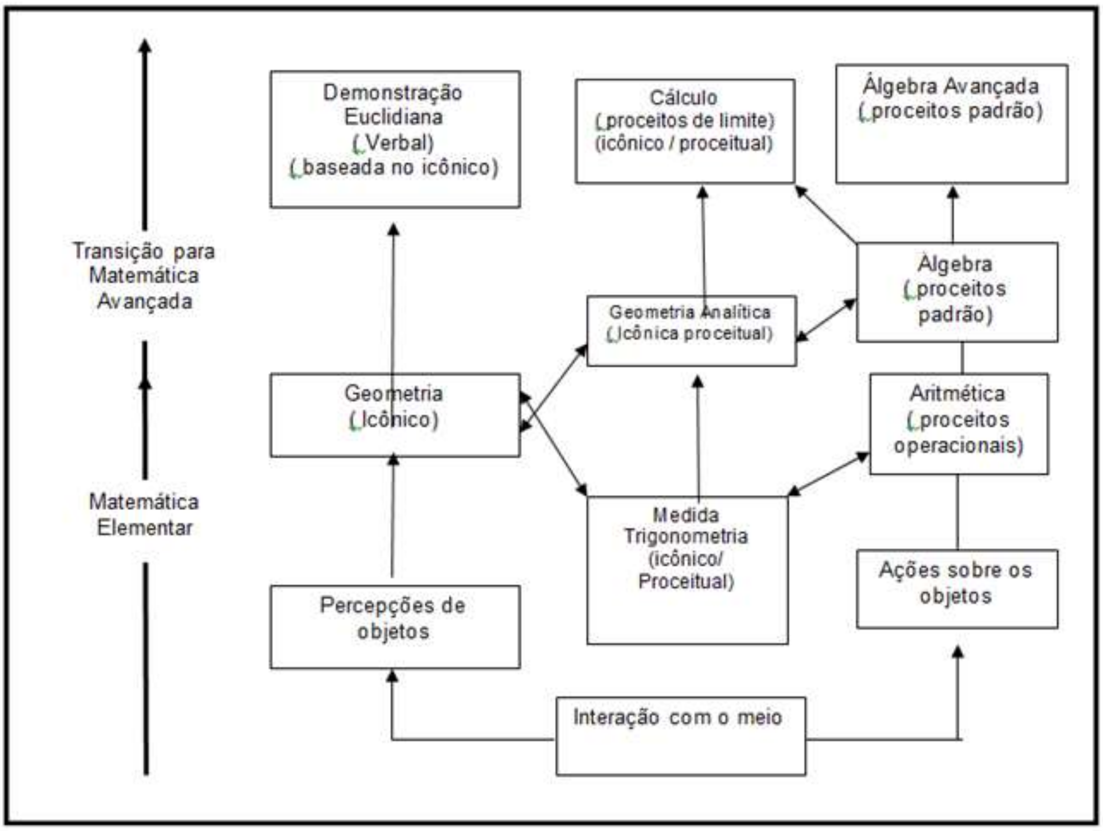


Figura 13: Representações nos campos da Matemática. Fonte: Tall (1995)

Com esse esquema, Tall nos apresenta as diferentes formas de representação para mostrar como elas se caracterizam em diferentes temas matemáticos. Ele nos mostra o desenvolvimento do visual-espacial para o verbal na geometria, o desenvolvimento proceitual na aritmética e álgebra e as relações entre elas em medidas, trigonometria e coordenadas cartesianas.

No topo da figura, encontramos os tópicos que iniciam a transição do pensamento matemático elementar para o avançado. Para Tall, todos esses tópicos requerem uma reconstrução cognitiva significativa. A demonstração Euclidiana necessita de uma organização sistemática continua e de alternativas que sejam capazes de combinar a dedução formal para inspirar a demonstração visual (por exemplo o uso de triângulos congruentes).

Para Tall, na evolução em direção ao Cálculo, as dificuldades são causadas pelo proceito de limite. O desenvolvimento do pensamento em direção a Álgebra Avançada (com vetores em 3 ou mais direções), envolve o produto vetorial que viola a propriedade comutativa da multiplicação ou ainda a ideia de vetores em mais de 3 dimensões que impossibilita uma ligação entre as equações e a geometria “visível” ou imaginável.

Além das etapas até aqui apresentadas, Tall (1991) nos afirma que há ainda um salto maior a ser feito no pensamento matemático avançado para definições formais (que alteram o status dos objetos que estão sendo estudados)e deduções formais (que muda a natureza da prova).

2.3.3 A transição do pensamento elementar para o pensamento avançado

De acordo com Tall (1995), partindo do pressuposto que mudanças cognitivas ocorrem a partir da introdução do método axiomático, na qual objetos matemáticos ganham um novo status cognitivo como conceitos construídos a partir de definições verbais, esse seria o ponto mais natural para traçarmos uma linha entre o pensamento matemático elementar e o avançado.

Observemos a Figura 14.

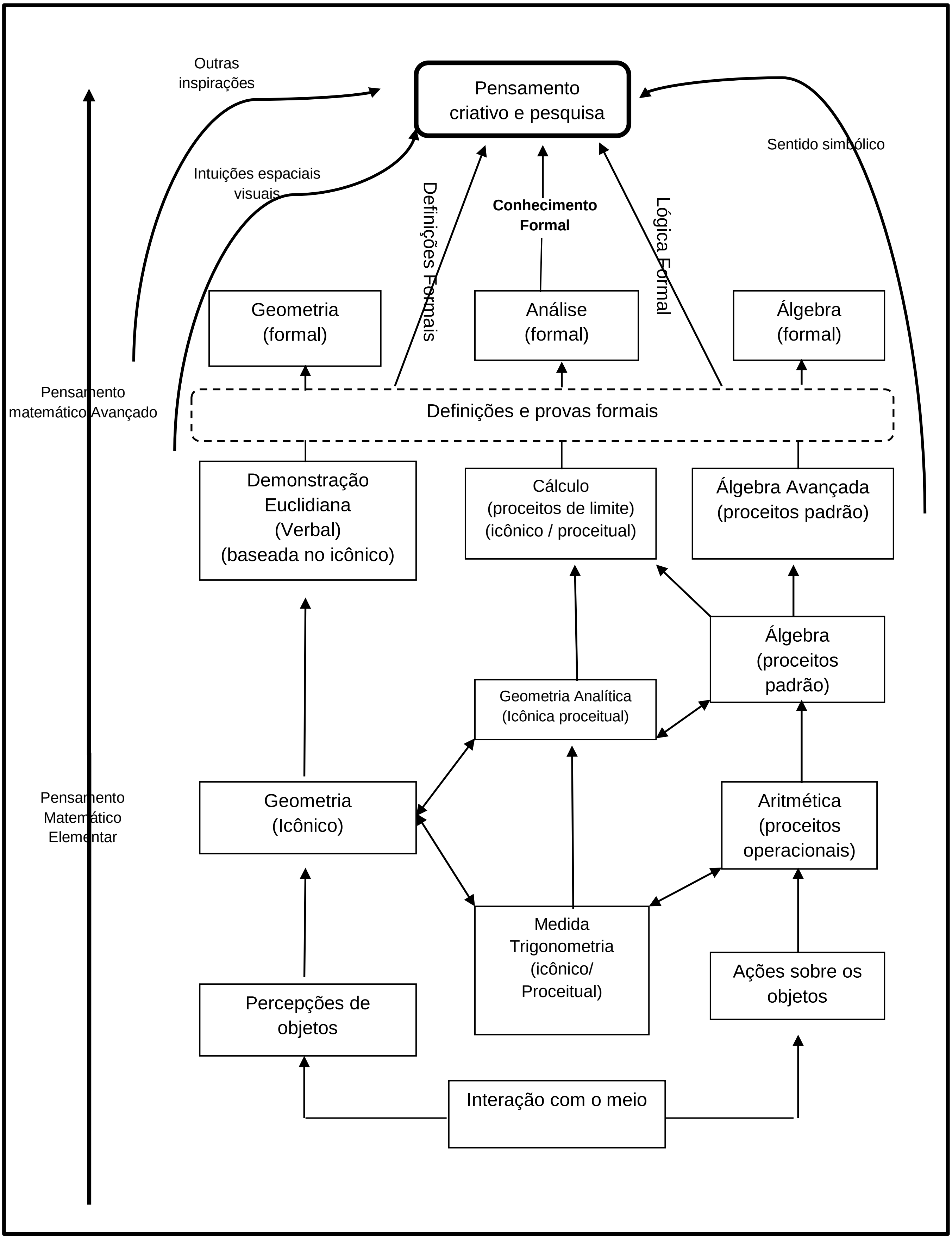


Figura 14: A transição do pensamento elementar para o pensamento avançado. Fonte : Tall (1995)

Uma vez, definido o que é o pensamento matemático avançado e a identificada a transição entre o pensamento matemático elementar avançado, tomando como parâmetro os objetivos do presente estudo resta-nos ainda investigar quais são os processos envolvidos no pensamento matemático avançado.

2.3.4. Processos envolvidos no pensamento matemático avançado

Quando refletimos sobre pesquisas em Educação Matemática, nos deparamos com uma gama de estudos relacionados à maneira que os estudantes pensam os objetos matemáticos e, em especial, o pensamento matemático desenvolvido pelos mesmos, seja de modo elementar, seja de modo avançado.

Para Dreyfus, (2002) o motivo de vários pesquisadores estarem interessados nos processos envolvidos no pensamento matemático avançado, está diretamente ligado ao interesse pela descoberta do que se passa na cabeça do aluno. Há ainda o interesse por parte dos professores de matemática avançada.

De acordo com o pesquisador, não é suficiente, por exemplo, definir e exemplificar um conceito abstrato como o espaço vetorial. Os estudantes devem construir as propriedades do conceito com as deduções a partir da definição. Eles podem estar envolvidos por meio de atividades que promovam a abstração.

Na perspectiva de Dreyfus (2002) o pensamento matemático avançado é constituído pela interação de vários processos mentais como por exemplo abstrair, generalizar, representar dentre outros.

Dreyfus aponta dois processos globais presentes tanto no pensamento matemático elementar quanto no avançado: a representação e a abstração e esses processos globais, são constituídos por outros processos que são: representação simbólica, representação mental, visualização, mudança de representações, modelação, sintetização e generalização.

Segundo Dreyfus o fato dos processos globais estarem presentes nas duas formas de pensamento matemático, reside no fato de que é possível pensar sobre tópicos da matemática avançada de forma elementar, ou seja, não há uma distinção profunda a respeito dos processos que são usados nas duas formas de pensamento, mesmo partindo do pressuposto que a matemática tem seu foco voltado para as abstrações de definição e de dedução. Para ele, a distinção entre as duas formas de pensamento reside na complexidade e na forma como se lidam com os processos.

2.3.4.1 Processos envolvidos na representação

Para Dreyfus, a representação desempenha um papel muito importante na matemática. Para o pesquisador as representações são absolutamente indispensáveis no cenário da matemática moderna.

De acordo com as ideias de Dreyfus, os processos envolvidos na representação são: representação simbólica; representação mental; visualização; mudança de representações e tradução entre elas; modelação.

Para o pesquisador, os símbolos envolvem relações entre signos e significados; eles servem para tornar o conhecimento implícito de uma pessoa - o significado - explícita em termos de símbolos, desta forma devemos estar atentos a necessidade da existência de algum tipo de significado associado a noção antes do símbolo, para que este possa ser usado.

Sendo assim, as representações desempenham um papel fundamental na aprendizagem matemática. Quando falamos, por exemplo, em uma função, uma integral ou qualquer outro objeto matemático, cada um de nós irá estabelecer uma relação mental desse objeto, ou seja, podemos esperar dos estudantes que eles cheguem a definições mais ou menos equivalentes, porém as representações mentais do objeto matemático em questão podem ser muito diferentes.

Dreyfus (2002), nos leva a observar que representar um objeto matemático, significa produzir um exemplo, uma imagem. Porém essa descrição é insuficiente, uma vez que não especifica se o exemplo gerado é simbólico ou mental, assim, se a representação simbólica é externamente escrita ou falada, geralmente com o objetivo de tornar a comunicação sobre o conceito mais fácil, uma representação mental, por outro lado, refere-se ao esquema interno ou quadros de referência que uma pessoa usa para interagir com o mundo exterior. Dessa forma a representação mental constitui-se, assim, como um elemento fundamental para que os sujeitos possam comunicar o seu pensamento acerca de um objeto ou processo.

Outra componente no processo de representação é a visualização. A visualização é um processo pelo qual as representações podem ser criadas. De acordo com Domingos (2003), “a visualização nos oferece intuição e compreensão, surgindo como um processo de formar imagens e utilizá-las de forma eficaz na descoberta e compreensão de conceitos matemáticos”.

De acordo com Dreyfus, dado um conceito matemático, uma pessoa pode criar uma ou várias representações mentais para esse conceito. Pode também criar representações mentais que contemplem vários aspectos do objeto em questão. Sendo assim é possível a utilização dessas várias representações mentais de forma complementar ou ainda elas podem vir a se constituírem de uma única representação.

Ele ainda explica que a existência de várias representações mentais de um conceito não é condição suficiente para o seu uso de forma eficaz na resolução de problemas. Essa “eficácia” seria proveniente das mudanças de representações e da tradução entre elas.

Para exemplificar a importância da tradução, Dreyfus (2002), utiliza o exemplo das funções. A função é um conceito abstrato com o qual normalmente trabalhamos em, usando vários tipos de representação, ou de preferência, várias representações de uma só vez; como o gráfico e a representação algébrica. Aprender este processo de mudança não é fácil. Pensemos, por exemplo, em uma função trigonométrica, que já tem as propriedades de frequência, amplitude e período. Consideremos agora a fórmula algébrica para esta função, o seu gráfico e uma tabela contendo os valores da função em pontos especiais, como extremos e zeros. Além disso, estabelecer as ligações entre estas três representações, compreender e visualizar, por exemplo, alguns dos pontos na tabela de valores apresentados no gráfico ou como o valor do período determina o gráfico, constitui uma grande quantidade de informações a serem tratadas, especialmente para os estudantes que não têm uma vasta experiência.

Como consequência, os alunos muitas vezes limitam-se a trabalhar em uma única representação; por exemplo, mesmo quando eles são obrigados a fazer um desenho, digamos, antes de integrar uma função de valor absoluto, eles ignoram seu próprio esboço e, portanto, não conseguem resolver o problema corretamente. Para resolver com sucesso este problema eles têm que usar, pelo menos, duas representações, e eles precisam transferir informações obtidas em uma representação, a fim de usá-las em outro.

A esse processo de passar da formulação de uma propriedade matemática ou problema para outro Dreyfus chama de tradução.

Dos processos envolvidos na representação, o último é a modelagem. Para Dreyfus (2002) modelar significa construir uma estrutura matemática – o modelo- que pode estudar o comportamento do objeto. A modelagem associa uma representação matemática a um objeto não matemático.

Como já foi dito anteriormente, para Dreyfus os dois principais processos envolvidos no pensamento matemático avançado são a representação e a abstração. Terminamos de apresentar os processos envolvidos na representação. Vamos agora apresentar os processos envolvidos na abstração.

2.3.4.2 Processos mentais envolvidos na abstração.

Segundo o dicionário Aurélio, abstrair significa:

> v.bit.
> 1. Analisar, de modo observativo, um ou vários aspetos contidos num todo, bem como estudar separadamente as suas peculiaridades ou características;
> 2. (Filosofia) Ação de conjeturar em separado;

Para Dreyfus (2002), um estudante alcança o nível mais avançado do pensamento matemático, quando de forma consciente ele é capaz de fazer abstrações de situações matemáticas.

Para que o processo de abstração aconteça, dois outros além do de representar se fazem necessários, o de generalização e o de síntese.

Para Dreyfus generalizar é obter ou induzir de situações particulares para identificar traços ou atributos comuns que permitem expandir os domínios de validade. Este processo pode envolver diferentes níveis. Por exemplo, se um aluno sabe, pela experiência, que uma equação linear de uma variável tem uma solução e que muitos sistemas de duas ou três equações lineares em duas ou três variáveis têm uma solução, ele pode generalizar este conhecimento a um sistema de n equações lineares com n variáveis. Neste caso trata-se de fazer a transição dos casos particulares n=2 e n=3 para o caso geral n, onde precisamos identificar o que há de comum nas condições iniciais para poder conjecturar e estabelecer o domínio de validade da generalização. Nesta situação o caso geral não requer a formulação de outros conceitos matemáticos para além dos que estavam presentes nos casos particulares.

Noutros níveis pode ser necessário incluir a formulação desses conceitos. Por exemplo, se considerarmos a transição da convergência de uma sucessão numérica para a convergência de uma sucessão de funções é necessário ter em conta a topologia no espaço das funções, o que aumenta consideravelmente as necessidades cognitivas no processo de generalização. No caso específico da convergência de funções o grau de dificuldade na generalização é de tal ordem complexo que foi objeto de várias décadas de discussão entre os matemáticos (Cauchy, Abel e Fourier) no início do século XIX.

Tall (1991) propõe a distinção cognitiva entre dois tipos de generalização. Para ele, essa distinção deve ser feita levando-se em consideração as atividades cognitivas envolvidas. A primeira forma de generalização foi chamada de generalização expansiva. Esse tipo de generalização pode ser entendido como sendo aquele no qual se expande a estrutura cognitiva – já existente - do aluno sem que haja a necessidade de mudanças nas ideias atuais. Da mesma forma, se a generalização pressupõe uma reconstrução, ou seja, mudanças nas ideias o processo recebe o nome de generalização reconstrutiva.

Ainda analisando o processo de abstração, encontramos um outro processo: a síntese. Segundo Dreyfus a síntese seria a combinação ou composição das partes, objetivando formar um todo. Tal definição fica fácil de entender quando pensamos na graduação. Durante a graduação somos apresentados vários conteúdos isoladamente e mais tarde, o que se espera é que esses conteúdos forme um novo conjunto formado pelas interligações dos conteúdos que antes nos foram ensinados isoladamente.

Em um trabalho relacionado ao pensamento matemático avançado e as questões presentes no Exame Nacional de Desempenho de Estudantes (ENADE) as pesquisadoras, (Gereti & Savioli, 2015) apresentaram o Quadro 6, sintetizando os processos envolvidos no pensamento matemático avançado.

66

Processos envolvidos na REPRESENTAÇÃO	
Representação Simbólica	Pode-se representar um conceito/objeto matemático por meio da escrita, em forma de notações ou símbolos. No entanto, é necessário que se tenha antes um significado associado ao conceito/objeto matemático representado.
Representação Mental	A representação de um conceito/objeto matemático ocorre na mente do indivíduo, relacionando-se ao conjunto de representações concretas que possui do conceito/objeto.
Visualização	Por meio da intuição e da compreensão, este processo permite que as representações mentais sejam criadas.
Mudança de representações e tradução entre elas	Transitar por diversas representações de um conceito/objeto matemático demanda habilidade para interligá-las corretamente, sempre que necessário. Traduzir representações se refere à passagem de informações de um enunciado/propriedade matemático(a) para outro(a), assim como a tradução entre linguagens (matemática e verbal).
Modelação	O objeto/processo a ser modelado requer a construção de uma estrutura/teoria matemática que abrange suas características.
Processos envolvidos na ABSTRAÇÃO	
Sintetização	Utilizar uma composição de objetos/conceitos matemáticos (distintos), inter-relacionando-os com o propósito de resolver a tarefa como um todo.
Generalização	A partir de casos particulares, identificar características comuns para a validade ser expandida. Pode ser que seja preciso incluir a formulação de outros conceitos matemáticos.

Quadro 6 : Processos envolvidos no pensamento matemático avançado Fonte: Gereti e Savioli (2015)

Nesse capítulo, apresentamos as principais ideias relativas às Teorias das Representações Semióticas, do Pensamento Matemático Avançado e dos Três Mundos da Matemática. Salientamos que não pretendíamos esgotar todos os elementos e contribuições dessas teorias no contexto da Educação Matemática.

Optamos por focar nossa atenção nos aspectos teóricos que se fizeram presentes de forma implícita ou explícita durante a execução de nossa pesquisa de campo.

No caso da teoria das Representações Semióticas, destacamos as dificuldades enfrentadas pelos alunos durante a aprendizagem matemática: o primeiro tipo de dificuldade, Duval chamou de dificuldade local, é relacionada à introdução de um novo procedimento ou de uma nova noção; a segunda tipologia de dificuldade seria a dificuldade global recorrente, que segundo o pesquisador, está relacionada ao raciocínio à resolução de problemas, às habilidades de visualização, ou seja, à transferência de conhecimentos adquiridos ou sua aplicação.

No que se refere aos Três Mundos da Matemática, enfatizaremos a importância do Mundo Corporificado para os participantes e a articulação desse mundo e o Mundo Proceitual Simbólico.

Ao explicarmos a evolução dos alunos durante a intervenção, valemo-nos das características da Teoria do Pensamento Matemático Avançado, no que se refere a transição do pensamento Matemático Elementar para o Avançado.

Capítulo 03

Metodologia da Pesquisa e Procedimentos Metodológicos

Neste capítulo inclui-se a fundamentação e o detalhamento no que diz respeito às opções metodológicas e ao processo heurístico presentes no estudo.

3.1O Design Experiment

O Design Experiment surgiu nos Estados Unidos da América, por volta de 1970. Até esse período, não havia uma metodologia de pesquisa, com raízes na Educação Matemática que fosse capaz de possibilitar ao pesquisador verificar o progresso do estudante frente a uma comunicação matemática interativa.

De acordo com as ideias de Cobb (2003) o Design é uma metodologia que se propõe a analisar processos de aprendizagens de domínios específicos, mas que não pode ser reduzida a ideia de um conjunto de atividades.

Para Cobb, o Design pode ser entendido como uma ecologia complexa, pois é um sistema onde interagem vários elementos de tipos e níveis variados como, por exemplo, as tarefas a serem resolvidas, as formas de participação, o discurso produzido pelos participantes, o material a ser utilizado, etc. Desta forma, são realizadas a concepção desses elementos e a antecipação do seu funcionamento para apoiar a aprendizagem. Neste sentido, podemos entender que o Design é uma ferramenta capaz de lidar com a complexidade do ambiente que é a sala de aula.

Segundo Karrer,

> Uma teoria proveniente do Design Experiment deve explicar como ele funciona e oferecer sugestões de como pode ser adaptado a novas circunstâncias, além das possibilidades de gerar e testar novas hipóteses. Desta forma, este tipo de metodologia é, ao mesmo tempo, pragmático e teórico. (Karrer, 2006, p.197)

O Design é uma metodologia que tem como sua parte essencial um olhar sobre como os alunos falam e fazem, ou seja, é uma metodologia que pressupõe que o foco do investigador está no pensamento matemático dos participantes e nas possíveis modificações que poderão existir durante o processo.

De acordo com Cobb (2003), o Design Experiment pode organizar-se de diversas formas, a saber:

- "One-on-one" (pesquisador-professor- aluno): nessa forma de Design, temos a presença de uma equipe de investigação realizando intervenções em um grupo pequeno de estudantes. O objetivo é obter uma ecologia em pequena escala que se possa estudado em profundidade;
- "Classroomexperiments": que se caracteriza por experiências em sala de aula em que uma equipe de pesquisa colabora com um professor (que pode ser um membro da equipe de pesquisa) para assumir a responsabilidade pela instrução;
- "Preserviceteacherdevelopmentexperiments" no qual uma equipe de pesquisa ajuda a organizar e estudar a formação de futuros professores;
- "In-serviceteacherdevelopmentstudies" em que os pesquisadores colaboram com os professores para apoiar o desenvolvimento de uma comunidade profissional;
- "Schoolandschooldistrictrestructuringexperiments" no qual uma equipe de pesquisadores colabora com os professores, administradores escolares e outras partes interessadas com o apoio organizacional.

Segundo Karrer (1996) independente do foco ao qual se aplica a metodologia do Design, uma das principais características desta metodologia é o fato de que professores, alunos e pesquisadores são vistos como agentes colaboradores do processo, ou seja, o paradigma dos papeis tradicionais desses personagens é rompido.

De acordo com Cobb (2003), o Design possui 5 características que podem ser aplicadas a várias formas de atividade e por isso merecem destaque. A primeira dessas caraterísticas é o fato de que essa metodologia tem como objetivo a construção de um conjunto de teorias sobre o processo de aprendizagem e os meios projetados para dar suporte a essa aprendizagem, seja a aprendizagem de um aluno, de uma sala de aula ou de uma escola. Para o pesquisador, o termo "meios" abrange os artefatos materiais, as práticas de ensino e as formas de mediação.

Cobb considera que o objetivo teórico no caso de um design do tipo one-on-one pode ser o desenvolvimento de um modelo de processo pelo qual os alunos podem atingir uma compreensão mais aprofundada das ideias matemáticas, associando-se os tipos de tarefas propostas e as práticas adotadas pelo professor como elementos que irão apoiar essa aprendizagem.

A segunda característica do Design é a natureza altamente intervencionista dessa metodologia. As pesquisas de Design são bancos de ensaio para a inovação. Sendo assim, a intenção é a investigação de possibilidades para a melhoria educacional, apresentando novas formas de aprendizagem. Um dos fatores que garante o aspecto intervencionista do Design é o fato de que essa metodologia tem por objetivo investigar formas de aprendizagens na busca de mudanças educacionais. Por conta de sua natureza intervencionista, Cobb (2003) nos chama atenção para o fato de que estudos de fenômenos complexos como a aprendizagem, a ecologia dos elementos, impedem a especificação completa de tudo o que acontece durante o processo, sendo assim, faz-se necessária a distinção entre os elementos que efetivamente são alvo da investigação e aqueles que podem ser entendidos como auxiliares no processo. Dessa forma, a utilização de pesquisas já realizadas é fundamental nessa metodologia pois são esses estudos que irão justificar e diferenciar as condições centrais da pesquisa.

Com isso temos o surgimento da terceira característica do Design, ou seja,o Desenvolvimento de Teorias específicas e humildes por investigar sistematicamente as formas de aprendizagem e os meios que as sustentam.

A quarta característica do Design está relacionada ao fato de que o Design sempre tem dois aspectos: o prospectivo e o reflexivo.

Na fase prospectiva, o pesquisador partirá de uma hipótese e a partir do desenvolvimento do Design deverá submeter a hipótese à prova, podendo, a partir dos resultados, ratificá-la ou descartá-la. A partir do descarte da sua hipótese inicial, o pesquisador poderá produzir novas hipóteses que servirão de suporte às novas formas de aprendizagem, ou seja, o aspecto reflexivo. Por exemplo, durante um experimento de design, uma conjetura inicial sobre as características das tarefas realizadas em sala de aula e a resposta dos alunos foi descartada. O próximo passo é a criação de conjecturas alternativas que devem ser novamente testadas. Dessa forma, o Design possui um caráter cíclico, ou seja, o desenho é reformulado de acordo com as informações obtidas. Em relação aos resultados provenientes desse movimento cíclico, Karrer nos afirma que

> (...) os resultados não sejam simples devoluções de informações fornecidas por sujeitos passivos, mas sim, informações decorrentes de interações complexas, adaptações e "*feedbacks*" constantes (KARRER, 1996, p.200).

Segundo Cobb, a iteratividade presente no Design exige do pesquisador uma atenção especial e sistemática em relação a aprendizagem e isso envolve o desenvolvimento de medidas sensíveis à ecologia. O resultado pretendido é um quadro explicativo onde se especificam as expectativas que irão se tornar o foco da investigação durante o próximo ciclo do Design.

A quinta e última característica do Design está relacionada ao seu caráter pragmático e teórico. Pragmático, pois tem atuação direta na sala de aula e teórico, por trazer uma teoria a partir da análise das interações ocorridas no cenário de pesquisa.

3.2 O desenvolvimento Metodológico proposto pelo Design

Ao desenvolvermos um experimento de Design precisamos ter de maneira bastante clara as etapas pelas quais o trabalho será desenvolvido. Devemos inicialmente definir a intenção teórica da pesquisa além de delimitarmos nossos objetivos de investigação. Hipóteses e conjecturas devem ser construídas a partir da interpretação do entendimento inicial dos participantes do experimento.

No desenvolvimento do experimento, não podemos esquecer o caráter cíclico do Design, ou seja, devemos sempre testar nossas hipóteses através da análise do modo de pensar dos estudantes levando-se em consideração as condições onde o experimento está sendo realizado.

Por ser uma metodologia que se apoia na ação dos participantes, é importante que o pesquisador tenha variadas formas de coletar os dados, seja por entrevistas, testes, questionários, filmagens, etc.

O experimento precisa ser realizado em local rico de oportunidades, para que os estudantes tenham "liberdade de ação" e que os pesquisadores possam ter acesso as ações dos participantes buscando entender e analisar criticamente o que foi realizado. O " erro" deve ser encarado como uma fonte de se entender onde o aluno poderá chegar a partir de suas limitações locais.

Como procedimentos metodológicos optamos pela seguinte trajetória, na fase prospectiva:

- ✓ Fazer um levantamento do que já havia sido produzido no contexto da Educação Matemática relacionado ao tema em questão;

- ✓ Considerar o plano de ensino da disciplina Cálculo I, que serviu como referência para o desenvolvimento da pesquisa;

- ✓ Analisar os livros de Cálculo I presentes na ementa dos cursos de engenharia na universidade onde se desenvolveu a pesquisa, na busca por entender o encaminhamento dado em cada obra no que se refere a construção do conceito que investigamos;

- ✓ Entrevistar os professores de Cálculo I, da universidade onde se desenvolveu a pesquisa;

- ✓ Entrevistar alunos que já tenham cursado Cálculo I, II e III no intuito de verificarmos se os mesmos se lembravam do assunto em questão, se saberiam resolver problemas com a temática abordada, a que tipo de recursos eles foram apresentados no momento em que estudaram o conteúdo investigado;

- ✓ Elaborar uma sequência de atividades que nos permitisse explorar o pensar dos alunos em reação ao nosso objeto de estudo;

- ✓ Aplicar a sequência de ensino a grupo de 10(dez) alunos dos cursos de engenharia da universidade onde o estudo se realizou;

- ✓ Analisar os dados obtidos

3.3 Relação entre o presente estudo e o Design Experiment

Como nossa proposta é a de investigar os aspectos cognitivos e conceituais mobilizados na resolução de problemas de otimização por estudantes de engenharia buscamos uma abordagem diferenciada do conteúdo em questão. Essa abordagem será pautada nos ambientes: software Geogebra, materiais manipulativos como barbantes, folhas para dobraduras, além do papel e lápis com o objetivo de explorar as relações entre os ambientes, os registros produzidos, e a investigação sobre as imagens de conceito produzidas.

O foco do presente estudo foi observar como os alunos reagem frente a cada situação desafiadora mediante recursos diferenciados de resolução, e como se dá a construção do conceito a partir da interação entre os sujeitos da pesquisa, dos recursos oferecidos e da sequência de atividades.

Sendo assim, entendemos que precisaríamos de uma metodologia que nos permitisse um olhar sobre o fazer do aluno, além das possiblidades de testar nossas hipóteses e revisitar as atividades cada vez que achássemos necessário, na busca por mudanças significativas no raciocínio dos participantes. Baseando-se nessas prerrogativas entendemos que o Design seria a metodologia ideal.

3.4 O cenário da pesquisa

A instituição escolhida para realização da pesquisa, foi uma universidade privada, localizada na cidade de Campos dos Goytacazes, interior do Estado do Rio de Janeiro. No município de Campos dos Goytacazes encontramos 7 (sete) universidades que oferecem Bacharelado em Engenharia, das quais apenas duas são públicas: uma da rede federal de ensino e outra da rede estadual.

Apresentamos no quadro abaixo os cursos de engenharia presentes em cada Instituição de Ensino Superior do Município.

Instituição	Cursos de Engenharia Oferecido	Quantitativo de cursos
Pública Federal	✓ Engenharia Ambiental; ✓ Engenharia da Computação; ✓ Engenharia Elétrica	03
Pública Estadual	✓ Engenharia de produção e exploração de petróleo; ✓ Engenharia Civil;	03

	✓ Engenharia Metalúrgica	
Particular 1	✓ Engenharia Civil; ✓ Engenharia de Produção; ✓ Engenharia Mecânica	03
Particular 2	✓ Engenharia de Produção;	02
	✓ Engenharia Mecânica	
Particular 3	✓ Engenharia Civil; ✓ Engenharia de Produção	02
Particular 03	✓ Engenharia Civil; ✓ Engenharia de Produção; ✓ Engenharia Mecânica	03
Particular 04	✓ Engenharia Civil; ✓ Engenharia Elétrica; ✓ Engenharia de Produção; ✓ Engenharia de Petróleo; ✓ Engenharia Ambiental	05

Quadro 7: Quantitativo de Cursos de Engenharia por Universidade no Município de Campos dos Goytacazes

Em relação ao número de cursos de engenharia, a universidade na qual foi desenvolvida a pesquisa é a que apresenta a maior diversidade de cursos. Ressaltamos que nessa instituição as disciplinas de Cálculo não são oferecidas por turma e sim por dia da semana, sendo assim, em uma única turma de Cálculo I, por exemplo, podemos ter alunos dos cinco cursos de engenharia oferecidos pela instituição.

Vale destacar que a universidade atende aos alunos do município de Campos dos Goytacazes, municípios circunvizinhos além de alunos de estados vizinhos e outros que ingressaram na universidade por programas federais e que por conta da universidade tiveram que fixar moradia em Campos.

A escolha pela universidade se deu em razão do número de cursos de engenharia oferecidos, pelo quantitativo de alunos e pelo fato do pesquisador ser funcionário da universidade o que acaba por facilitar o acesso às informações, aos laboratórios, aos professores dos cursos, e até mesmo aos alunos das engenharias.

Vale ainda destacar a infraestrutura da universidade que conta com 05 laboratórios de informática além de 05 laboratórios específicos para cada uma das engenharias, 01 para cada uma delas.

3.5 Os participantes da pesquisa

Os participantes da pesquisa foram alunos do bacharelado em Engenharia que durante a intervenção cursavam no mínimo o terceiro semestre da graduação, voluntários, tendo sido escolhidos mediante os seguintes critérios:

- ✓ terem disponibilidade para estarem da universidade aos sábados
- ✓ já terem sido aprovados na disciplina de Cálculo I.

Como a intenção foi observar e analisar os significados construídos por estudantes, quando inseridos em ambientes de ensino de Cálculo Diferencial, levando em consideração a interatividade entre os mesmos, optamos por trabalhar com 10 alunos que possuíssem o perfil retro mencionado, que trabalharam majoritariamente do tempo em duplas.

Antes de escolhermos os 10 alunos que efetivamente participariam da pesquisa, fomos à sala de um professor de Cálculo II, que se propôs a ajudar nessa fase da pesquisa, para convidar os alunos que tivessem interesse em participar das intervenções. A turma era constituída por 54 alunos. O objetivo da pesquisa foi explicado aos alunos e a entrevista inicial foi marcada para sábado dia 22/04/2016, as 9h da manhã numa das salas de aula da universidade onde a pesquisa se desenvolveu. Dos 54 alunos matriculados, 22 compareceram no sábado para a entrevista.

3.6 O ambiente de trabalho e a coleta de dados

Os encontros foram realizados aos sábados e previamente combinados com os participantes do estudo. Para o desenvolvimento da pesquisa, utilizamos um dos laboratórios de informática no qual estavam instalados os softwares utilizados pelos estudantes além de uma sala de aula onde desenvolvemos um ambiente que chamaremos de papel e lápis. Mesmo precisando apenas de 5 computadores, os programas foram instalados nos vinte computadores do laboratório em questão para que se os alunos em algum momento precisassem trabalhar individualmente, pudessem ter acesso aos recursos necessários.

3.7. O plano de ensino da disciplina.

O plano de Ensino é elaborado dentro do contexto do curso, seguindo determinações explícitas do Projeto Pedagógico do Curso e deve conter os elementos, a saber: identificação, objetivos, ementa, conteúdo programático, metodologia, avaliação e bibliografia. Vale destacar a existência de um processo vertical, escalonado e hierarquizado das atribuições e execução do plano de Ensino, que não é feita ao acaso. Essa relação vertical perpassa das Orientações Curriculares para os cursos de Engenharia até a execução do Plano de Disciplina pelo Professor, passando pelo Projeto Pedagógico do Curso e pelo Programa da Disciplina.

Nos anexos apresentaremos o plano de ensino de Cálculo I da universidade onde a pesquisa se efetivou. Vale destacar que a disciplina de Cálculo I é oferecida em turmas que reúnem alunos das 05 modalidades do curso de Engenharia da Universidade, o que justifica a existência de um único plano de ensino para todos as modalidades.

3.8 Os livros didáticos

Como o objetivo geral do presente estudo é analisar os aspectos cognitivos e conceituais mobilizados na resolução de problemas de otimização por estudantes de engenharia, entendemos ser importante analisar como esse objeto matemático é apresentado aos alunos. Para tanto, optamos por examinar os livros presentes nas ementas da disciplina de Cálculo I, da universidade onde a pesquisa se desenvolveu, respeitando assim, a edição indicada.

A Tabela 1 indica as obras, seus autores e o ano de edição de cada um dos livros presentes na ementa.

Tabela 1: Livros presentes na Ementa de Cálculo I

Nome da Obra/Autor	Ano de Edição	Editora
O Cálculo com Geometria Analítica – Louis Leithold – Volume 1.	1994	Harbra
Cálculo A– Diva Marília Flemming e MíriamBuss Gonçalves — Volume Único	1992	EditoraMakron Books
Cálculo - James Stewart - Volume 1.	2006.	Cengage Learning
Cálculo I – Mustafa A. Munem e David J. Foulis.	1982	LTC
Cálculo um curso moderno e suas aplicações, Hoffmann Laurence e Bradley Gerald.	2008	LTC

Fonte: Ementa da Disciplina

Optamos por apresentar,num capítulo a seguir, o exame mais detalhado das obras, no que se refere ao nosso objeto de estudo.

3.9 Os instrumentos utilizados para a coleta de dados

Como previsto nos procedimentos metodológicos, realizamos entrevistas com os alunos que seriam os participantes da pesquisa, entrevistamos alunos que já cursaram as disciplinas de Cálculo e também entrevistamos com os professores de Cálculo I, todos da universidade onde a pesquisa se desenvolveu.

Quando entrevistamos os alunos que seriam os participantes da pesquisa, tínhamos como objetivo, além de obtermos informações gerais sobre eles, obter dados a respeito de seus conhecimentos a respeito de nosso objeto de investigação. Sendo assim, optamos por dividir a entrevista em duas partes: a primeira parte contendo informações gerais a respeito dos entrevistados, tanto como informações pessoais como acadêmicas e uma segunda parte contemplando uma atividade diagnóstica.

Uma vez entrevistados os sujeitos da pesquisa, decidimos também entrevistar os professores de Cálculo I. Um dos objetivos da entrevista foi verificar quais recursos metodológicos eles utilizavam em suas aulas sobre pontos críticos de funções de uma variável. Outro objetivo estabelecido foi o de verificar se os professores trabalhavam com problemas de otimização e qual a importância dada a esse tema.

Durante a análise das entrevistas com os futuros participantes, percebemos que muitos não se recordavam do trabalho em sala de aula com pontos críticos, sendo assim, decidimos por entrevistas alunos que já haviam cursado todas as disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral do bacharelado para verificarmos se tal fato também aconteceria com eles.

Para conseguirmos atingir o objetivo geral do trabalho, optamos por elaborar um conjunto de atividades para serem desenvolvidas com os alunos participantes da pesquisa.

Como um dos objetivos específicos da pesquisa foi o de investigar como os alunos interagem frente às diferentes alternativas de resolução dos problemas oferecidos pela sequência de ensino, a saber: calculadoras, esboço de gráficos, técnicas operatórias, uso de entendemos que as intervenções deveriam prever tais possibilidades de recursos.

Sendo assim, optamos inicialmente por dividirmos as atividades em três etapas. Uma primeira etapa onde trabalhamos no ambiente de papel e lápis, uma segunda etapa onde o uso da tecnologia é indispensável e uma terceira etapa onde o aluno fica “livre” para escolher a forma pela qual vai conduz a resolução das atividades propostas.

Gostaríamos ainda de destacar que o planejamento das atividades foi norteado pelo exame dos livros didáticos e pelas informações obtidas a partir das entrevistas feitas com docentes e estudantes e da atividade diagnóstica proposta na segunda parte da entrevista com os alunos. A documentação das entrevistas encontra-se nos anexos.

3.10 As atividades

Apresentaremos, a seguir, uma breve descrição de cada uma das atividades que compuseram a organização dos encontros e seus respectivos objetivos. As análises e comentários a respeito de cada uma delas serão feita num capítulo específico.

Para facilitar a compreensão do leitor a respeito do percurso metodológico do presente estudo, apresentaremos a seguir um cronograma de cada uma das etapas que compuseram o design da realização da pesquisa.

- ✓ **22/04/2016**

Realização de Entrevistas com os candidatos a participantes da pesquisa.

Dos 54 inscritos,22 compareceram para a entrevista com o pesquisador. A entrevista foi do tipo questionário e objetivou a obtenção das seguintes informações:

- Curso;
- Trabalha?
- “tipo” de escola onde cursou o Ensino Médio
- Já estudou ponto crítico de uma função de uma variável real?
- Já estudou otimização?
- Quais os principais recursos didáticos os professores usavam durante suas aulas de Cálculo?

Tivemos também como objetivo verificar ainda se os participantes seriam capazes de resolver, de forma satisfatória, dois problemas de otimização: um bastante elementar e o outro um pouco mais sofisticado.

Destacamos que o questionário inicial, na íntegra, consta nos anexos do presente estudo.

- ✓ **27/04/2016**

Entrevista com os professores

Foram entrevistados 05 professores que no semestre em que a pesquisa foi desenvolvida estavam ministrando a disciplina de Cálculo1, com o objetivo de obter uma visão panorâmica a respeito dos professores, no que se refere à sua formação, tempo de magistério na disciplina de Cálculo 1 e suas concepções a respeito do nosso objeto de pesquisa.

- ✓ **12/05/2016**

Entrevista com estudantes veteranos

Após verificarmos os dados dos alunos envolvidos na pesquisa, optamos por verificar como seriam as respostas dadas por alunos que já estavam na fase final do curso. Foram entrevistados 08 alunos do 8º semestre. Vale destacar que o questionário aplicado a esses alunos foram as mesmas aplicadas aos participantes da pesquisa.

- ✓ **28/05/2016**

  Encontro com participantes da pesquisa para discussão dos resultados da atividade diagnóstica

- ✓ **11/06/2016**

  - Realização da primeira intervenção.

- ✓ **18/06/2016**

  - Realização do primeiro feedback com os participantes da intervenção.

- ✓ **22/06/2016**

  - Realização da segunda intervenção.

- ✓ **25/06/2016**

  - Realização do feedback da segunda intervenção.

- ✓ **29/06/2016**

  - Realização de uma oficina na qual revisitamos tópicos da geometria plana, como as propriedades de tangência e áreas além de razões trigonométricas no triângulo retângulo e redução ao primeiro quadrante.

✓ **02/07/2016**

- Realização da terceira intervenção

✓ **13/07/2016**

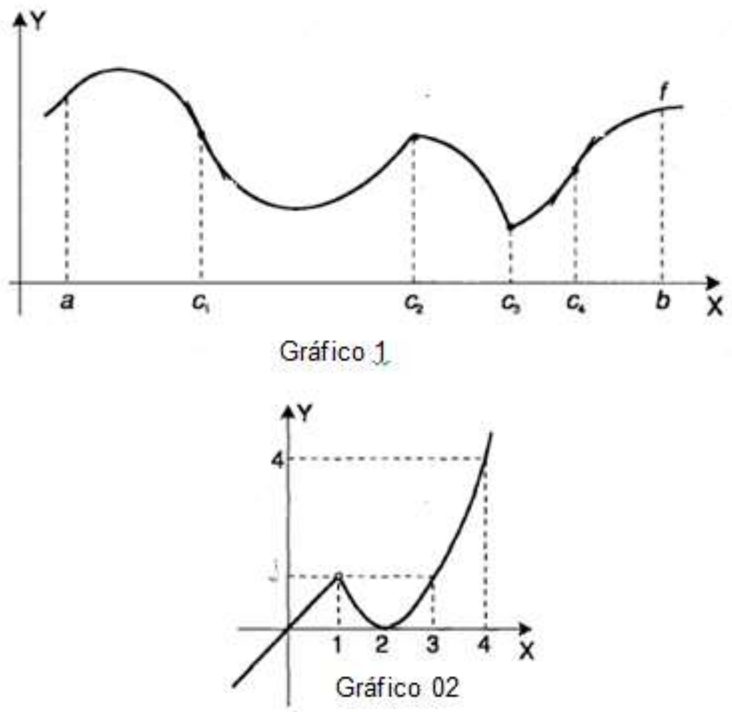
- Entrevista com alunos a respeito da opinião dos mesmos a respeito dos encontros e sobre a funcionalidade dos problemas de otimização enquanto motivador para o estudo do Cálculo.

Apresentaremos a seguir o conjunto de atividades propostas nas intervenções.

Intervenção 01 : 11/06/2016

✓ Atividade 01

Observe os gráficos abaixo:



a. Em cada gráfico, indique os "locais" onde a função é crescente ou decrescente.
b. Quais informações você usou para chegar a sua reposta?

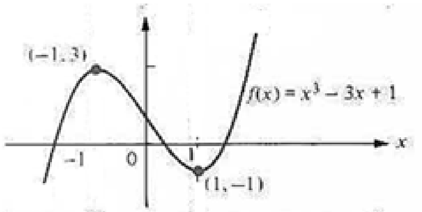
Figura 15: Atividade 01, Intervenção 01
Fonte: Sequência de atividades

Objetivo: Verificar se os participantes eram capazes de identificar, a partir da análise da representação gráfica de uma função, em que “locais” essa função era crescente ou decrescente. Optamos pela nomenclatura “locais” para propiciar aos participantes a possibilidade de responder a questão no próprio gráfico.

- ✓ Atividade 02

Atividade 02

Observe o gráfico abaixo:



- ✓ Essa função possui ponto máximo? ______________________
- ✓ Em caso afirmativo, qual é esse ponto? ______________________
- ✓ Essa função possui ponto mínimo?______________________
- ✓ Em caso afirmativo, qual é esse ponto? ______________________

Quais são os dados ou fatos que permitiram você responder os itens anteriores?

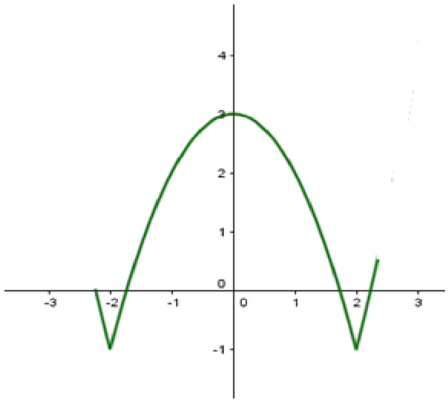
Figura 16: atividade 02, intervenção 01
Fonte: Sequência de atividades

Objetivo: Verificar se os participantes seriam capazes de determinar os pontos de máximo e/ou mínimo de uma função a partir de sua representação gráfica e da lei de formação, além de investigar a estratégia utilizada por cada um deles para responder a questão proposta.

- ✓ Atividade 03

Atividade 03

Observe o gráfico abaixo:



- ✓ Essa função possui ponto máximo? ____________________
- ✓ Em caso afirmativo, indique no gráfico.
- ✓ Essa função possui ponto mínimo?____________________
- ✓ Em caso afirmativo, indique no gráfico

Quais são os dados ou fatos que permitiram você responder os itens anteriores?

Figura 17: atividade 03, intervenção 01
Fonte: Sequência de atividades

Objetivo: Verificar se os participantes seriam capazes de determinar os pontos de máximo e/ou mínimo de uma função, exclusivamente a partir de sua representação gráfica, além de investigar a estratégia utilizada por cada um deles para responder a questão proposta.

- ✓ Atividade 04

Atividade 04

Resolva o problema abaixo, da maneira que achar mais conveniente. Não se esqueça de deixar indicada a maneira como você chegou ao resultado.

Considere dois números naturais cuja soma seja 8. Quais deles tem produto máximo?

Figura 18: Atividade 04, intervenção 01
Fonte: Sequência de atividades

Objetivo: Investigar que estratégias os alunos utilizam no momento de resolver um problema "clássico" de otimização. Buscávamos também, investigar, se os estudantes, recordavam-se das técnicas empregadas nas aulas de Cálculo I, para resolver o problema proposto.

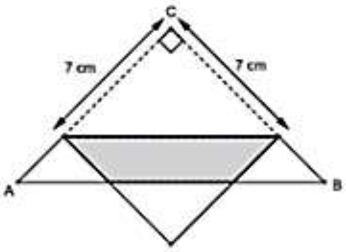
✓ Atividade 05

Atividade 06

Propriedades importantes do triângulo retângulo isósceles:

a) Esse triângulo é a metade de um quadrado;

b) Uma paralela a qualquer dos lados do triângulo retângulo isósceles corta os outros dois lados determinando um novo triângulo retângulo isósceles.



Problema: (OBMEP 2013 - N3-2ª fase)

A figura mostra um triângulo de papel *ABC*, retângulo em *C* e cujos catetos medem 10 cm. Para cada número *x* tal que $0 \leq x \leq 10$, marcam-se nos catetos os pontos que distam *x* cm do ponto *C* e dobra-se o triângulo ao longo da reta determinada por esses pontos. Indicamos por $f(x)$ a área, em cm², da região onde ocorre sobreposição de papel.
Por exemplo, na figura ao lado, a área da região cinzenta é $f(7)$.

a) Calcule $f(2)$, $f(5)$ e $f(7)$.

b) Escreva as expressões de $f(x)$ para $0 \leq x \leq 5$ e $5 \leq x \leq 10$.

c) Faça o gráfico de $f(x)$ em função de *x*.

d) Determine o maior valor possível para a área da região de sobreposição.

Figura 19: Atividade 05, intervenção 01
Fonte: Sequência de atividades

Objetivos: Com essa questão os pesquisadores tinham por objetivo verificar quais os procedimentos utilizados para a resolução de um problema de otimização no cenário da Geometria Plana, e, em especial, no item d.

<u>Intervenção 02 : 22/06/2016</u>

Atividade 01:

Construa um retângulo com 8cm de perímetro. Agora construa novos retângulos conservando o perímetro. Anote as novas áreas. Em que caso a área foi máxima?

Figura 20: Atividade 01, intervenção 02
Fonte: Sequência de atividades

Objetivo: Verificar as estratégias de resolução de um problema de otimização, onde o domínio da função não seja um conjunto finito e discreto, como acontecia nos problemas similares a esse, tanto na atividade diagnóstica quanto na intervenção 01.

- ✓ Atividade 02

Atividade 02

Esboce e encontre, quando existirem, os extremos das funções abaixo, bem como os pontos onde eles ocorrem. Justifiquem seus procedimentos e escolhas.

a) $f(x)=x^2-x+5,\ 0\le x\le 10$ b) $f(x)\ x^3+x,\ -1\le x\le 5$ c) $f(x)=xe^{-x},\ 0\le x\le 7$

Figura 21: Atividade 02, intervenção 02
Fonte: Sequência de atividades

Objetivo: analisar o processo de construção do conceito de extremos de uma função de variável real, com funções que não fossem polinomiais e com funções não polinomiais além de não abandonarmos a ideia da utilização de alternativas de resolução que não fossem o papel e o lápis.

- ✓ Atividade 03

Atividade 03

Imagine que você tem 140 cm de barbante para construir um quadrado e um retângulo. No retângulo, a medida da base deve ser o triplo da largura. Se a soma das áreas das figuras deve ser a menor possível, qual deve ser a área do quadrado.

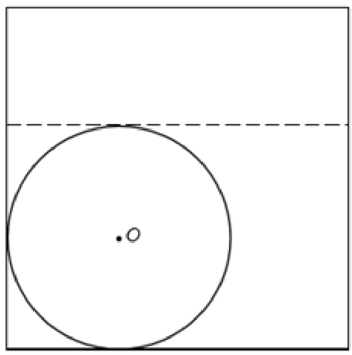
Figura 22: Atividade 03, Intervenção 01
Fonte: Sequência de atividades

Objetivo: Verificar quais as estratégias seriam mobilizadas pelos alunos, frente a um problema de otimização, que pode ser associado a uma função de variável real, com domínio formado por valores discretos e que para a sua modelagem, fosse necessária a utilização de conceitos, ainda que elementares, da Geometria Plana.

Intervenção 03 : 02/07/2016

- ✓ Atividade 01

Um quadrado de 4 cm de lado é dividido em dois retângulos. Em um dos retângulos, coloca-se um círculo, de raio R, tangenciando dois de seus lados opostos, conforme a figura a seguir.



a) Escreva uma expressão que represente a soma das áreas do círculo e do retângulo, que não contém o círculo, em função de R.

b) Qual deve ser o raio do círculo, para que a área pedida no item anterior seja a menor possível?

Figura 23: Atividade 01, Intervenção 03
Fonte: Sequência de atividades

Objetivo:

Com essa atividade, tínhamos dois objetivos:

1º)Verificar que estratégias seriam mobilizadas pelos participantes para modelar uma situação diretamente condicionada a algumas ideias da Geometria Plana, a saber: propriedades de tangência, área de um retângulo e área de um círculo.

2º)Investigar que procedimentos foram utilizados pelos participantes para otimizar uma função polinomial do segundo grau onde o coeficiente de x^2 seja o número irracional π .

✓ Atividade 02

2. Um fabricante de caixas de papelão pretende fazer caixas sem tampas a partir de folhas quadradas de cartão com área igual a $576cm^2$, cortando quadrados iguais nos quatro cantos e dobrando os lados para cima.

a) Escreva a função volume da caixa;
b) Represente graficamente a função volume;
c) Determinar o lado do quadrado que deve ser cortado para se obter uma caixa com o maior volume possível.

Figura 24: Atividade 02, intervenção 03
Fonte: Sequência de atividades

Objetivos:

Com essa atividade, tínhamos dois objetivos:

1º) Investigar as estratégias utilizadas pelos participantes para modelar uma situação no cenário da Geometria Espacial, a saber, volume de um paralelepípedo.

2º) Identificar e analisar os procedimentos adotados por cada participante para otimizar uma função polinomial de terceiro grau completa.

✓ Atividade 03

Você está recebendo um pedaço de barbante de comprimento L. Você deve dividir esse barbante em duas partes. Com o primeiro pedaço você deverá construir um quadrado. Com o pedaço restante um círculo. Determinar o ponto em que se deve cortar o arame para que a soma das áreas geradas pelo quadrado e do círculo seja mínima.

Figura 25: Atividade 03, intervenção 03
Fonte: Sequência de atividades

Como a atividade 03, da intervenção 02 foi uma atividade que promoveu bastante discussão e interesse por parte dos participantes, optamos por retomar ocenário anterior porém apresentando um contexto mais complexo do que o problema anterior.

Objetivo:

Com essa atividade, tínhamos dois objetivos:

1º) Investigar as estratégias utilizadas pelos participantes para modelar uma situação onde não temos dados numéricos, ou seja, temos informações estritamente algébricas.

2º) Verificar as estratégias utilizadas, ou seja, quais dos cenários oferecidos os participantes iriam optar em usar, bem como eles foram utilizados.

✓ Atividade 04

Uma calha deve ser construída com uma folha de metal de largura 30cm, dobrando-se para cima 1/3 da folha para cada lado, fazendo um ângulo θ com a horizontal.

a) Determine a função que permite otimizar a capacidade da calha em função do ângulo θ.

b) Qual deve ser o valor de θ de modo que a capacidade da calha em armazenar água seja máxima.

Registre no espaço abaixo, todas as suas observações e/ou escolhas de resolução.

Figura 26: Atividade 04, intervenção 03
Fonte: Sequência de atividades

Com essa atividade, tínhamos dois objetivos:

1º) Investigar as estratégias utilizadas pelos participantes para modelar uma situação condicionada a conhecimentos de Geometria Espacial e Trigonometria.

2º) Verificar as estratégias utilizadas, ou seja, quais dos cenários oferecidos os participantes iriam optar para a solução, bem como que recursos foram utilizados.

O presente estudo tem como interesse investigar os aspectos cognitivos e conceituais mobilizados na resolução de problemas de otimização por estudantes de engenharia. Para, além disso, pretendemos também verificar como os alunos interagem frente às diferentes alternativas de resolução dos problemas oferecidos pela sequência de ensino, e também verificar se uma proposta de ensino de funções baseada em problemas de otimização é capaz de despertar no aluno o gosto e interesse pelo estudo do Cálculo Diferencial.

Portanto, procuramos elaborar um conjunto de atividades que perpassassem por todos os cenários de possibilidades de resolução. Destacamos também que uma das preocupações na elaboração das atividades foi que estas atividades despertassem nos participantes a vontade de resolver, ou seja, de interagir sobre a situação proposta, e não de simplesmente reproduzir procedimentos utilizados anteriormente de forma automatizada.

Também procuramos criar situações problema que favorecessem a articulação entre vários esquemas e representações como sugerido pelos teóricos que sustentaram o presente estudo.

Para respondermos a questão relacionada a funcionalidade dos problemas de otimização como elemento motivador para o ensino de Cálculo I, elaboramos uma entrevista que foi realizada com os participantes após a realização da intervenção.

Capítulo 04

Análise dos Livros Didáticos presentes nas Ementas.

Se estamos preocupados em entender os aspectos cognitivos e conceituais mobilizados na resolução de problemas de otimização por estudantes de engenharia, acreditamos ser importante verificar como essa construção ocorre, nos livros didáticos usados em sala de aula pelo professor de Cálculo, bem como daqueles que se fazem presentes nas ementas da disciplina de Cálculo I na universidade onde a pesquisa se desenvolve.

Examinarmos os livros didáticos de Cálculo adotados porque acreditarmos que o livro didático se constitui uma das ferramentas imprescindíveis na prática docente do professor, sendo assim, merece um olhar cuidadoso. Outro ponto a ser considerado em relação ao livro didático é o fato de que quando o professor trabalha, acaba por corroborar as ideias do autor, sua forma de apresentar o conteúdo e até mesmo sua forma de entender como se dá o processo de ensino de aprendizagem das ideias do Cálculo.

Desta forma, considerando os objetivos propostos pela nossa pesquisa, focaremos nosso olhar em como cada obra conduz a construção do conceito de derivada, como se apresenta a proposta de ensino de Máximos e Mínimos de funções nos problemas de otimização e suas possíveis articulações.

Os livros de Cálculo selecionados são os livros presentes nas ementas do ciclo básico das engenharias da universidade onde o estudo está sendo desenvolvido.

Os critérios que nortearam a seleção dos dados em cada livro foram:

- a forma como cada um dos objetos matemáticos é apresentada;
- o desenvolvimento da teoria ;
- a existência e/ou articulação entre as alternativas metodológicas para o desenvolvimento do tema em estudo;

Além das categorias que acabamos de mencionar, nos preocupamos também em categorizar os livros analisados a partir dos constructos teóricos que fundamentam nosso estudo. Apresentamos a seguir, que aspectos, de cada teoria iremos investigar nos livros.

TEORIA DAS REPRESENTAÇÕES SEMIÓTICAS

Utilização de Representações Semióticas
Favorecimento da Construção Imagens Mentais
Tratamentos
Conversões
Explicitação das Unidades de Sentido
Atividades / Exemplos que favoreçam a mobilização de Registros semióticos
Atividades / Exemplos nos quais se evidenciem aspectos de Congruência

Quadro 8: Aspectos teóricos presentes nos livros de Cálculo

TRÊS MUNDOS DA MATEMÁTICA

Presença de Aspectos do Mundo Corporificado
Presença de Aspectos do Mundo Simbólico
Presença de Aspectos do Mundo Formal
Atividades/ Exemplos que favoreçam a articulação entre os trêS Mundos da Matemática

Quadro 9: Aspectos teóricos presentes nos livros de Cálculo

TEORIA DO PENSAMENTO MATEMÁTICO AVANÇADO

Atividades / Exemplos que favoreçam a articulação entre Imagem e Definição de Conceito
Atividades/ Exemplos que estimulem a visualização
Atividades /Exemplos que estimulem a representação Mental
Atividades/ Exemplos que estimulem a Representação Simbólica
Atividades/ Exemplos que estimulem a Mudança de representações
Atividades/ Exemplos que estimulem a modelação
Atividades/ Exemplos que estimulem a sintetização

Quadro 10 : Aspectos teóricos presentes nos livros de Cálculo

Os cinco livros presentes nas ementas e que serão analisados são:

1) **O Cálculo com Geometria Analítica** – Louis Leithold – Volume 1. São Paulo: Harbra, 1994;

2) **Cálculo A** – Diva Marília Flemming e MíriamBuss Gonçalves – Editora Makron Books – Volume Único – São Paulo – 1992;

3) **Cálculo** - James Stewart - Volume 1. São Paulo: Cengage Learning, 2006.

4) **Cálculo I** – Mustafa A. Munem e David J. Foulis, Rio de Janeiro, LTC, 1982.

5) **Cálculo um curso moderno e suas aplicações,** Hoffmann Laurence e Bradley Gerald, LTC, 2008.

Passemos ao exame de cada um dos livros presentes nas ementas.

Livro 01: O Cálculo com Geometria Analítica

Para analisar como o autor o trabalho com o estudo do comportamento de uma função de uma variável real, optamos por inicialmente observar como o conceito de derivada foi apresentado. No capítulo 3 - A Derivada e a Derivação - após observar que interpretações da derivada como taxa de variação na Física, na Química e na Biologia, a derivada é definida após a discussão do conceito de coeficiente angular da reta tangente a uma curva dada em um de seus pontos.

A partir dessa definição, Leithold continua o trabalho com as derivadas, e discute a relação entre a continuidade e a diferenciabilidade, sempre optando pela mesma postura metodológica: a definição do conceito, seguida da apresentação dos teoremas e suas demonstrações, acompanhados de alguns exemplos e contraexemplos. São também demonstradas as regras de derivação.

As representações gráficas e/ou algébricas, durante todo o capítulo são usadas tanto para ilustrar o conceito como para ilustrar os contra exemplos, como observamos na figura 27que se segue:

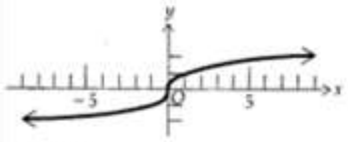


FIGURA 7

► **ILUSTRAÇÃO 3** Seja a função f definida por

$$f(x) = x^{1/3}$$

O domínio de f é o conjunto de todos números reais.

$$f'(x) = \frac{1}{3x^{2/3}} \quad \text{se } x \neq 0$$

Além disso, $f'(0)$ não existe. A Figura 7 mostra um esboço do gráfico de f. A função não tem extremos relativos. ◄

Figura 27: Ilustração no 7, Fonte: Leithold

Podemos observar que do ponto de vista da construção do conceito, o trabalho inicial proposto para o estudo das derivadas segue um processo pautado em representações gráficas das retas tangentes a uma função dada, e o conceito de derivada é estabelecido a partir de uma definição formal associada à situação geométrica. A taxa de variação é introduzida a partir do conceito de velocidade média, e a derivada é retomada enquanto velocidade instantânea; por meio de outros exemplos, é identificada, por exemplo, ao custo marginal. Outros contextos e problemas relacionados à derivada são apresentados nas séries de exercícios propostos ao longo do capítulo.

Outro fator que nos chamou atenção foi o fato de durante todo o trabalho inicial com as derivadas, o autor evocar definições pré-estabelecidas e saberes prévios para que os alunos compreendessem esta nova informação, como, por exemplo, as ideias de taxa de variação, reta tangente, e em especial as propriedades dos limites.

Do ponto de vista da teoria do Pensamento Matemático Avançado, um conceito matemático deve ser compreendido pelo estudante a partir das impressões do objeto matemático, para que esse estudante desenvolva uma familiaridade com o conceito. Essa familiaridade virá por meio de experiências variadas do estudante com o objeto, sendo assim, podemos concluir que o conceito não deve ser trabalhado apenas por meio da sua definição formal.

Tall e Vinner (1981) destacam que para que um conceito seja adquirido por um indivíduo é necessário que se forme uma imagem de conceito do mesmo. Apenas a definição de conceito (a definição formal) poderá não dar garantias para a verdadeira compreensão do conceito.

A transição do pensamento matemático elementar para o avançado deve ser pautada pelas observações e ações do sujeito sobre o objeto, que precisam ser internalizadas constituindo os proceitos.

Encontramos no capítulo 4 – Valores Extremos das Funções, Técnicas de Construção de Gráficos e a Diferencial, o encaminhamento do estudo dos pontos críticos de uma função. O autor opta por iniciar pelos conceitos de valor máximo e mínimo relativos (também chamados extremos relativos) de uma função estabelecidos por meio de definições formais, seguidas da análise de alguns exemplos. Novamente explora os aspectos associados à reta tangente – agora observando que ela, nos pontos críticos, deve ser uma reta horizontal, como vemos na figura 28.

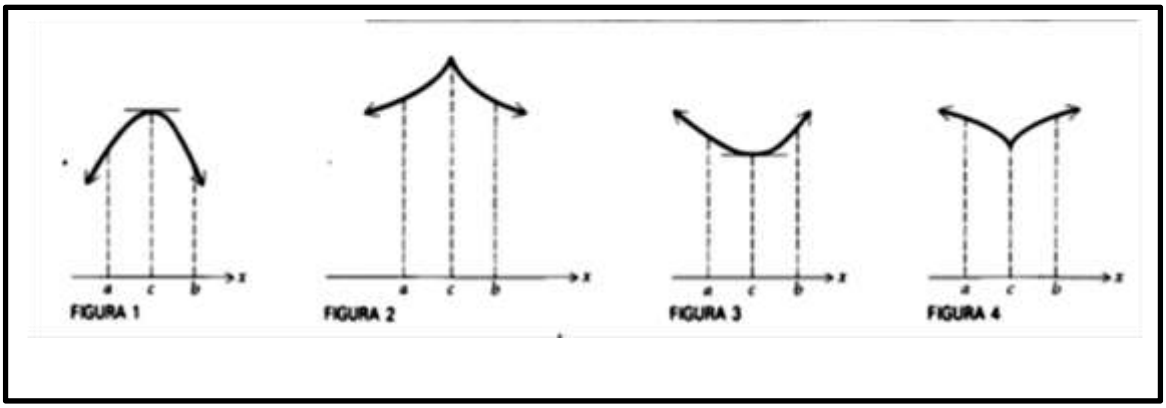


Figura 28: Máximos e Mínimos, uma introdução. Fonte: Leithold

Tall e Vinner nos afirmam que "a compreensão de um conceito está condicionada a formação de uma imagem" e ao observarmos o trabalho desenvolvido por Leithold, no que se refere à construção de valor Máximo e mínimo de uma função, nos deparamos com a apresentação dos objetos feita inicialmente por meio das definições, em detrimento de uma abertura de possibilidades para a formação das imagens de conceito.

Dessa forma, mesmo sabendo que a definição é um dos componentes da imagem de conceito, um método de trabalho que opte por iniciar pela definição formal poderá favorecer o empobrecimento das imagens de conceito do objeto em questão.

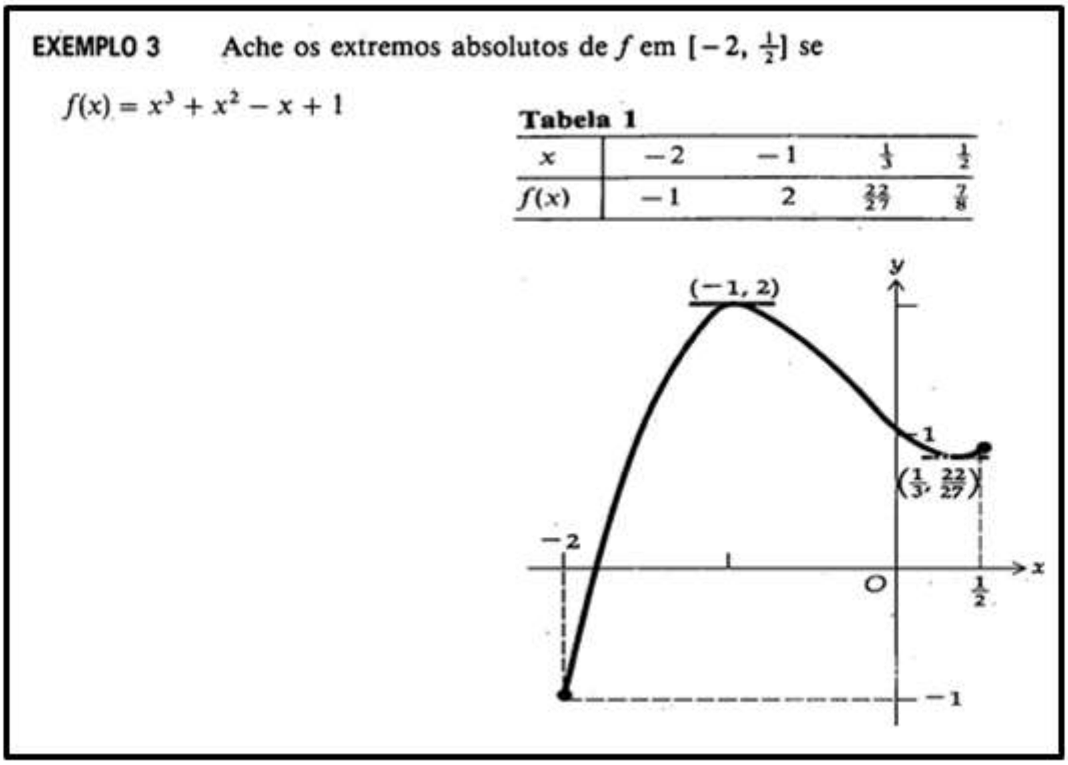
Outro ponto a se considerar é o fato da linguagem formal, na maioria dos casos, não ser facilmente acessível à compreensão dos alunos. Informações posteriores podem colaborar para melhorar a situação, mas a aquisição do conhecimento não faz o percurso natural, como considerado por Tall.

O conceito de número crítico de uma função é definido como sendo o número do domínio da função onde a derivada se anula ou onde a derivada inexiste.

Uma vez definido número critico de uma função, são apresentados exemplos cujo objetivo é levar o aluno a trabalhar com as ideias de máximos e mínimos de funções em um intervalo fechado e identificar os chamados valores extremos de uma função no intervalo considerado.

Para o estudo destes exemplos, são considerados três tipos de representações: a representação algébrica, a representação gráfica e a representação tabular de alguns exemplos de funções.

Observemos, a figura 29,um dos exemplos de Leithold:



EXEMPLO 3 Ache os extremos absolutos de f em $[-2, \frac{1}{2}]$ se

$f(x) = x^3 + x^2 - x + 1$

Tabela 1

x	-2	-1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$
$f(x)$	-1	2	$\frac{22}{27}$	$\frac{7}{8}$

Figura 29: Exemplo de exercício sobre extremo absoluto. Fonte: Leithold

No exemplo retro mencionado observamos a articulação entre a representação gráfica da função, e uma tentativa de congruência entre a representação tabular e gráfica no que se refere ao ponto Máximo e Mínimo da função.

Na série de exercícios encontramos propostas que repetem os tipos de exemplos estudados no texto. Segue-se um parágrafo dedicado ao estudo de problemas relacionados a situações cotidianas ou formulados em distintas áreas de conhecimento, problemas estes que devem ser relacionadas à uma função adequada, cujo estudo dos pontos extremos leva à informação procurada.

Observemos as figuras 30 e 31 ,alguns desses exemplos

EXEMPLO 2 Um campo retangular à margem de um rio deve ser cercado, com exceção do lado ao longo do rio. Se o custo do material for de $12 por metro linear no lado paralelo ao rio e de $8 por metro linear nos dois extremos, ache o campo de maior área possível que possa ser cercado com $3600 de material.

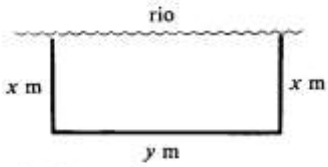


FIGURA 4

Figura 30: Problema de otimização, Fonte: Leithold

EXEMPLO 3 Ao planejar um restaurante, estima-se que se houver de 40 a 80 lugares, o lucro bruto diário será de $16 por lugar. Se, contudo, o número de assentos for acima de 80 lugares, o lucro bruto diário por lugar decrescerá de $0,08 vezes o número de lugares acima de 80. Qual deverá ser o número de assentos para que o lucro bruto diário seja máximo?

Figura 31: Problema de otimização, Fonte: Leithold

Podemos observar que durante o trabalho com os pontos de máximo e mínimo de uma função, o autor adota uma postura de exploração dos conceitos previamente definidos por meio das representações, e dos tratamentos e conversões entre essas representações.

Após serem apresentados problemas de aplicação envolvendo extremos absolutos num intervalo fechado, são apresentados ao aluno o teorema de Rolle e o teorema do Valor Médio.

Inicia-se a discussão a respeito do Teorema de Rolle e o teorema do Valor Médio é apresentado como sendo um caso particular do Teorema de Rolle. O autor inicia o teorema, por meio de uma interpretação geométrica sobre as condições iniciais dadas pelas hipóteses, ou seja, f ser uma função contínua no intervalo [a,b] ; derivável no intervalo] a, b[e ainda que $f(a) = 0$ e $f(b) = 0$.

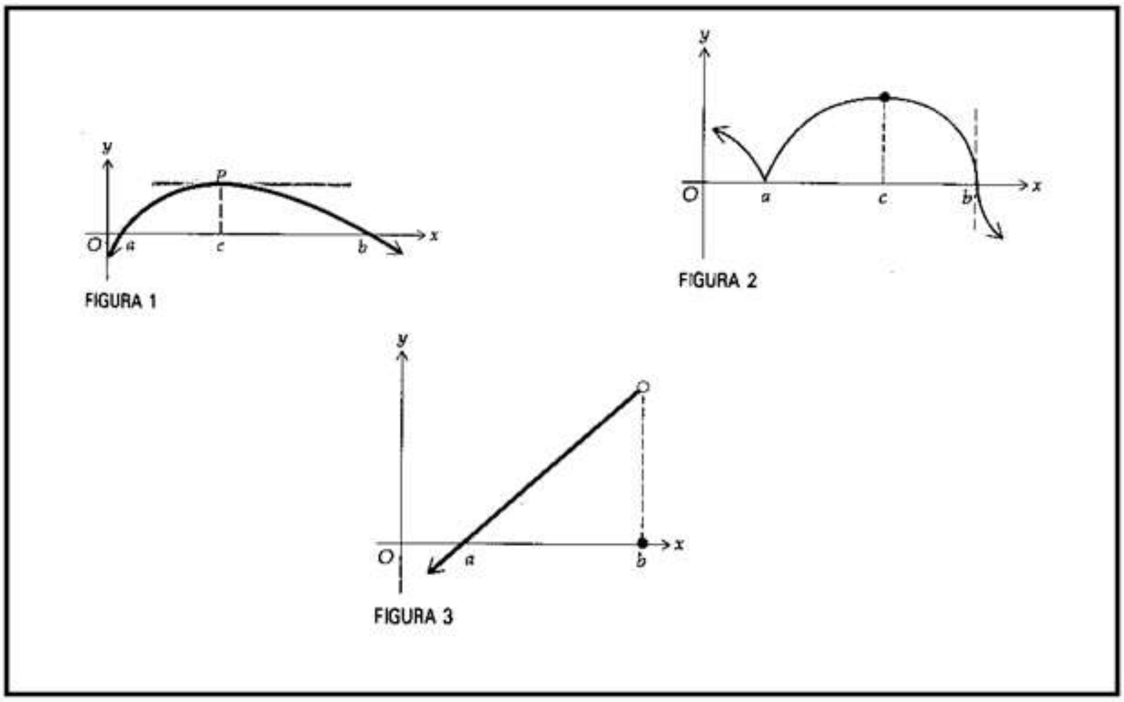


Figura 32:Interpretação geométrica das condições de existência do teorema do valor médio. Fonte: Leithold

Na tentativa de ilustrar a existência de um valor pertencente ao intervalo considerado, no qual a derivada seria nula, optou-se por determinar um ponto no gráfico onde a reta tangente seria horizontal, ou seja, a inclinação da reta tangente seria zero, o que nos levaria a concluir que nesse ponto f ‘ = 0.

Ainda durante a análise dos gráficos, enfatiza-se a ideia de que a condição da função ser derivável nos extremos não é necessária para a existência do ponto onde a derivada seja nula, porém a condição da função ser contínua nos extremos do intervalo é uma condição necessária. A seguir, o teorema é enunciado formalmente, seguindo-se de um exemplo de aplicabilidade do teorema de Rolle.

O teorema do Valor médio é apresentado logo a seguir, como uma particularidade do teorema do Rolle e assim como o primeiro, este já é enunciado e demonstrado.

Os exercícios propostos têm todos as mesmas características, ou seja, comprovação das hipóteses do teorema e a determinação do valor “c” adequado.

Chamou-nos atenção o exercício abaixo:

32. O inverso do teorema de Rolle não é válido. Dê um exemplo de uma função para a qual a conclusão do teorema de Rolle é verdadeira e para a qual (a) a condição (i) não está satisfeita, mas as condições (ii) e (iii) estão; (b) a condição (ii) não está satisfeita, mas as condições (i) e (iii) estão; (c) a condição (iii) não está satisfeita, mas as condições (i) e (ii) estão. Faça um esboço do gráfico, mostrando a reta tangente horizontal em cada caso.

Figura 33 :Atividade sobre o teorema de Rolle. Fonte: Leithold

Destacamos um ponto que consideramos importante nesse exercício: o fato dele proporcionar aos alunos uma oportunidade discutir as condições do teorema e a partir dessa discussão promover o desenvolvimento cognitivo e uma ligação conceitual entre os métodos visual-espacial e manipulativo simbólico, base do desenvolvimento do pensamento matemático avançado.

Deve-se ainda destacar a importância do o teorema do Valor Médio, pois sem a abordagem desse tema não se consegue verificar o principal critério para estudar a variação das funções, ou seja, compreender a relação entre o sinal da derivada e o crescimento ou decrescimento da função, informação necessária se quer se fazer a identificação dos pontos críticos.

Uma vez construído o conceito de ponto Máximo e /ou Mínimo de uma função, vamos analisar como se desenvolve a ideia de crescimento e decrescimento de uma função.

Novamente o conceito matemático é apresentado por meio de uma definição formal, seguido de representações gráficas utilizadas para identificar os elementos presentes na definição formal de função crescente ou decrescente.

A associação entre crescimento e decrescimento de uma função e a sua derivada de primeira ordem, é apresentada inicialmente na forma de um registro em linguagem natural, composta por um texto e de um gráfico -o que Duval chamou de “operação de formação do registro” - numa tentativa de se propor uma análise do comportamento local da reta tangente a partir das informações algébricas e as correspondências com o sinal da derivada.

Observe como o objeto é apresentado:

> Antes de enunciar um teorema que dá um teste para determinar se uma dada função é monótona* num intervalo, vejamos o que está acontecendo geometricamente. Consulte a Figura 1 e observe que quando a inclinação da reta tangente for positiva, a função será crescente e quando a inclinação da reta tangente for negativa, a função será decrescente. Como $f'(x)$ é a inclinação da reta tangente à curva $y = f(x)$, f é crescente quando $f'(x) > 0$ e decrescente quando $f'(x) < 0$. Também, como $f'(x)$ é a taxa de variação dos valores funcionais de $f(x)$ em relação a x, quando $f'(x) > 0$, os valores funcionais estão crescendo à medida que x cresce; e quando $f'(x) < 0$, os valores funcionais estão decrescendo à medida que x cresce.

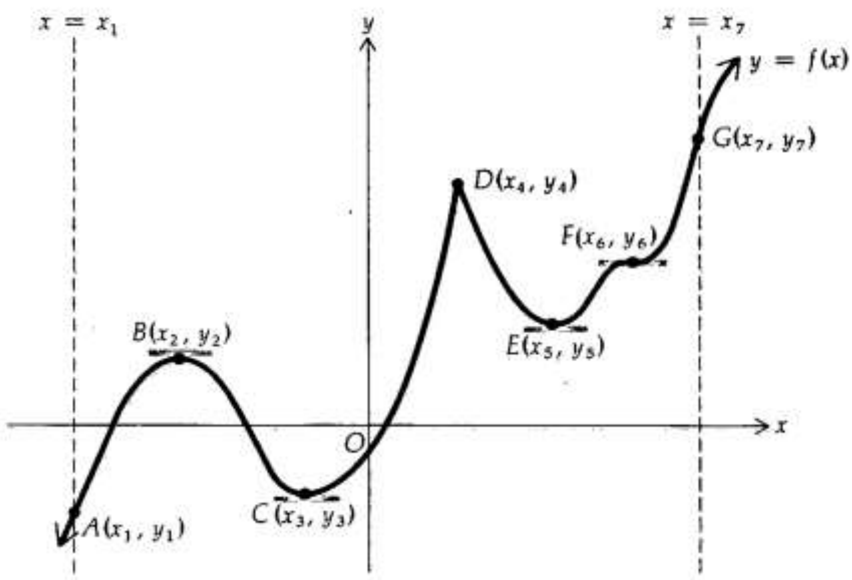


FIGURA 1

Figura 34: Informações algébricas e gráficas entre o comportamento da função e sua derivada. Fonte: Leithold

Utilizando ideias que poderão favorecer a construção da imagem de conceito da função crescente ou decrescente por meio da observação sobre o sinal da derivada o autor formaliza essa associação apresentando um teorema(figura 35):

TEOREMA Seja f uma função contínua no intervalo fechado $[a, b]$ e derivável no intervalo aberto (a, b):

(i) se $f'(x) > 0$ para todo x em (a, b), então f será crescente em $[a, b]$;
(ii) se $f'(x) < 0$ para todo x em (a, b), então f será decrescente em $[a, b]$.

Figura 35: Teorema sobre o comportamento da função por meio do sinal da derivada Fonte: Leithold

Após a definição formal de função crescente e decrescente, bem como os teoremas serem enunciados e provados, encontramos o teorema a respeito do teste da derivada primeira para extremos relativos.

O teste é apresentado sem que haja nenhuma modificação em relação a forma de apresentação de todos os objetos matemáticos tratados no capítulo, ou seja, a definição formal, seguida de representações gráficas e das provas dos teoremas.

Ao final da demonstração segue-se um roteiro a ser seguido para a determinação dos extremos relativos de uma função f, seguidos por um conjunto de exemplos com o mesmo objetivo do roteiro.

Os exercícios referentes a esse tópico tem em sua maioria, o mesmo objetivo, ou seja, a determinação dos extremos relativos.

Como um dos objetivos do presente estudo é verificar a possibilidade dos problemas de otimização se constituírem num agente motivador do estudo dos pontos críticos de uma função de variável real, faz-se necessário investigar como esse assunto é tratado na obra de Leithold.

Os problemas de otimização são apresentados no final do capítulo 4 e recebem o "status" de problemas de aplicação. De modo geral os problemas estão relacionados a situações vinculadas às ideias da geometria plana ou da geometria espacial. Em todos eles o autor se vale de representações geométricas para a partir destas expressar a função a ser otimizada.

Nos problemas resolvidos não encontramos nenhuma situação onde o ponto crítico estivesse fora do domínio de validade da função, bem como não encontramos problemas que exigissem a utilização da derivada de segunda ordem.

A utilização por parte do autor de recursos computacionais e/ou calculadoras gráficas também não foram encontrados no livro, talvez por ser um livro editado em 1994.

Como em minha proposta de trabalho com pontos críticos de uma função de variável real, proponho uma abordagem que prime pela construção de imagens de conceito, de maneira que só depois sejam construídas definições de conceito, não poderia me guiar por um livro que opta por apresentar os objetos matemáticos por meio de definições formais, até mesmo por acreditar que a linguagem formal possa vir a ser um ‘inibidor” da construção das imagens de conceitos.

Livro 02: Cálculo I – Mustafa A. Munem e David J. Foulis

Como dito anteriormente, se o nosso objetivo é investigar como o trabalho com pontos de máximo e mínimo de uma função de variável real é apresentado na obra, devemos, inicialmente, investigar como foi proposta a construção do conceito de derivada.

O capítulo 2, que trata das derivadas, é iniciado a partir de uma discussão a respeito da relação entre a distância percorrida por um móvel e sua velocidade. A velocidade e a distância são tratadas como funções. O encaminhamento da discussão nos leva a perceber que para estabelecermos uma relação entre as funções velocidade e distância, faz-se necessário que se fixe temporariamente um o tempo e logo a seguir o façamos variar. Por meio de representações algébricas e geométricas, o leitor é levado ao conceito de velocidade instantânea, bem como à taxa de variação média e à taxa de variação instantânea.

Uma vez formalmente definidas essas taxas, os estudantes são levados a observarem a resolução de dois exemplos que exploram esses conceitos.

Um cubo de metal com aresta x é expandido uniformemente como conseqüência de ter sido aquecido. Calcule:
(a) A taxa de variação média de seu volume em relação à aresta quando x aumenta de 2 para 2,01 centímetros.
(b) A taxa de variação instantânea de seu volume em relação à aresta no instante em que $x = 2$ centímetros.

Figura 36:Problema sobre taxa de variação. Fonte: Munnem e Foulis

Uma partícula se move sobre uma linha reta de modo que, no final de t segundos, sua distância s em metros do ponto de partida é dada por $s = 3t^2 + t$. Calcule a velocidade da partícula no instante em que $t = 2$ segundos.

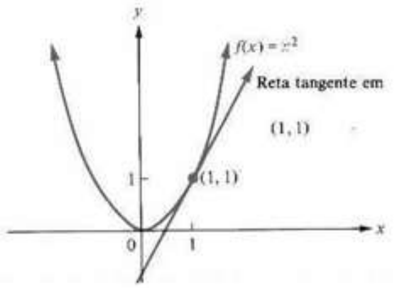
Figura 37: Problemas sobre velocidade instantânea. Fonte: Munnem e Foulis

Depois de exemplificadas as ideias de taxa de variação média e taxa de variação instantânea, o autor conduz o processo de construção do conceito de derivada, apresentado o conceito de coeficiente angular da reta tangente a uma curva num ponto dado, já se utilizando a definição por meio de limites, o que evidencia a busca por conceitos pré-estabelecidos e saberes já construídos, como nos afirma Tall.

Logo a seguir ao conceito de coeficiente angular da reta tangente por meio da aplicação dos limites, alguns exemplos são apresentados como o da figura 38.

$f(x) = x^2, P = (1, 1)$

SOLUÇÃO



$$
\begin{aligned}
m &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(1 + \Delta x) - f(1)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(1 + \Delta x)^2 - 1^2}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1 + 2\,\Delta x + (\Delta x)^2 - 1}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} (2 + \Delta x) = 2 \quad \text{(Fig. 6).}
\end{aligned}
$$

Figura 38: Exemplo de coeficiente angular da reta tangente por meio da definição de limite. Munnem e Foulis

Ao final do trabalho com retas tangentes, encontramos uma lista de exercícios que contempla uma retomada de todos os conceitos propostos até então.

Chamou-nos atenção, nessa lista de exercícios, a questão ilustrada na figura 39 :

Esquematize o gráfico da função f definida por $f(x) = \sqrt{x}$. Compute o valor da razão $\dfrac{f(0+h) - f(0)}{h}$ para números positivos h. Identifique essas razões como coeficientes angulares de certas retas secantes. O que acontece a estes coeficientes angulares quando h tende a 0?

Figura 39: Exercício sobre coeficientes angulares. Fonte: Munnem e Foulis

Com esse exemplo, percebemos a intenção dos autores de permitirem aos alunos uma situação de investigação do objeto matemático. A partir da utilização de três tipos de registros de representação, o gráfica, o algébrico e o tabular e conversões entre eles, os alunos poderão ser levados a um amadurecimento do conceito até então trabalhado, uma vez que estão sendo estimulados a agirem sobre o objeto.

Após a lista de exercícios retro mencionadas, os autores apresentam a definição de função derivada, associada à ideia de taxa de variação, seguida de exemplos de procedimentos algébricos para o cálculo da função derivada a função dada por meio da definição formal, como no exemplo abaixo.

2 $f(x) = \dfrac{1}{3x-2}$

SOLUÇÃO

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\dfrac{1}{3(x+\Delta x)-2} - \dfrac{1}{3x-2}}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(3x-2) - [3(x+\Delta x)-2]}{[3(x+\Delta x)-2](3x-2)\,\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-3}{[3(x+\Delta x)-2](3x-2)} = \frac{-3}{(3x-2)^2}.$$

Figura 40: Cálculo da função derivada por meio da definição formal. Fonte: Munnem e Foulis

As notações para a derivada são justificadas pelos autores através de uma nota histórica. Nessa nota os autores abordam a forma pela qual Newton, Leibniz e Lagrange representavam as derivadas e afirmam que daquele momento em diante, iriam optar pela representação de derivada usada por Leibniz.

Uma vez estabelecido o conceito de derivada, apresenta-se a relação existente entre diferenciabilidade e continuidade. Observamos que na abordagem desse tópico há um predomínio das representações em sua forma algébrica em detrimento das representações gráficas.

Destacam-se, na lista de exercícios, questões que promovem uma discussão a respeito da relação entre continuidade e diferenciabilidade. Essas questões podem favorecer uma "maturação" cognitiva do estudante em relação ao objeto matemático.

33 (a) **Explique, com suas próprias palavras, por que é geometricamente razoável que uma função diferenciável deva ser contínua.**
(b) **É geometricamente razoável acreditar que toda função contínua seja diferenciável? Por que ou por que não?**

Figura 41: Atividade trabalhando a relação entre diferenciabilidade e continuidade.
Fonte: Munnen e Foulis

Para Tall, as nossas experiências vão influenciar a nossa forma de "enxergar" um determinado conceito, sendo assim, acreditamos que atividades como a citada anteriormente poderão contribuir para o enriquecimento das imagens de conceito.

A seguir, são apresentadas as regras de derivação e a regra da cadeia. Os exercícios propostos são em sua quase totalidade, questões que primam pela aplicação das regras derivação e por consequência, o uso de manipulações algébricas.

Encontramos ainda no capitulo 2 um subcapítulo sobre retas tangentes e retas normais.

O conceito de reta tangente é apresentado de maneira formal, sem nenhuma representação geométrica. A única evidência, em relação as sugestões de Tall, para a construção de um objeto matemático foi a evocação de conceitos já construídos como verificamos na figura 42 abaixo:

Suponha que a função f é diferenciável em x_1, então $f'(x_1)$ é o coeficiente angular da tangente ao gráfico de f no ponto $(x_1, f(x_1))$. Se $y_1 = f(x_1)$, a equação da tangente na forma ponto-coeficiente angular é

$$y - y_1 = f'(x_1)(x - x_1).$$

Figura 42: Definição formal da equação da reta tangente. Fonte: Munnem e Foulis

O conceito de reta normal é também apresentada de forma direta por meio de definição formal.

As representações usadas para ilustrar os conceitos de retas tangentes e normais a uma curva, podem favorecer pouco a construção das imagens de conceito.

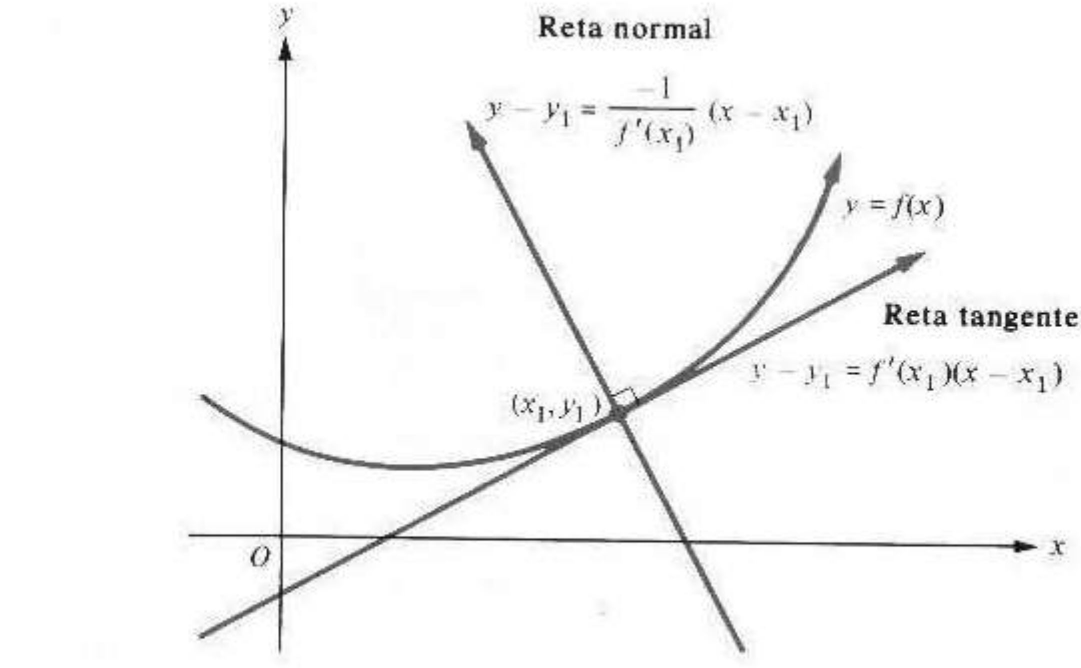


Fig. 2

Figura 43: Ilustração do conceito de reta tangente e reta normal. Fonte: Munnem e Foulis

Do ponto de vista das representações semióticas, não encontramos nenhum tipo de tratamento e/ou conversão. Encontramos apenas o que Duval chamou de representação identificável[40].

Entendemos ainda que, sob a ótica da teoria do pensamento matemático avançado, no que se refere à construção de imagens de conceito da reta tangente e normal a uma curva num determinado ponto, poderiamos apenas estar evocando a imagem mental do objeto matemático já construído, em especial, nesse caso, o de retas perpendiculares. O predomínio das definições formais, podem vir a prejudicar, ao nosso ver, a construção das imagens de conceito.

No terceiro capítulo do livro, entitulado Aplicações da Derivada, encontramos os teoremas do valor médio e do valor intermediário.

Antes de enunciar os teoremas são propostas duas afirmativas, apresentadas geometricamente.

Vamos começar com duas observações geométricas simples sobre curvas no plano.

I Se uma curva contínua — isto é, uma curva (que pode ser traçada, totalmente, sem tirarmos o lápis do papel) consistindo em um arco diretamente ligado — tem ponto inicial num semiplano determinado por uma reta l e termina no outro semiplano, é preciso que ela intercepte l, pelo menos, em um ponto P (Fig. 1).

II Se A e B são as extremidades de uma curva contínua, e se a curva tem uma reta tangente para cada ponto intermediário, então existe pelo menos um ponto intermediário P no qual a linha tangente é paralela à reta que contém A e B (Fig. 2).

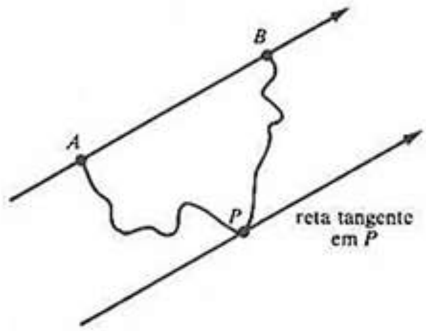


Fig. 2

Figura 44: Observações Geométricas relativas ao teorema do valor médio e intermediário. Fonte: Munnem e Foulis

[40]Trata-se de um enunciado compreensível em uma determinada língua natural, composição de um texto, desenhos de uma figura geométrica, a escrita de uma fórmula, de um gráfico, etc.(Santos, 2014,p.20)

Percebemos com essa postura metodológica uma possibilidade de evidência do trabalho de transição para o pensamento matemático avançado, uma vez que com essa forma de introduzir os teoremas, o estudante é levado a um desenvolvimento cognitivo, que segundo Tall acontece quando ao sujeito é oferecida uma nova forma de manipular o objeto e essa experiência é incorporada a outras experiencias que o aluno já tenha sobre o conceito.

Verificamos então, que nesse sentido, encontramos uma retomada a conceitos já construidos - o de curva contínua - e uma possiblidade de nova experiencia, ou descoberta de um novo fato, como o item II.

O teorema do valor intermediário é enunciado formalmente, seguido de uma interpretação do mesmo em linguagem natural, o que do ponto de vista do pensamento matemático avançado pode ser um facilitador para a construção das imagens de conceito. Para esse teorema, não encontramos no capítulo uma demonstração formal, fato que justifica-se pelo fato de que tal demonstração deve ser feita num curso de Análise e não em um curso inicial de Cálculo.

O teorema do Valor Médio, é apresentado de maneira formal, sem que haja uma releitura em linguagem natural. Também não encontramos nenhuma demostração do teorema.

Podemos então, verificar que a forma como os teoremas são apresentados, pode contribuir pouco para a transição do pensamento elementar para o avançado.

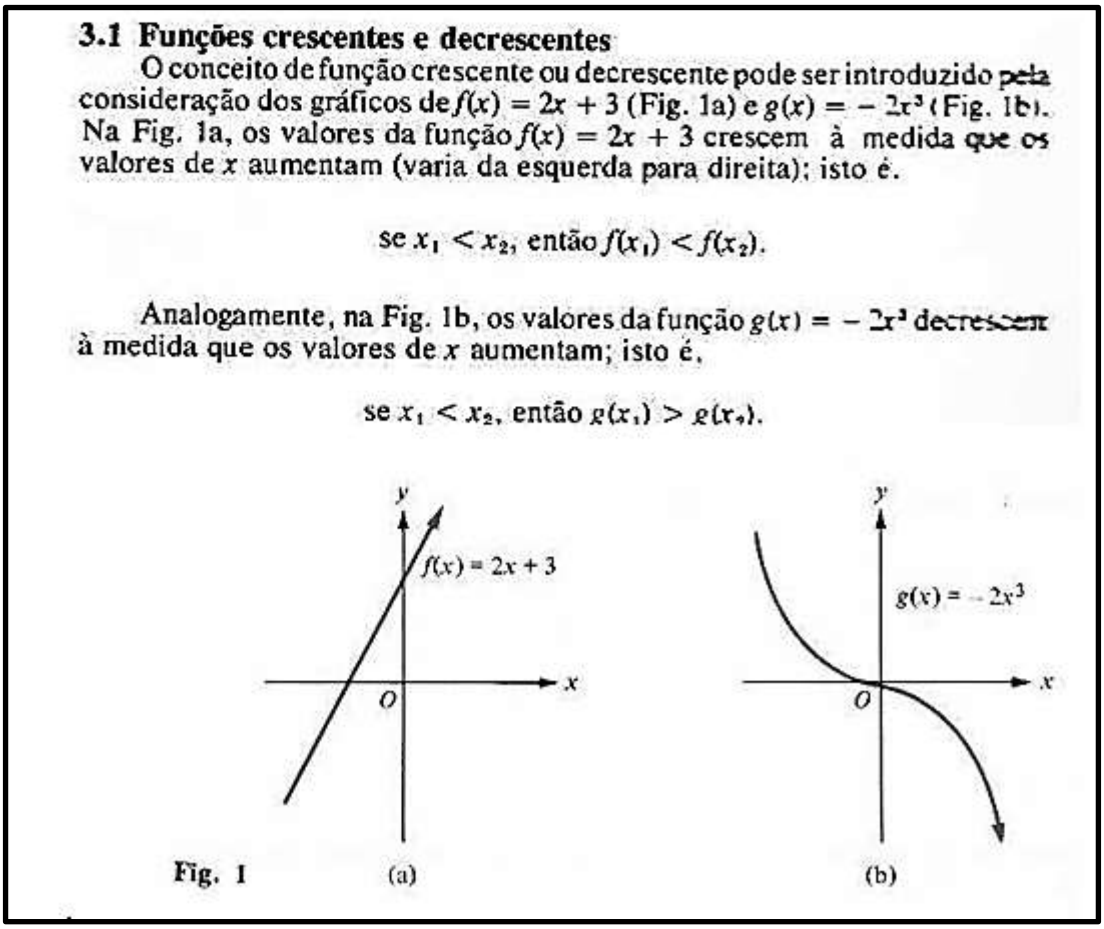
Segundo Tall e Dreyfus "é possível pensar em tópicos matemáticos avançados numa forma elementar" e segundo Tall um fator tido como marcante na transição entre as formas de pensamento é a mudança cognitiva que devemos propor, uma transição do convencer para o demonstrar, o que, no caso dos teoremas em questão não encontramos.

O teorema de Rolle é apresentado como uma particularidade do teorema do valor médio e segue a mesma forma de apresentação dos demais.

Para introduzir os conceitos relacionados às derivadas de ordem superior, os autores optaram por apresentar a função velocidade como taxa de variação da função do movimento e a função aceleração como taxa de variação da função velocidade, sem que houvesse uma justificativa, definição formal ou prova desse fato.

Ainda no capitulo 3, encontramos o subcapítulo que trata das propriedades geométricas dos gráficos e funções - funções crescentes, decrescentes e concavidade dos gráficos.

As funções crescentes e decrescentes são apresentadas por meio de definições formais, seguidas de exemplos baseados nas representações gráficas.



3.1 Funções crescentes e decrescentes

O conceito de função crescente ou decrescente pode ser introduzido pela consideração dos gráficos de $f(x) = 2x + 3$ (Fig. 1a) e $g(x) = -2x^3$ (Fig. 1b). Na Fig. 1a, os valores da função $f(x) = 2x + 3$ crescem à medida que os valores de x aumentam (varia da esquerda para direita); isto é.

$$\text{se } x_1 < x_2, \text{ então } f(x_1) < f(x_2).$$

Analogamente, na Fig. 1b, os valores da função $g(x) = -2x^3$ decrescem à medida que os valores de x aumentam; isto é,

$$\text{se } x_1 < x_2, \text{ então } g(x_1) > g(x_2).$$

Figura 45: Definição e exemplos de funções crescentes ou decrescentes. Fonte: Munem e Foulis

Ao examinarmos a apresentação da definição e das representações graficas propostas no livro, poderíamos afirmar que do ponto de vista de Duval, não houve uma congruência semântica entre a definição de função crescente e decrescente e a representação gráfica. Podemos afirmar a inexistência entre essa congruência, por entendermos que na congruência semântica, o aluno reconhece facilmenteo objeto matemático.

Acreditamos, a partir da nossa experiência enquanto professores de Matemática, que um aluno não reconhece com facildade a função (b) como uma função decrescente.

O teste da derivada primeira é apresentado como forma de reconhecimento dos intervalos de crescimento e /ou decrescimento de uma função. O teste é apresentado de maneira formal, via definições, e a demonstração é feita por meio do teorema do valor médio.

Observemos o exemplo proposto pelo livro, bem como sua resolução.

EXEMPLO Determine os intervalos onde a função $f(x) = x^3 - 3x + 1$ é monótona (isto é, ou crescente ou decrescente). Esboce o gráfico.

SOLUÇÃO

Nesse caso, $f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1)$; conseqüentemente,

$$f'(x) > 0 \text{ para } x < -1,$$
$$f'(x) < 0 \text{ para } -1 < x < 1,$$
$$f'(x) > 0 \text{ para } x > 1 \text{ (Figura 3a).}$$

Portanto,

$$f \text{ é crescente em } (-\infty, -1],$$
$$f \text{ decrescente } [-1, 1],$$
$$f \text{ crescente } [1, \infty) \text{ (Figura 3b).}$$

Figura 46:Exemplo de atividade envolvendo comportamento de função. Munnem e Foulis

Como no texto do livro, não encontramos a definição de número ou ponto crítico de uma função, nem mesmo de maneira informal, ou seja, sem definições, teoremas e suas demosntrações até o presente exemplo; percebemos que o trabalho com estudo do comportamento das funções fica prejudicado.

Observamos na resolução acima o predomínio de manipulações algébricas. A ausência de representações gráficas que ilustrem o comportamento da função parece-nos uma forma de reforçar a manipulação algébrica em detrimento da construção do conceito.

Chamou nossa atenção o fato de que foi proposto ao aluno a construção do esboço do gráfico, sem que fossem trabalhadas com ele condições mínimas para que esse esboço pudesse ser traçado . Como esbocar um gráfico sem que se fale em comportamento, assintotas, concavidade, pontos críticos,etc. Mesmo sem que se tenha falado nos itens acima mencioandos, o livro apresenta, para o aluno, uma representação gráfica da função dada e nela descata algumas informações que merecem nossa análise.

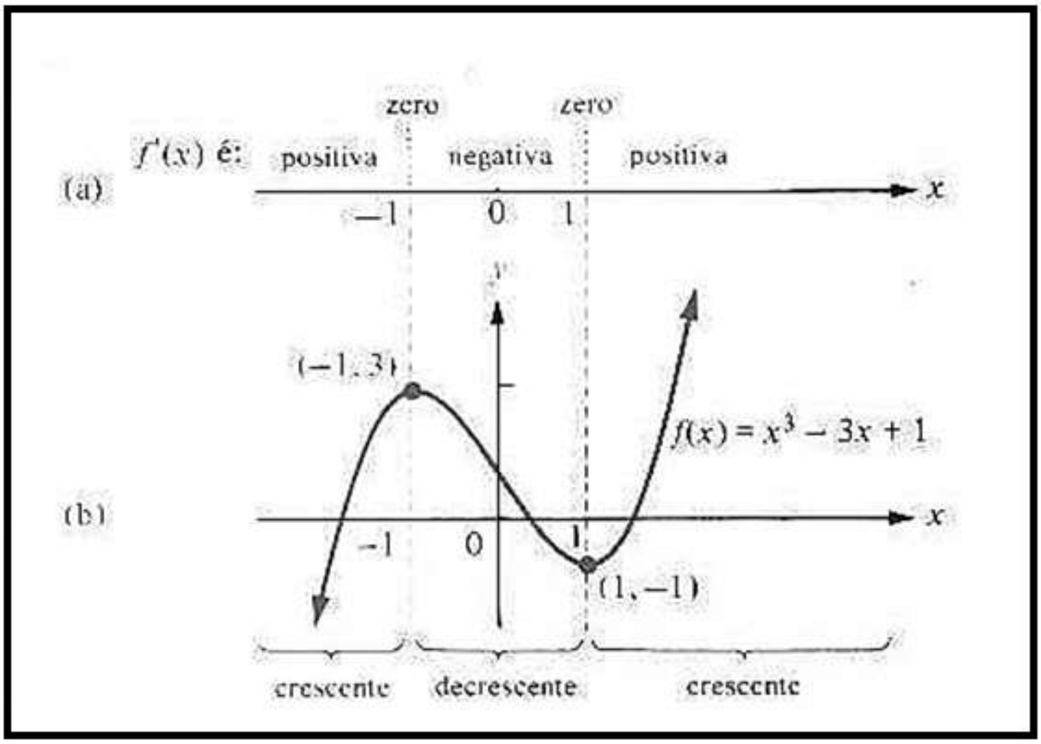


Figura 47:Representação gráfica do exercício apresentado na figura 46

Se tomarmos como referência a teoria das representações semióticas, perceberemos a existência de congruência entre as informações dadas no registro na língua natural e as que nos são apresentadas no registro gráfico.

De forma análoga ao trabalho com o teste da primeira derivada para estudar o comportamento das funções, os autores apresentam o teste da segunda derivada para tratarem o estudo da concavidade do gráfico de uma função, definindo a seguir o conceito de ponto de inflexão.

Para conduzir o estudante à construção do conceito de Máximo e Mínimo relativo de uma função, o subtítulo 4 do terceiro capítulo propõe a análise do gráfico de uma função e associa o ponto de Máximo relativo ao ponto “mais alto” do gráfico e da mesma maneira, apresenta a ideia de ponto Mínimo. Entendemos que essa forma de “tratar” os objetos matemáticos pode vir a constituir uma imagem mental do que venha a ser o ponto Máximo e Mínimo de uma função, na perspectiva de Duval. Na perspectiva da teoria do pensamento Matemático avançado, estaríamos construindo a imagem do conceito.

Após a apresentação de um conjunto de procedimentos a serem utilizados para a construção do esboço do gráfico de uma função, os autores retomam as ideias de Valor Máximo ou Mínimo Relativo de uma função.

Neste momento, o conceito de Máximo e Mínimo relativo, é definido formalmente, bem como o conceito de ponto crítico de uma função.

Em relação ao conceito de ponto crítico, esse é apresentado em linguagem formal. A demonstração é chamada pelos autores de “Demonstração analítica”. Observemos:

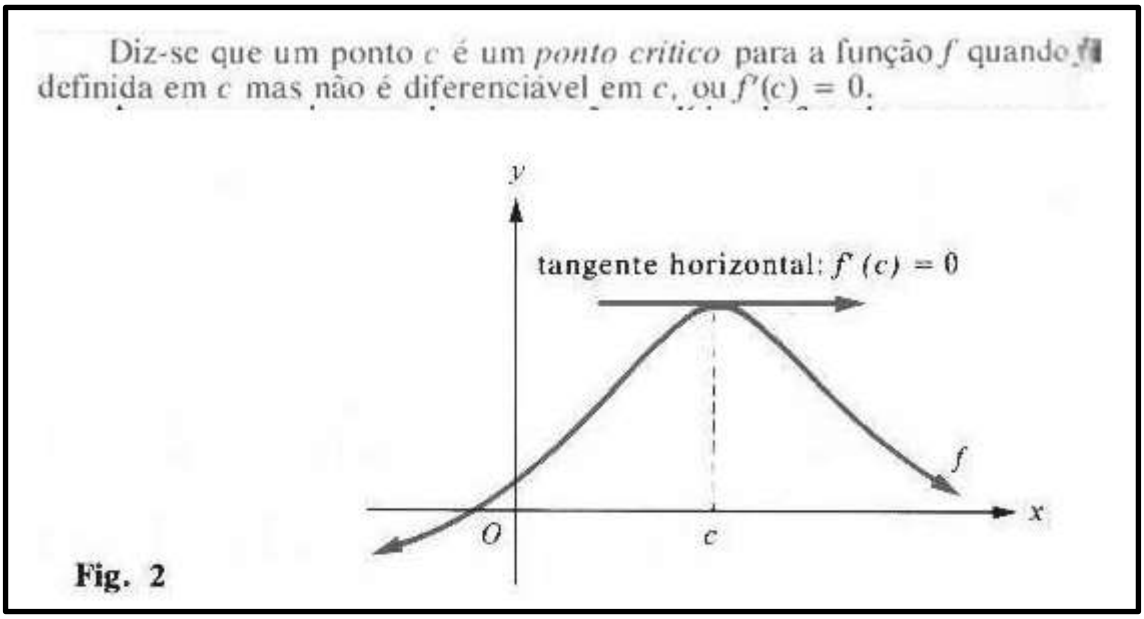

Diz-se que um ponto c é um *ponto crítico* para a função f quando f é definida em c mas não é diferenciável em c, ou $f'(c) = 0$.

Figura 48: Definição de ponto crítico de uma função e sua demonstração analítica.
Fonte :Munnem e Foulis

Partindo do pressuposto que o objetivo desse capítulo é examinarmos como os autores conduzem a construção de nosso objeto de estudo, percebemos que o conceito é apresentado de forma que a construção da imagem de conceito pode ficar um tanto limitada de ser efetivada.

Se tentarmos entender a demonstração analítica, proposta pelo autor como sendo uma tentativa de se construir uma representação gráfica, cujo objetivo é provocar no estudante o que Duval chama de apreensão discursiva[41], objetivando assim a construção de uma imagem mental para o que seja o ponto crítico, iremos esbarrar, ao nosso ver, na possibilidade de imagens mentais equivocadas.

Uma vez que o gráfico em questão foi apresentado ao estudante logo após ao estudo de Máximos e Mínimos, acreditamos que haverá uma possibilidade de associação entre o ponto máximo de uma função e o conceito de ponto critico, desconsiderando-se o fato de que um ponto crítico pode não ser um ponto extremo.

Se a definição formal e a representação gráfica são elementos constituintes da imagem de conceito do objeto em estudo, faz-se necessário que o professor, ou o autor da obra, possibilite aos estudantes experiências que efetivamente os conduzam à construção de imagens de conceito que sejam corretas; sendo assim, precisaríamos encontrar nesse cenário, representações gráficas que favorecessem aos leitores a percepção de que todo ponto extremo é ponto crítico, porém nem todo ponto crítico é ponto extremo.

O teste da derivada de primeira ordem é retomado a partir da análise dos coeficientes angulares das retas tangentes a curva em determinados pontos.

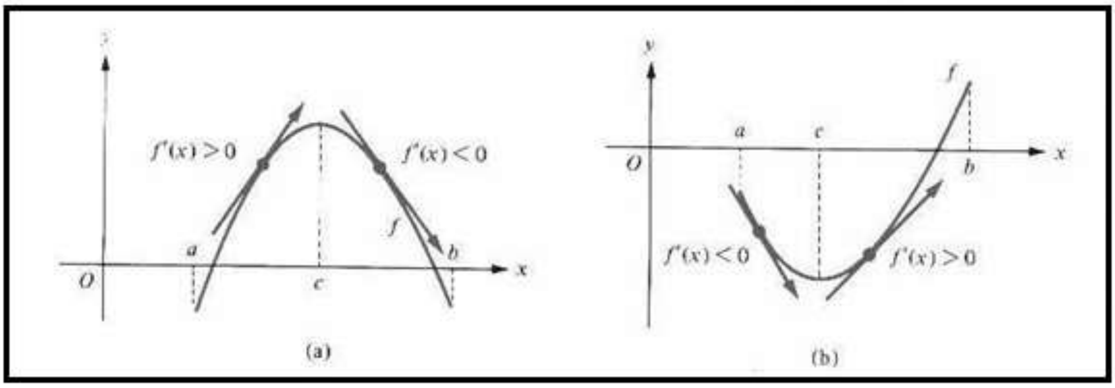


Figura 49:análise dos coeficientes angulares das retas tangentes. Fonte :Munnem e Foulis

[41]A apreensão discursiva diz respeito à interpretação das unidades figurais com especial atenção à articulação dos enunciados baseados em uma rede semântica de propriedades do objeto.

A abordagem dada pelos autores associa o teste da derivada primeira aos pontos de máximos e mínimos, não considerando, porém, o comportamento da função nos intervalos considerados, por já o terem feito anteriormente.

Teste da primeira derivada para extremos relativos

Seja a função f definida e contínua no intervalo aberto (a, b); considere que o ponto c pertença a (a, b) e suponha que f seja diferenciável em todo ponto em (a, b) exceto, possivelmente, em c.

(i) Se $f'(x) > 0$ para todo ponto x em (a, c) e $f'(x) < 0$ para todo ponto em (c, b), então f possui um máximo relativo em c.

(ii) Se $f'(x) < 0$ para todo ponto x em (a, c) e $f'(x) > 0$ para todo ponto em (c, b), então f possui um mínimo relativo em c.

Figura 50: Teste da Derivada Primeira. Fonte: Munnem e Foulis

Os problemas de otimização, mesmo não recebendo essa nomenclatura estão presentes no capítulo, sendo tratados como problemas de aplicação de Máximos e Mínimos na Geometria, Física, Comércio e Engenharia.

As aplicações na Geometria são em sua quase totalidade relacionados a otimização de áreas de terrenos retangulares e superfícies de sólidos.

EXEMPLOS 1 Rodney tem 1.000 metros de grade com os quais ele pretende construir um cercado retangular para seu pequeno *poodle* francês. Quais as dimensões do cercado retangular de área máxima?

2 Quadrados iguais são cortados de cada canto de um pedaço retangular de papelão medindo 8 centímetros de largura por 15 centímetros de comprimento, e uma caixa sem tampa é construída virando os lados para cima (Fig. 2). Determine o comprimento x dos lados dos quadrados que devem ser cortados para a produção de uma caixa de volume máximo.

3 Uma lata cilíndrica de estanho (sem tampa) tem volume de 5 centímetros cúbicos. Determine suas dimensões se a quantidade de estanho para a fabricação da lata é mínima.

Figura 51:Exemplos de problemas de otimização. Fonte: Munnem e Foulis

Em todos os problemas resolvidos, encontramos a presença de uma ilustração gráfica, com o objetivo de facilitar a construção da função a ser modelada.

Dentre os problemas de aplicação relacionados à Física, destacamos o exemplo abaixo, que acaba por abordar uma situação onde os pontos críticos não constituem a solução do problema proposto.

EXEMPLO James mora numa ilha a 6 km da praia e sua namorada Jean mora a 4 km praia acima. James pode remar seu barco a 3 km por hora e pode andar a 5 km por hora na praia. Encontre o tempo mínimo gasto por James para alcançar a casa de Jean vindo de sua ilha.

Figura 52: Problema de otimização. Fonte: Munnem e Foulis

Os problemas de otimização relacionados ao comércio e a Economia, são problemas relacionados às funções custo, lucro ou renda marginais.

Por conta de a versão original ser datada de 1978, observamos que em nenhum momento do capítulo analisado, encontramos sugestões por parte dos autores para a utilização de recursos computacionais, calculadoras gráficas que ajudassem na construção dos objetos de aprendizagem.

Levando em consideração de o meu objetivo é propor uma sequência de atividades que prime pela transição do pensamento matemático elementar para o pensamento matemático avançado, articulado com a teoria das representações semióticas, observo que o livro em questão prima por procedimentos algébricos em detrimento de construção de conceitos. Os conceitos são apresentados prontos, por meio de definições e ao aluno não são oferecidas situações favoráveis à construção de imagens de conceito

As representações utilizadas, no capítulo analisado, em sua maioria não possuem, ou não promovem possibilidades de tratamentos ou conversões, o que do ponto de vista da Teoria das representações semióticas, pode ser uma limitação.

Os problemas de otimização, são usados apenas como exemplo de aplicação, perdendo assim, o que acreditamos ter de mais interessante, ou seja, a capacidade de vir a tornar-se um elemento motivador para o estudo dos pontos críticos das funções de variável real.

Livro 03: Cálculo A – Diva Marília Flemming e MíriamBuss Gonçalves

O estudo das derivadas é abordado no capítulo 4, após o estudo de limites e funções contínuas.

O estudante é inicialmente, levado a estudar o coeficiente angular da reta tangente. A inclinação desta reta é definida como sendo o limite da taxa de variação, quando o incremento Δx tende a zero ($\Delta x \to 0$)

Logo em seguida vários exercícios são resolvidos no intuito de reforçar a técnica para encontrar a inclinação de uma reta tangente a uma função num ponto dado por meio do uso de limites.

O conceito de derivada é apresentado aos leitores de maneira formal, como podemos ver na figura abaixo:

4.3 A DERIVADA DE UMA FUNÇÃO

A derivada de uma função $y = f(x)$ é a função denotada por $f'(x)$, (lê-se f linha de x), tal que, seu valor em qualquer $x \in D(f)$ é dado por

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}, \text{ se este limite existir.}$$

Dizemos que uma função é derivável quando existe a derivada em todos os pontos de seu domínio.

Figura 53: Definição de derivada. Fonte: Flemming, Gonçalves

Após a definição de função derivada, segue-se, no capítulo, uma lista de 4 exercícios resolvidos, objetivando a obtenção da função derivada a função dada por meio da definição de limite da taxa de variação.

A relação entre função derivável e função contínua é apresentada por meio de um teorema que é demonstrado logo após ser enunciado.

Teorema. Toda função derivável num ponto x_1 é contínua nesse ponto.

Figura 54: Relação entre função derivável e função contínua. Fonte: Flemming, Gonçalves

Chamou-nos atenção a não utlização de de representações gráficas para ilustrar o teorema. A ausência da representação gráfica, ao nosso ver, empobrece a possibilidade da construção do conceito, pois segundo Duval, a utilização dese tipo de representaçao, no contexto do Cálculo Diferencial, torna possível o desenvolvimento das ideias no nível formal e abstrato.

As regras de derivação são enunciadas e logo a seguir demosntradas por meio da definição formal, o mesmo acontecendo com a regra da cadeia. Observamos a existência de 47 páginas consecutivas destinadas a enunciar e provar as regras de derivação de primeira ordem. Chamou-nos a atenção o tempo reservado às demonstrações das funções hiperbólicas sem que as mesmas fossem se quer definidas. As derivadas de ordem superior são tratadas como derivadas sucessivas e são trabalhadas seguindo o mesmo procedimento algébrico das derivadas de primeira ordem.

Nota-se, de forma bastante contundente, o predomínio das definições formais, a inexistência de representações semióticas bem como da articulação das poucas erpresentações que se fazem presentes no capítulo em questão.

O capitulo 5, trata das aplicações das derivadas e, logo no inicio, já evidenciam-se aplicações das derivadas na Física.

Com objetivo de apresentar aplicações das derivadas, encontramos no texto a apresentação do conceito de velocidade instantânea. Podemos observar, na apresentação desse conceito, a utilização da lingua materna, sem muitas definições formais e sem nenhuma representação gráfica.

Destaca-se no texto a evocação do conceito de taxa de variação, uma vez que a derivada está sempre associada a esse conceito.

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t}.$$

Como já vimos no capítulo anterior, esse limite é a derivada da função $s = s(t)$ em relação a t. Portanto,

$$v(t) = s'(t) = \frac{ds}{dt}.$$

Figura 55: Aplicação do conceito de taxa de Variação. Fonte: Flemming, Gonçalves

O conceito de aceleração é apresentado, seguindo os mesmos moldes usados para o trabalho com a velocidade. Após alguns exercícios de aplicação do cálculo de derivadas de primeira e segunda ordem para a determinação da velocidade e da aceleração de um corpo, é retomada a ideia de taxa de variação.

Nesse momento, a taxa de variação é apresentada em outros contextos que vão além da matemátic*a*, de problemas baseados na Geometria, como por exemplo problemas no contexto da biologia, da economia, etc.

No encadeamento proposto pela autora para introduzir os conceitos de extremos da função, observe o recorte do capítulo analisado:

A Figura 5.3 nos mostra o gráfico de uma função $y = f(x)$, onde assinalamos pontos de abscissas x_1, x_2, x_3 e x_4.

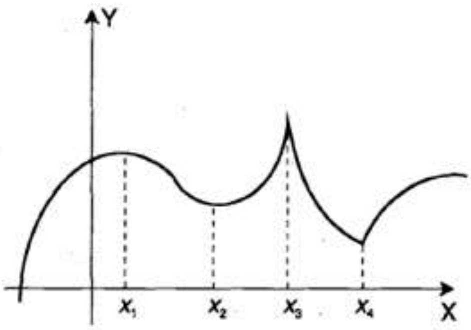


Figura 5-3

Esses pontos são chamados *pontos extremos* da função. $f(x_1)$ e $f(x_3)$ são chamados *máximos relativos* e $f(x_2)$, $f(x_4)$ são chamados *mínimos relativos*.

Figura 56: Conceito introdutório de extremos de uma função. Fonte: Flemming, Gonçalves

Os pontos extremos são "mostrados" a partir de uma representação genérica. A partir da observação da figura, os estudantes são apresentados aos pontos de máximo e mínimo relativos.

Após essa apresentação os conceitos são definidos:

Definição. Uma função f tem um máximo relativo em c, se existir um intervalo aberto I, contendo c, tal que $f(c) \geq f(x)$ para todo $x \in I \cap D(f)$.

Definição. Uma função f tem um mínimo relativo em c, se existir um intervalo aberto I, contendo c, tal que $f(c) \leq f(x)$ para todo $x \in I \cap D(f)$.

Figura 57: Definição de máximos e mínimos relativos. Fonte: Flemming, Gonçalves

Se ativermos nossa atenção na perspectiva de construção do conceito de extremos de uma função, tanto na perspectiva da teoria das representações semióticas quanto na teoria do pensamento Matemático Avançado concluiremos que essa forma de apresentar o conceito pouco poderá ajudar para sua efetiva construção. Mas por que fazemos essa afirmativa?

Para Vinner(1993) a aprendizagem de conceitos matemáticos se dá através das relações entre imagem de conceito e definição de conceito. Segundo ele, "situações didáticas propostas ao aluno que o levem apenas a decorar um conceito ira promover uma desarticulação entre conceito imagem e definição e como consequência termos a não construção do conceito". Pudemos observar que definições formais estão presentes em todos os capítulos relacionados aos pontos críticos de uma função no livro em questão. Sabemos da importância das definições, porém precisamos estar atentos ao fato de acreditarmos que para produzirmos o enriquecimento da imagem de conceito, precisamos propor aos estudantes de Cálculo uma gama de situações diversificadas até que esses conceitos sejam construídos com precisão.

Sequências de ensino que primem pelo uso de definições formais em detrimento de situações que potencializem a construção da imagem de conceito, levam os alunos a decorarem a definição e a partir daí produzirem uma imagem de conceito pobre e vaga.

Os conceitos de máximos e mínimos absolutos são apresentados aos alunos da mesma forma que todas as outras definições presentes no capítulo, ou seja, via definição formal, desprovidos de uma representação gráfica que pudesse propor uma articulação entre aimagem de conceito e definição de conceito, como podemos observar na figura 60.

Definição. Dizemos que $f(c)$ é o máximo absoluto da função f, se $c \in D(f)$ e $f(c) \geq f(x)$ para todos os valores de x no domínio de f.

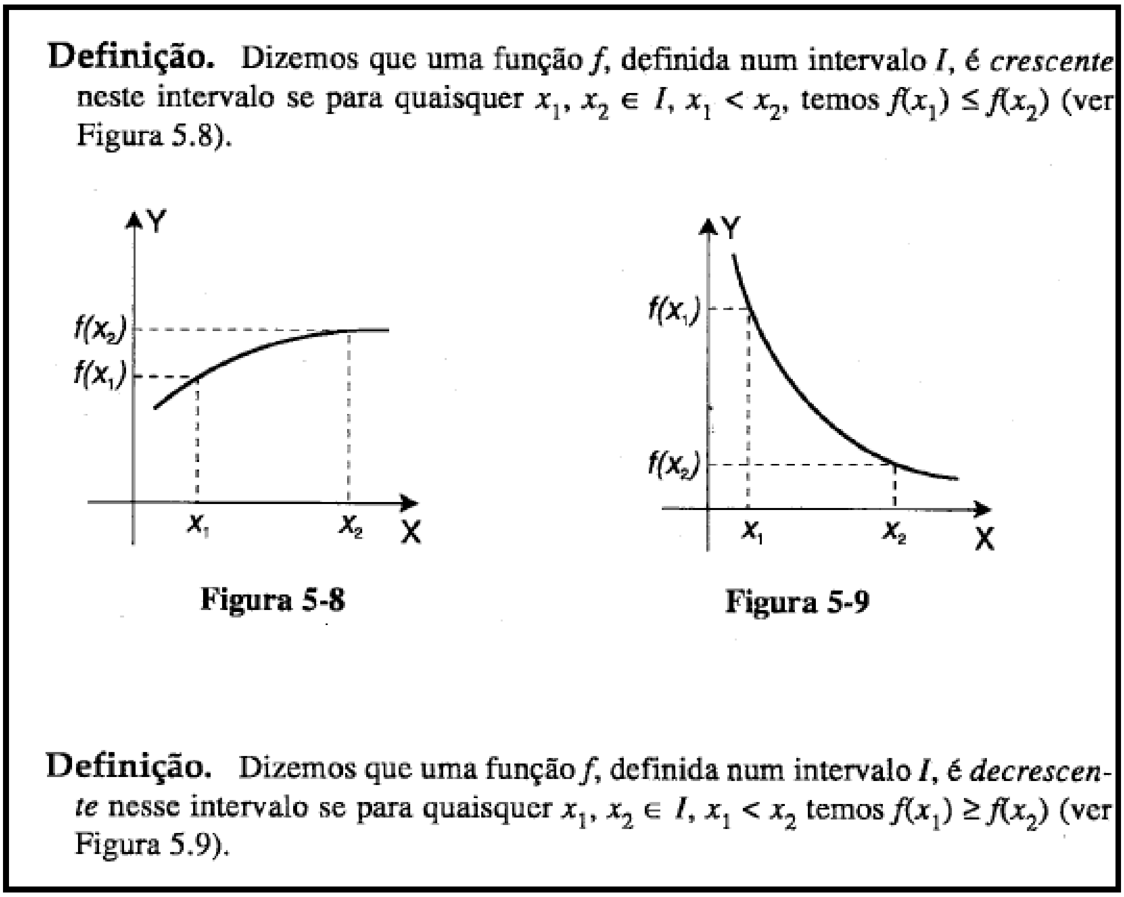
Definição. Dizemos que $f(c)$ é o mínimo absoluto da função f se $c \in D(f)$, e $f(c) \leq f(x)$ para todos os valores de x no domínio de f.

Figura 58: Definição formal de máximos e mínimos absolutos. Flamming& Gonçalves

O teorema de Rolle e o Teorema do Valor médio também são apresentados na mesma perspectiva.

Ainda no quinto capítulo as autoras tratam do estudo do comportamento das funções. Encontramos nesse capítulo uma tentativa de se buscar por conhecimentos já construídos pelos alunos, e de suas imagens de conceito relativas ao tema em questão.

Encontramos também uma tentativa de congruência entre as informações presentes no registro em língua natural e no registro gráfico.



Definição. Dizemos que uma função f, definida num intervalo I, é *crescente* neste intervalo se para quaisquer $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$, temos $f(x_1) \leq f(x_2)$ (ver Figura 5.8).

Figura 5-8 **Figura 5-9**

Definição. Dizemos que uma função f, definida num intervalo I, é *decrescente* nesse intervalo se para quaisquer $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$ temos $f(x_1) \geq f(x_2)$ (ver Figura 5.9).

Figura 59: Definição de funções crescentes e decrescentes. Fonte: Flemming, Gonçalves

Um dos subcapítulos do capitulo 5, se destina ao estudo de estratégias para a identificação dos pontos extremos de uma função de uma variável. Nesse sentido, o teste da derivada primeira é definido e logo a seguir, demonstrado.

Após o teste da derivada primeira ter sido enunciado e provado, a autora propõe uma lista de exercícios cujo objetivo é o estudo do comportamento de funções além da identificação dos pontos críticos dessas funções.

Os problemas de otimização são apresentados como problemas de maximização e minimização. É apresentado ao estudante um roteiro de procedimentos a serem seguidos na busca pela resolução dos exercícios em questão.

O primeiro passo para solucionar estes problemas é escrever precisamente qual a função que deverá ser analisada. Esta função poderá ser escrita em função de uma ou mais variáveis. Quando a função é de mais de uma variável devemos procurar expressar uma das variáveis em função da outra.

Com a função bem definida, devemos identificar um intervalo apropriado e então proceder a rotina matemática aplicando definições e teoremas.

Figura 60: Roteiro para resolução dos problemas de otimização Flemming, Gonçalves

Em sua totalidade, os exemplos resolvidos, apresentam situações de aplicação da Biologia, na Engenharia e na Economia, com predomínio aos procedimentos algébricos. Não encontramos, nos exemplos analisados, tentativas de conversões ou tratamentos.

5.12.1 Exemplos

(*1*) Na Biologia, encontramos a fórmula $\phi = V \cdot A$, onde ϕ é o fluxo de ar na traquéia, V é a velocidade do ar e A a área do círculo formado ao seccionarmos a traquéia (ver Figura 5.29).

Figura 5-29

(*3*) Um galpão deve ser construído tendo uma área retangular de 12100 m^2. A prefeitura exige que exista um espaço livre de 25 m na frente, 20 m atrás e 12 m em cada lado. Encontre as dimensões do lote que tenha a área mínima na qual possa ser construído este galpão.

Figura 61:Exemplos de problemas de otimização. Flemming, Gonçalves

Ainda de acordo com as ideias de Duval, a representação das operações (situações problema)exige a utilização de um registro como o da álgebra, porem são as figuras e/ou os registros gráficos que "permitem representar a totalidade de relações que constituem o objeto ou a situação".

Na perspectiva da teoria do pensamento matemático avançado, numa atividade pautada na resolução de problemas deveríamos ter situações que levassem os estudantes a entrarem em contato com tarefas cognitivas que ativassem tanto as imagens de conceito como asdefinições de conceito.

Os objetos matemáticos são apresentados a partir da definição, por meio da linguagem formal, e quase sempre sem oferecer condições aos estudantes que consideramos propícias para a construção das imagens de conceitos dos referidos objetos.

A transição do pensamento matemático elementar para o avançado, como propõe Tall, também fica prejudicada com a proposta de trabalho apresentada pelo autor.

Segundo Tall e Vinner, nós professores, precisamos despertar no aluno a necessidade de pensar de forma avançada. A transição do pensamento elementar para o avançado começa pela capacidade de se perceber e agir sobre os objetos matemáticos. Após o agir sobre os objetos os alunos precisam ser estimulados a refletir sobre as ações e por seguinte começarem a construir suas teorias. Ou seja, a criação dessas teorias será respaldada pela utilização de um conjunto variado de atividades matemáticas que não primem prioritariamente pela utilização de procedimentos algébricos. Tais procedimentos, que questionam ou agucem a curiosidade do estudante, não foram encontrados nos capítulos analisados.

Segundo Duval (2009), um trabalho que busque analisar a construção de conceitos matemáticos deve estar pautado na certeza que estamos oferecendo condições ao aluno de que ele perceba a diferença entre o objeto que ele está estudando e as representações que ele está utilizando, além de propiciar a construção das representações mentais, que seria um conjunto formado pelas imagens e conceitos que cada indivíduo associa ao objeto matemático em questão.

Ao nosso ver, essa possiblidade de utilização de representações que constituíssem as imagens mentais apresenta- se de forma bastante restrita nos capítulos analisados.

A utilização de representações usando prioritariamente a linguagem algébrica, vai de encontro ao pressuposto de Duval que precisamos ainda, estar conscientes de que a diversidade das representações e o funcionamento de cada um dos tipos de representação são pontos chaves no processo de construção de conceitos/objetos matemáticos.

Assim como nas demais obras, percebemos a ausência de sugestão de utilização de recursos computacionais nos problemas de otimização.

Livro 04: Cálculo - James Stewart - Volume 1

O trabalho com derivadas, começa a ser desenvolvido no capítulo 3.

As derivadas são introduzidas por meio da definição de inclinação de reta tangente. Quando observamos o primeiro exemplo que foi proposto logo a seguir definição, encontramos alguns pontos que chamaram a nossa atenção.

$\boxed{1}$ **Definição** **A reta tangente** à curva $y = f(x)$ em um ponto $P(a, f(a))$ é a reta passando por P com a inclinação

$$m = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

desde que esse limite exista.

Figura 62: Definição de reta tangente. Fonte: James Stewart

EXEMPLO 1 Encontre uma equação da reta tangente à parábola $y = x^2$ no ponto $P(1, 1)$.

SOLUÇÃO Temos aqui $a = 1$ e $f(x) = x^2$, logo a inclinação é

$$m = \lim_{x \to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \to 1} (x + 1) = 1 + 1 = 2$$

Figura 63:exemplo de aplicação de equação da reta tangente. Fonte: James Stewart

Inicialmente a questão é resolvida por meio da definição formal, proposta pelo próprio livro. Porém, após a resolução, o autor aborda o significado geométrico da inclinação da reta tangente como a inclinação da curva no ponto dado. Ajudar na compreensão da ideia, encontramos um texto escrito em língua materna seguido de representações gráficas.

Algumas vezes nos referimos à inclinação da reta tangente como a **inclinação da curva** no ponto. A ideia por detrás disso é que, se dermos *zoom* (suficiente) em direção ao ponto, a curva parecerá quase uma reta. A Figura 2 ilustra esse procedimento para a curva $y = x^2$ do Exemplo 1. Quanto maior for o *zoom*, mais indistinguível da reta tangente será a parábola. Em outras palavras, a curva se torna quase indistinguível de sua reta tangente.

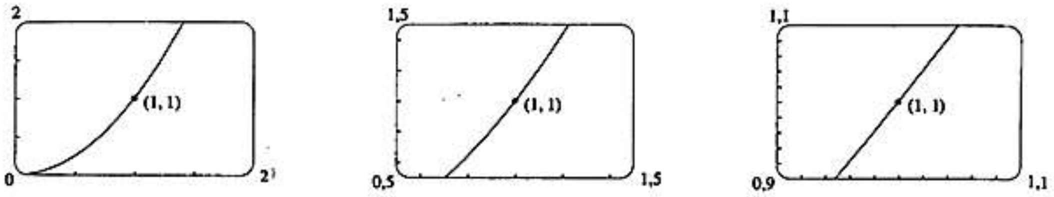


FIGURA 2 Um *zoom* cada vez maior da parábola $y=x^2$ em torno do ponto (1, 1).

Figura 64: Significado geométrico da inclinação da reta tangente. Fonte: JamesStewart

Acreditamos que mesmo sem a utilização de um software de geometria dinâmica, a proposta apresentada pode colaborar para formação de imagens de conceito para a relação entre a inclinação da reta tangente e a inclinação da curva, ambas no ponto de tangência.

Como já dissemos um fator que caracteriza a transição do pensamento elementar para o avançado, segundo Tall é a capacidade de perceber as coisas e a partir dessas observações começarem a criar suas próprias teorias.

Para Dreyfus, o chegar ao pensamento avançado pressupõe por parte do aluno, a capacidade de alguns processos como por exemplo: visualizar, analisar, conjecturar, abstrair e formalizar. Com esse tipo de proposta de análise, acreditamos que o professor esteja colaborando para a construção desses processos.

Acreditamos assim, que a abordagem proposta nesse exemplo pode estimular o aluno a perceber o que a teoria se propõe a "dizer".

A seguir, retoma-se o conceito de velocidade, já apresentado no momento em que os alunos estudaram limites. A partir da definição já estudada a teoria é encaminhada a uma discussão do conceito de velocidade instantânea que só posteriormente~~,~~ é definida matematicamente.

A condução ao conceito de derivada de uma função segue a mesma trajetória metodológica, ou seja, retoma-se a ideia de limites associados às taxas de variação e define-se a derivada.

A seguir, são propostos dois exercícios relacionados à determinação da derivada de uma função e à obtenção da equação da reta tangente ao gráfico de uma função dada.

EXEMPLO 5 Um fabricante produz peças de tecido com tamanho fixo. O custo, em dólares, da produção de x metros de certo tecido é $C = f(x)$.
(a) Qual o significado da derivada $f'(x)$? Quais são suas unidades?
(b) Em termos práticos, o que significa dizer que $f'(1\,000) = 9$?
(c) O que você acha que é maior, $f'(50)$ ou $f'(500)$? E $f'(5\,000)$?

Figura 65: Exemplo de exercícios de interpretação do significado de derivada
.Fonte : James Stewart

Tall (1991) diz que muitas vezes, no ensino de matemática na graduação, é apresentada a forma final da teoria ao invés do aluno participar do ciclo de criação da mesma. Nesse mesmo sentido, nos valeremos das ideias de Dreyfus (1991) quando ele nos afirma que o aluno deve construir as propriedades de um determinado conceito através de deduções que partem da definição. Os alunos podem envolver-se nessa construção através de atividades que promovam a abstração.

Tall (1991) ainda reitera afirmando que a possibilidade de definição formal e de dedução é um fator que diferencia o pensamento matemático avançado do pensamento matemático elementar.

Observamos com o exemplo acima que, mesmo que o conceito de derivada já esteja formalmente definido, as possibilidades oferecidas aos estudantes de construir as propriedades das taxas de variação e de associá-las ao conceito de derivada podem ampliar sua imagem de conceito em relação ao objeto estudado.

Com objetivo de concluir o subcapítulo é apresentado um conjunto de exercícios que contemplam desde as situações de manipulação algébrica aos que envolvem deduções e generalizações.

O conceito taxa de variação é retomado do subcapitulo seguinte com o intuito de promover a discussão a respeito da derivada enquanto função. Após alguns exemplos o autor discute as condições para que uma função seja diferenciável num intervalo dado, bem como apresenta o teorema que estabelece a relação entre função diferenciável e função contínua.

Ao nosso ver, merece destaque o fato do teorema ser enunciado em língua natural, demonstrado algebricamente e ainda termos representações gráficas que serviram para ilustrar as ideias dos conceitos que estavam sendo trabalhados.

As calculadoras gráficas e os computadores são outra possibilidade de análise da diferenciabilidade. Se f for diferenciável em a, ao darmos *zoom* em direção ao ponto $(a, f(a))$, o gráfico vai se endireitando e se parecerá cada vez mais com uma reta. (Veja a Figura 8. Vimos um exemplo específico na Figura 2 da Seção 2.7.) Por outro lado, independentemente da maneira como dermos o *zoom* em direção a pontos como os das Figuras 6 e 7(a), não poderemos eliminar a ponta aguda ou quina (veja a Figura 9).

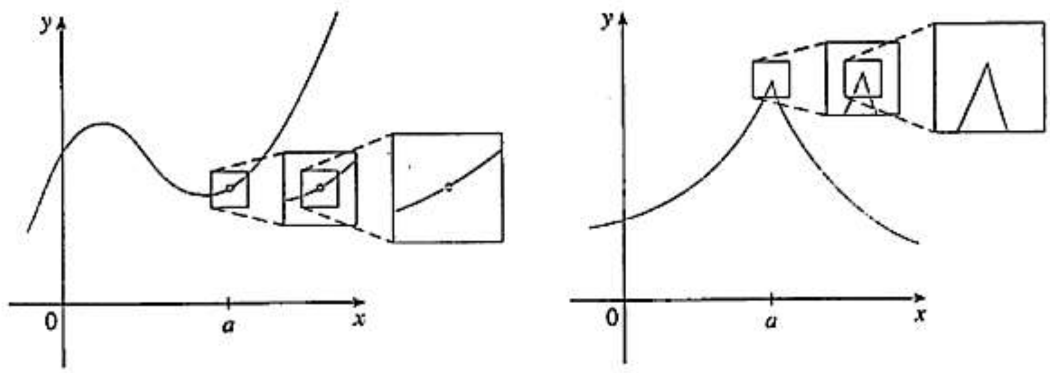


FIGURA 8
f é diferenciável em a.

FIGURA 9
f não é diferenciável em a.

Figura 66: Utilização de software para o trabalho com diferenciabilidade. Fonte :James Stewart

Merece destaque ainda o fato do livro propor a utilização das calculadoras gráficas, como recurso que promovem a ampliação das imagens mentais do objeto matemático em questão.

Dessa forma, o estudante tem a possibilidade de associar as imagens mentais, os processos e os procedimentos a serem utilizados para verificar se uma função de variável real e diferenciável ou não num determinado ponto, ou seja, a condução metodológica proposta no livro poderá viabilizar a construção de imagens de conceito do objeto em estudo.

Ainda em relação à condução do teorema em questão, a articulação entre a representação gráfica, a linguagem simbólica e a língua materna, está de acordo com os pressupostos da teoria das representações semióticas, pois para Duval (1993, p. 40) “é essencial, na atividade matemática, seja poder mobilizar muitos registros de representação semiótica (figuras, gráficos, escrituras simbólicas, língua natural, etc.) no decorrer de um mesmo passo, seja poder escolher um registro antes que outro”.

O terceiro capítulo tem como título: regras de derivação. Essas regras são apresentadas e demonstradas através da utilização das propriedades dos limites.

Diferentemente das obras analisadas anteriormente, encontramos no desenvolvimento do capítulo, exercícios propostos para serem resolvidos com o auxílio de computadores e/ou calculadoras gráficas.

42. **(a)** Use uma calculadora gráfica ou computador para fazer o gráfico da função $g(x) = e^x - 3x^2$ na janela retangular $[-1, 4]$ por $[-8, 8]$.

(b) Usando o gráfico da parte (a) para estimar as inclinações, faça um esboço, à mão, do gráfico de g' (veja o Exemplo 7 na Seção 2.8).

(c) Calcule $g'(x)$ e use essa expressão, com uma ferramenta gráfica, para fazer o gráfico de g'. Compare com seu esboço da parte (b).

Figura 67: Exercícios que sugerem a utilização de Calculadora gráfica. Fonte :James Stewart

Observamos no exercício acima, uma atividade que promove a articulação entre a utilização de um software com o desenvolvimento de competências mentais como, por exemplo, conjecturar, representar, visualizar, analisar, sistematizar, abstrair e formalizar. Essas competências mentais são consideradas por Dreyfus processos que devem ser estimulados para que ocorra a transição do pensamento matemático elementar para o avançado. Destacamos, ainda nessa perspectiva, as ideias de Tall quando ele nos afirma que na transição do pensamento matemático elementar para o avançado

> (...) há necessidade de começar com conjecturas e debate, para construir significado, para refletir sobre definições formais, construir o

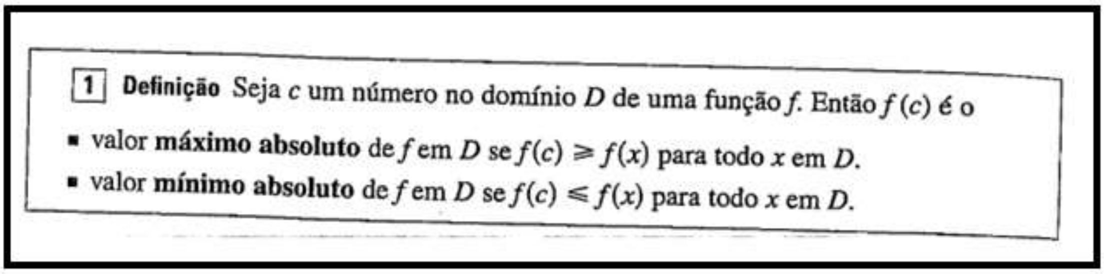
> objeto abstrato cujas propriedades são aquelas e só aquelas que podem ser deduzidas da definição. (Tall, 1991,p.3)

O capítulo 3, destinado a apresentar as regras de derivação, a regra da cadeia e a derivação implícita, é desenvolvido em sua totalidade mantendo essa coerência metodológica, as regras são apresentadas, demonstradas por meio da definição formal de derivada associada a taxa de variação instantânea e ao aluno é sempre apresentada uma questão que o leve usar uma das competências mentais que segundo Dreyfus, potencializam a transição do pensamento elementar para o avançado.

Não podemos deixar de citar que essas atividades também “podem amplificar” as imagens mentais como propostas por Duval.

Os pontos críticos das funções de variável real são tratados no capítulo 4, cujo título é Aplicações da Derivação. Os valores Máximo e Mínimo são apresentados logo no início do capítulo por meio de definição formal.

O autor incialmente define os máximos e mínimos absolutos:



$\boxed{1}$ **Definição** Seja c um número no domínio D de uma função f. Então $f(c)$ é o

- valor **máximo absoluto** de f em D se $f(c) \geq f(x)$ para todo x em D.
- valor **mínimo absoluto** de f em D se $f(c) \leq f(x)$ para todo x em D.

Figura 68: Definição de valor máximo/mínimo absolutos. Fonte :James Stewart

A diferença entre Máximos/Mínimos absolutos e Máximos/Mínimos locais são apresentados num texto com predomínio da língua materna em detrimento da linguagem simbólica.

Percebemos ainda a utilização de uma representação gráfica, com intuito de “ilustrar” a diferença conceitual entre essas modalidades de pontos.

A Figura 2 mostra um gráfico de uma função f com máximo absoluto em d e mínimo absoluto em a. Observe que $(d, f(d))$ é o ponto mais alto no gráfico e $(a, f(a))$ é o menor ponto. Na Figura 2, se considerarmos apenas os valores de x próximos b [por exemplo, se restringirmos nossa atenção ao intervalo (a, c), então $f(b)$ é o maior destes valores de $f(x)$ e é chamado de *valor máximo local* de f. Da mesma forma, $f(c)$ é chamado de *valor mínimo local* de f, pois $f(c) \leq f(x)$ para x próximo de c [no intervalo (b, d), por exemplo]. A função f também tem um mínimo local em e. Em geral, temos a seguinte definição.

$\boxed{2}$ **Definição** O número $f(c)$ é um

- valor máximo local de f se $f(c) \geq f(x)$ quando x está próximo de c.
- valor mínimo local de f se $f(c) \leq f(x)$ quando x está próximo de c.

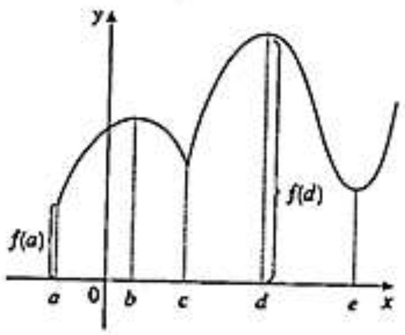


FIGURA 2
Mínimo absoluto $f(a)$,
máximo absoluto $f(d)$,
mínimos locais $f(c)$, $f(e)$,
máximos locais $f(b)$, $f(d)$

Figura 69: Definição de Máximo e mínimo local. Fonte :James Stewart

Chama nossa atenção, uma mesma representação onde encontramos máximos absolutos e globais simultaneamente e a articulação do texto discursivo com essa representação, objetivando a construção do conceito matemático. Destacamos ainda a importância da visualização nesse processo.

De acordo com Duval (1999), a visualização “é uma atividade cognitiva intrinsecamente semiótica, sendo esta atividade de representação e não apenas de percepção”. O próprio Duval (2002)nos chama atenção para a diferença entre a visão e a visualização, quando nos afirma que diferentemente da visão, que fornece um acesso direto ao objeto, a visualização é baseada na produção de uma representação semiótica, pois mostra relações, ou melhor, a organização das relações entre unidades figurais de representação.

O teorema do valor extremo é apresentado via definição formal, acompanhado de representações gráficas.

O número critico de uma função é apresentado por meio de definição formal.

$\boxed{6}$ **Definição** **Um número crítico** de uma função f é um número c no domínio de f tal que ou $f'(c) = 0$ ou $f'(c)$ não existe.

Figura 70 : Definição de número crítico. Fonte :James Stewart

Para a determinação dos valores Máximos e/ou Mínimos absolutos de uma função contínua num intervalo dado, o autor optou por apresentar aos alunos um conjunto de três etapas a serem seguidas.

O Método do Intervalo Fechado Para encontrar os valores máximo e mínimo *absolutos* de uma função contínua f em um intervalo fechado $[a, b]$:

1. Encontre os valores de f nos números críticos de f em (a, b).
2. Encontre os valores de f nas extremidades do intervalo.
3. O maior valor entre as etapas 1 e 2 é o valor máximo absoluto, ao passo que o menor desses valores é o valor mínimo absoluto.

Figura 71: Método do intervalo fechado. Fonte :James Stweart

Constatamos ao analisar os exemplos resolvidos a respeito desse tema que o autor se faz valer de vários recursos para promover um processo de construção do conceito que não seja apenas a memorização de uma sequência de procedimentos algébricos.

Observemos:

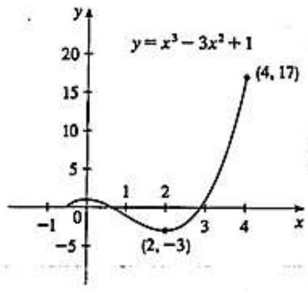


FIGURA 14

EXEMPLO 8 Encontre os valores máximo e mínimo absolutos da função

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 1 \qquad -\tfrac{1}{2} \leqslant x \leqslant 4$$

SOLUÇÃO Uma vez que f é contínua em $[-\frac{1}{2}, 4]$, podemos usar o Método do Intervalo Fechado:

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$$

$$f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x - 2)$$

Uma vez que $f'(x)$ existe para todo x, os únicos números críticos de f ocorrem quando $f'(x) = 0$, isto é, $x = 0$ ou $x = 2$. Observe que cada um desses números críticos está no intervalo $(-\frac{1}{2}, 4)$. Os valores de f nestes números críticos são

$$f(0) = 1 \qquad f(2) = -3$$

Os valores de f nas extremidades do interval são

$$f(-\tfrac{1}{2}) = \tfrac{1}{8} \qquad f(4) = 17$$

Comparando esses quatro números, vemos que o valor máximo absoluto é $f(4) = 17$ e o valor mínimo absoluto, $f(2) = -3$.

Observe que neste exemplo o máximo absoluto ocorre em uma extremidade, enquanto o mínimo absoluto acontece em um número crítico. O gráfico de f está esboçado na Figura 14.

Figura 72: exercício de máximo e mínimo. Fonte :James Stewart

Ao verificarmos as estratégias usadas pelo autor na resolução do exemplo em questão, encontramos muito mais do que um conjunto de procedimentos algébricos para determinarmos os pontos de máximo e mínimos absolutos de uma função.

Sob a perspectiva da teoria das Representações Semióticas, identificamos a utilização de duas formas de registro de representação da função estudada, ou seja, o registro de representação algébrica e o registro de representação gráfica.

Se observamos no passo a passo sugerido pelo autor, os procedimentos algébricos utilizados e a representação gráfica da função, e podemos afirmar que segundo Duval encontramos aí um processo de congruência entre as unidades de sentido das informações do registro em linguagem natural e os dados encontrados no registro gráfico.

Observemos agora um outro exemplo:

EXEMPLO 4

(a) Use uma ferramenta gráfica para estimar os valores máximo e mínimo absolutos da função $f(x) = x - 2 \operatorname{sen} x$, $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$.

(b) Utilize o cálculo para encontrar os valores máximo e mínimo exatos.

Figura 73: Atividade envolvendo máximos e mínimos com utilização de recursos tecnológicos. Fonte :James Stewart

Neste exemplo já verificamos que o autor propõe uma atividade cujo objetivo é promover um confronto entre as informações obtidas com a representação produzida pela ferramenta gráfica e pelas informações obtidas por meio dos procedimentos algébricos do Cálculo.

O próximo assunto a ser tratado pelos autores, é o teorema de Rolle. O teorema é enunciado e antes de ser demonstrado, o estudante e estimulado a analisar um conjunto de gráficos de funções típicas que ilustram as hipóteses do teorema.

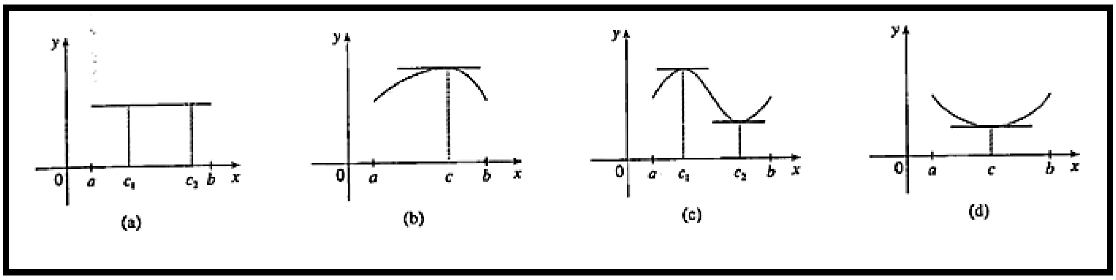


Figura 74: Representações gráficas das hipóteses do teorema de Rolle Fonte :James Stewart

Entendemos que mais que ilustrar as hipóteses do teorema de Rolle, esses gráficos se destinam a construir imagens mentais que irão compor a imagem do conceito do teorema em questão. Logo a seguir, encontramos o teorema do Valor médio que é formalmente apresentado e demonstrado.

O próximo assunto a ser tratado é “como as derivadas afetam na forma de um gráfico”, tópico este que irá estabelecer os testes da derivada primeira e da derivada segunda, para estudar o comportamento das funções e sua concavidade.

O subcapítulo inicia-se com a apresentação da relação entre a primeira derivada e o comportamento da função.

Teste Crescente/Decrescente

(a) Se $f'(x) > 0$ em um intervalo, então f é crescente nele.

(b) Se $f'(x) < 0$ em um intervalo, então f é decrescente nele.

Figura 75:Relação entre o comportamento de uma função e sua derivada primeira.
Fonte :James Stewart

Após a demonstração do teste, o autor apresenta um exemplo que em nada foge dos exemplos tradicionalmente usados em livros de cálculo quando abordam esse assunto. Chamou-nos atenção o fato do teste estar enunciado totalmente em língua natural, sem a presença de nenhum registro algébrico/ geométrico.

Teste da Primeira Derivada Suponha que c seja um número crítico de uma função contínua f.

(a) Se o sinal de f' mudar de positivo para negativo em c, então f tem um máximo local em c.

(b) Se o sinal de f' mudar de negativo para positivo em c, então f tem um mínimo local em c.

(c) Se f' não mudar de sinal em c (isto é, se em ambos os lados de c f' for positivo ou negativo), então f não tem máximo ou mínimo locais em c.

Figura 76: Teste da derivada primeira .Fonte : James Stewart

Logo após o teste ser enunciado, encontramos um conjunto de gráficos que ao nosso entender, constituem-se nas primeiras imagens mentais que irão compor a imagem de conceito do teste da primeira derivada.

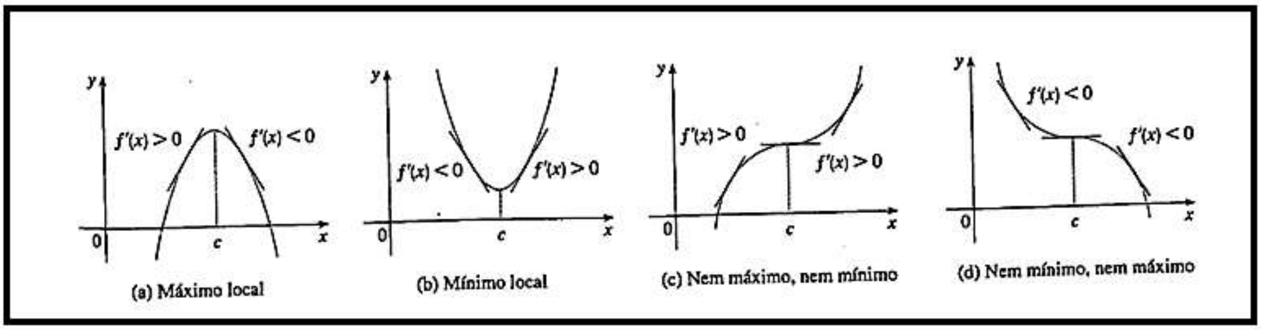


Figura 77 : Relação entre máximos e mínimos e os sinais da função derivada de primeira ordem.
Fonte :James Stewart

Interessou-nos, particularmente o subcapítulo 4.7 que trata dos problemas de otimização. Embora, do ponto de vista da construção dos conceitos, o presente livro mostre-se bastante diferente das obras anteriormente analisadas, em relação aos problemas de otimização, não podemos dizer o mesmo. Os problemas resolvidos são considerados "clássicos" e apresentam-se em sua quase totalidade como aplicações das derivadas no campo da Geometria, da Economia e na Administração.

Observemos alguns desses exemplos:

EXEMPLO 1 Um fazendeiro tem 1 200 m de cerca e quer cercar um campo retangular que está na margem de um rio reto. Ele não precisa de cerca ao longo do rio. Quais são as dimensões do campo que tem maior área?

EXEMPLO 2 Uma lata cilíndrica é feita para receber um 1 litro de óleo. Encontre as dimensões que minimizarão o custo do metal para produzir a lata.

EXEMPLO 3 Encontre o ponto sobre a parábola $y^2 = 2x$ mais próximo de $(1, 4)$.

EXEMPLO 5 Uma loja tem vendido 200 aparelhos reprodutores de Blu-ray por semana a $ 350 cada. Uma pesquisa de mercado indicou que para cada $ 10 de desconto oferecido aos compradores, o número de unidades vendidas aumenta 20 por semana. Encontre a função demanda e a função receita. Qual o desconto que a loja deveria oferecer para maximizar sua receita?

Figura 78: Exemplos de problemas de otimização. Fonte : James Stewart

Alguns dos problemas presentes nos exercícios só pedem a resolução por meio da análise de gráficos, que devem ser construídos em programas específicos, sugeridos pelo livro.

Do ponto de vista da construção de conceitos matemáticos, podemos dizer, que dos livros até agora analisados este é o que mais se aproxima das orientações propostas pelas teorias que balizam este estudo. Encontramos muitas situações acompanhadas de vários registros de representação, percebemos uma grande quantidade de tratamentos e conversões entre registros. Cada vez que um conceito matemático é apresentado, observamos a presença dos registros de representação, o que vem de encontro aos pressupostos de Duval.

No que se refere ao nível do pensamento matemático, percebemos uma forte tendência em se fornecer elementos que possam favorecer a produção de imagens mentais e conduzir aos procedimentos algébricos. Constatamos uma uniformização na forma de encaminhar a construção dos conceitos de não apresentá-los formalmente logo de inicio

Merece ainda destaque o fato da existência de uma grande quantidade de situações onde verificamos a transição do pensamento matemático elementar para o avançado. A articulação entre aspectos algébricos, gráficos e tecnológicos também ajudaram a conduzir o processo de construção dos conceitos analisados.

Livro 05: Cálculo um curso moderno e suas aplicações, Hoffmann Laurence e Bradley Gerald

O conceito de derivada é apresentado, no segundo capítulo do livro, a partir das ideias de taxa de variação e do o estudo dos coeficientes angulares das retas tangentes. Antes de se apresentar o conceito de derivada os estudantes são levados a investigar as taxas de variação em situações como na Física e na Economia.

Observemos um dos exemplos introdutórios do capítulo:

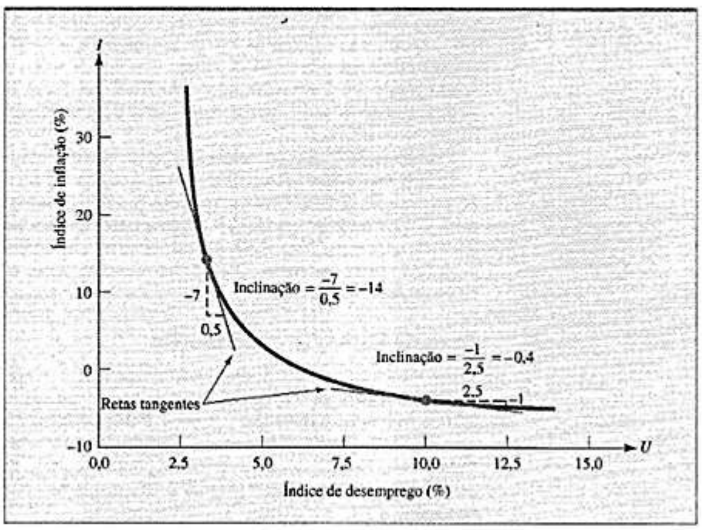


FIGURA 2.2 Inflação em função do índice de desemprego.

Fonte: Adaptado de Robert Eisner, *The Misunderstood Economy: What Counts and How to Count It*, Boston, MA: Harvard Business School Press, 1994, p. 173.

O gráfico da Figura 2.2 expressa a relação entre a porcentagem de desempregados U e a taxa de inflação I. Use o gráfico para estimar a taxa de variação de I em relação a U quando o índice de desemprego é 3% e quando o nível de desemprego é 10%.

Figura 79: Aplicação do conceito de taxa de variação aplicado a Economia.
Fonte: Hoffmann, Bradley

Após exemplos como o que acabamos de apresentar, os alunos são apresentados à derivada por meio da definição formal.

Derivada de uma Função ■ A **derivada** da função $f(x)$ em relação a x é a função $f'(x)$ (que se lê como "f linha de x") dada por

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

e o processo de calcular a derivada é chamado de **derivação. Dizemos que uma função** $f(x)$ **é derivável** no ponto c se $f'(c)$ existe, ou seja, se o limite do quociente diferença que define $f'(x)$ existe no ponto $x = c$.

Figura 80: Definição de derivada de uma função. Fonte :Hoffmann & Bradley

Logo após a definição, são propostos exercícios para obtenção de derivadas de funções elementares por meio da definição bem como exercícios para a obtenção da equação da reta tangente.

Voltamos nossa atenção ao fato de que procedimentos algébricos, como por exemplo, o cubo da soma, que poderiam estar esquecidas por parte dos estudantes, são retomadas pelos autores em notas de canto de páginas chamadas de lembretes.

Vejamos:

Lembrete

Lembre-se de que $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$. Este é um caso especial do teorema binomial em que o expoente é 3 e é usado para expandir o numerador do quociente diferença do Exemplo 2.1.4.

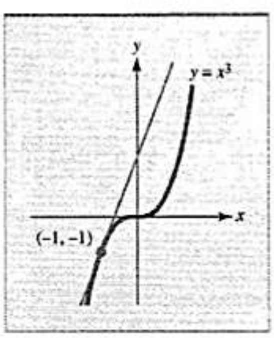


FIGURA 2.5 Gráfico de $y = x^3$.

EXEMPLO 2.1.4

Calcule a derivada de $f(x) = x^3$ e use-a para determinar a inclinação da reta tangente à curva $y = x^3$ no ponto $x = -1$. Qual é a equação da reta tangente neste ponto?

Solução

De acordo com a definição de derivada,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{(x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3) - x^3}{h} = \lim_{h \to 0} (3x^2 + 3xh + h^2) \\ &= 3x^2 \end{aligned}$$

Assim, a inclinação da reta tangente à curva $y = x^3$ no ponto $x = -1$ é $f'(-1) = 3(-1)^2 = 3$ (Figura 2.5). Para determinar a equação da reta tangente, precisamos também da coordenada y do ponto de tangência, $y = (-1)^3 = -1$. Assim, a reta tangente passa pelo ponto $(-1, -1)$ com inclinação 3. Usando a forma ponto-inclinação da equação de uma reta, temos:

$$y - (-1) = 3[x - (-1)]$$

ou

$$y = 3x + 2$$

Figura 81: Exemplo de lembrete. Fonte :Hoffmann & Bradley

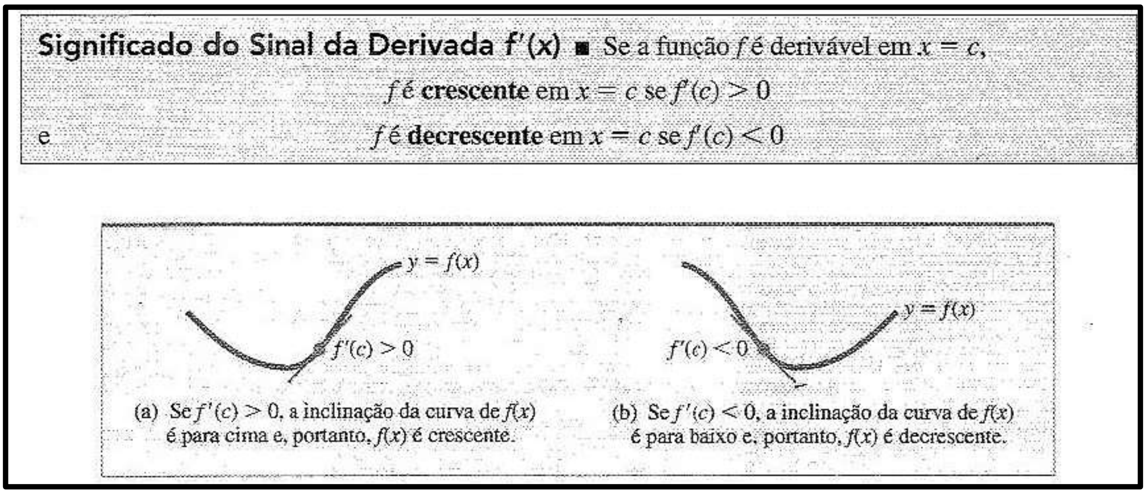
Devemos destacar a utilização de dois tipos de registros de representação nos exercícios resolvidos, ou seja, encontramos registros algébricos e geométricos tanto da função original como da reta tangente. Os autores ainda sugerem a utilização de um software para a construção do gráfico, além de “provocar” uma discussão a respeito da equação da reta tangente.

3 EXPLORE!

Entre com $f(x) = x^3$ como Y1 no editor de equações e plote a função usando uma janela decimal. Escolha opção reta tangente da tecla **DRAW** (**2nd PRGM**) e use a seta da esquerda para levar o cursor até o ponto $(-1, 1)$ da curva. Aperte **ENTER** e observe o que acontece. Esta equação é exatamente igual à obtida no Exemplo 2.1.4? Explique por quê.

Figura 82: Utilização do software para construção de gráfico.
Fonte :Hoffmann Bradley

A interpretação do significado do sinal da primeira derivada é apresentada inicialmente de maneira formal, seguida de uma representação gráfica.



Significado do Sinal da Derivada $f'(x)$ ■ Se a função f é derivável em $x = c$,

$$f \text{ é } \textbf{crescente} \text{ em } x = c \text{ se } f'(c) > 0$$

e

$$f \text{ é } \textbf{decrescente} \text{ em } x = c \text{ se } f'(c) < 0$$

(a) Se $f'(c) > 0$, a inclinação da curva de $f(x)$ é para cima e, portanto, $f(x)$ é crescente.

(b) Se $f'(c) < 0$, a inclinação da curva de $f(x)$ é para baixo e, portanto, $f(x)$ é decrescente.

Figura 83: Significado do sinal da primeira derivada. Fonte :Hoffmann& Bradley

Após a realização de alguns exemplos de cálculo da derivada de uma função num ponto dado, por meio da definição formal de derivada, os autores apresentam a relação entre função diferenciável e função contínua em um ponto.

> **Continuidade de uma Função Derivável** ■ Se a função $f(x)$ é derivável em $x = c$, é contínua em $x = c$.

Figura 84: relação entre continuidade e função derivável. Fonte :Hoffmann &Bradlley

Para mostrar que a reciproca da relação entre função derivável e contínua, o autor apresenta um conjunto de funções, representadas graficamente. As funções representadas, reforçam o contraexemplo além de enriquecer as imagens de conceito de funções que são contínuas em um ponto, mas não são deriváveis no ponto considerado.

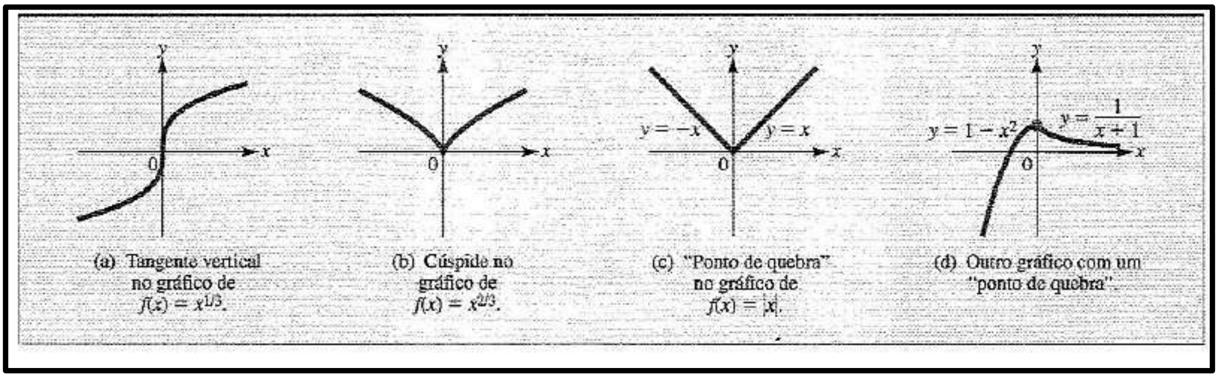
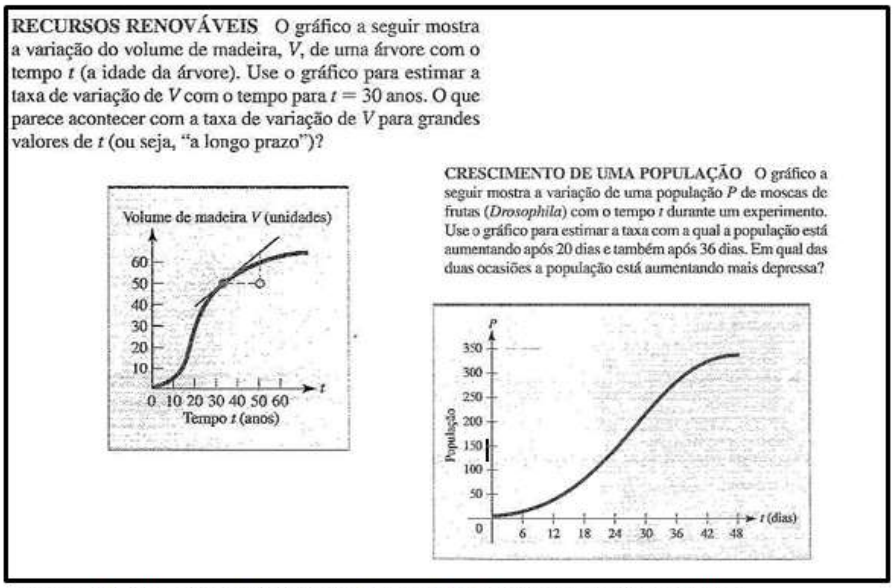


Figura 85: Exemplos de funções contínuas em um ponto mas não deriváveis nesse ponto.
Fonte :Hoffmann & Bradley

A seguir, é proposto aos estudantes, um conjunto de atividades relacionadas aos conceitos básicos das derivadas. Os exercícios contemplam exercícios relacionados ao cálculo da taxa de variação e ao cálculo da equação da reta tangente de uma curva num ponto dado.

Merece destaque o fato de que boa parte dos exercícios relacionados as taxas de variação são exercícios de aplicação em diversas áreas do conhecimento, além das questões onde são sugeridos a utilização de calculadoras gráficas.

Apresentamos a seguir alguns exemplos dos problemas de aplicação.


RECURSOS RENOVÁVEIS O gráfico a seguir mostra a variação do volume de madeira, V, de uma árvore com o tempo t (a idade da árvore). Use o gráfico para estimar a taxa de variação de V com o tempo para $t = 30$ anos. O que parece acontecer com a taxa de variação de V para grandes valores de t (ou seja, "a longo prazo")?

CRESCIMENTO DE UMA POPULAÇÃO O gráfico a seguir mostra a variação de uma população P de moscas de frutas (*Drosophila*) com o tempo t durante um experimento. Use o gráfico para estimar a taxa com a qual a população está aumentando após 20 dias e também após 36 dias. Em qual das duas ocasiões a população está aumentando mais depressa?

Figura 86: Problemas de aplicação sobre taxas de variação. Fonte:Hoffmann, Bradley

Após as atividades envolvendo a derivada por meio de definições formais, os autores apresentam as regras de derivação. As regras são apresentadas na linguagem algébrica e depois explicadas em linguagem natural, mas não encontramos demonstrações ou deduções das fórmulas.

Regra da Potência ■ Para qualquer número real n,

$$\frac{d}{dx}[x^n] = nx^{n-1}$$

Em palavras, para calcular a derivada de x^n, reduzimos de 1 o valor do expoente e multiplicamos o resultado pelo valor original do expoente.

Figura 87: Exemplo de regra de derivação. Fonte : Hoffmann& Bradley

Os autores optam por apresentar dois conceitos que não foram discutidos nas outras obras analisadas por esse estudo: os conceitos de taxa de variação relativa e taxa de variação percentual. Esses conceitos também são apresentados em língua materna e por meio de fórmulas. Os exercícios relacionados a esses objetos matemáticos são contextualizados e em sua maioria acompanhados de utilização de calculadoras gráficas com questões que instigam a análise por parte do estudante, como no exemplo abaixo:

EXEMPLO | 2.2.7

O produto interno bruto (PIB) de um certo país é dado por $N(t) = t^2 + 5t + 106$ bilhões de dólares, onde t é o número de anos após 1995.

a. Qual foi a taxa de variação do PIB em 2005?
b. Qual foi a taxa de variação percentual do PIB em 2005?

Solução

a. A taxa de variação do PIB é a derivada $N'(t) = 2t + 5$. A taxa de variação em 2005 foi $N'(10) = 2(10) + 5 = 25$ bilhões de dólares por ano.
b. A taxa de variação percentual do PIB foi

$$100\frac{N'(10)}{N(10)} = 100\frac{25}{256} \approx 9{,}77\% \text{ ao ano}$$

8 | EXPLORE!

Leia o Exemplo 2.2.7. Compare a taxa de variação do PDB para $N(t)$ no instante $t = 10$ com a taxa de variação de um novo PDB dado por $N_1(t) = 2t^2 + 2t + 100$. Plote as duas funções usando x como variável independente e uma janela [3, 12.4]1 por [90, 350]0, onde uma escala de zero significa a ausência de marcas no eixo y. Como se comparam as duas taxas de variação do PDB no ano de 2005?

Figura 88: Exemplo de exercício de taxa de variação percentual. Fonte : Hoffmann & Bradley

Outro ponto que nos chamou a atenção foi a aproximação com as ideias de Rezende (2003). Segundo o pesquisador, um dos problemas do ensino e aprendizagem das ideias do Cálculo está no que ele chamou de dualidade variabilidade/permanência, ou seja, a ênfase dada aos aspectos estáticos do cálculo em detrimento de seus aspectos dinâmicos, como por exemplo o trabalho com derivada associando-a ao coeficente angular da reta tangente e relegando a segundo plano a interpretação como taxa de variação instantânea.

Ao examinarmos os exercicios propostos ao longo do trabalho com derivadas, observamos a preocupação dos autores em explorar além da ideia de coeficiente angular da reta tangente, a ideia de taxa de variação. Vale ainda destacar que essa ideia é explorada em cenários para além da matemática pura.

DISSEMINAÇÃO DE UMA DOENÇA Uma doença está se disseminando de tal forma que após t semanas o número de pessoas infectadas é

$$N(t) = 5.175 - t^3(t - 8) \qquad 0 \leq t \leq 8$$

a. A que taxa a doença está se disseminando após 3 semanas?

b. Suponha que as autoridades considerem que uma doença atingiu proporções epidêmicas quando a taxa de variação percentual do número de casos ultrapassa 25%. Qual é o período de tempo no qual esta condição é satisfeita?

c. Leia um artigo sobre epidemiologia e escreva um ensaio de pelo menos dez linhas a respeito da relação entre a política de saúde pública e a disseminação das doenças.

Figura 89: Exemplo de problema utilizando a derivada como taxa de variação.Fonte : Hoffmann& Bradley

De acordo com Vinner (1983), por meio de problemas de aplicação, torna-se possível a criação de imagens de conceito e essas imagens irão contribuir na construção de definições de conceito e também na criação de novas imagens de conceito. Em seus estudos, Vinner e Tall (1982) nos afirmam que o fato do estudante dominar a definição do conceito, ou seja, ter domínio da sua definição exata, não é uma garantia de que o conceito em questão esteja efetivamente compreendido e/ou construído.

Para os pesquisadores, o fato do estudante de Cálculo, por exemplo, decorar uma definição de conceito em detrimento do reconhecimento do seu significado irá acabar por construir uma imagem de conceito vaga ou “pobre”. A coibição de tal fato, segundo Vinner (1981), acontecerá se o professor propuser aos alunos problemas que os estimulem a aproximação entre a imagem de conceito e a definição de conceito, se possível, em contextos aplicáveis.

Após uma lista de exercícios onde a derivada é utilizada tanto como coeficiente angular da reta tangente a uma curva num ponto dado como enquanto taxa de variação, os autores optam por apresentar o conceito de derivada de ordem superior. Esse conceito é apresentado de maneira formal em língua natural.

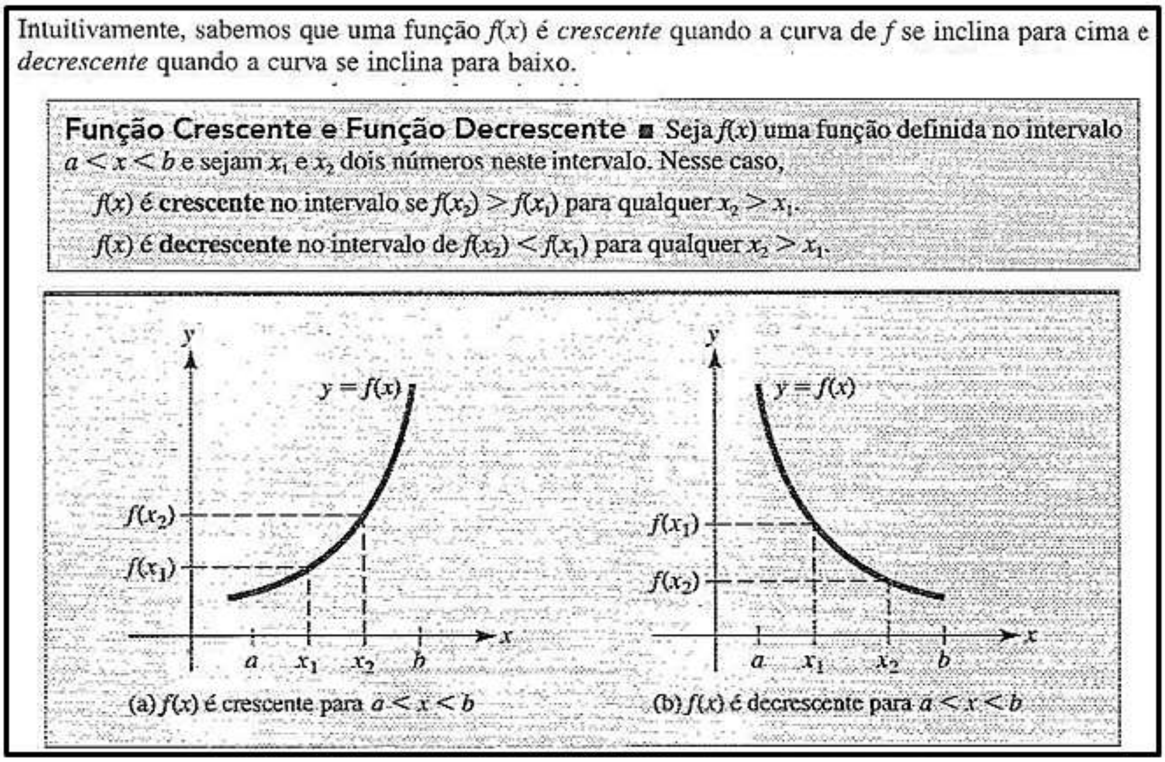
Derivada de Ordem n ■ Para qualquer número inteiro positivo n, a derivada de ordem n de uma função é obtida derivando a função n vezes sucessivas. Se a função original é $y = f(x)$, a derivada de ordem n é representada como

$$\frac{d^n y}{dx^n} \qquad \text{ou} \qquad f^{(n)}(x)$$

Figura 90: Definição de derivada de ordem superior. Fonte :Hoffmann & Bradley

Uma atenção especial é dada ao estudo das derivadas de segunda ordem. Nesse contexto, além das taxas de variação, são introduzidas ideias de velocidade e aceleração de um móvel, sobre uma trajetória.

No terceiro capítulo, chamado de aplicações adicionais da derivada, são abordados temas como extremos relativos, concavidade, pontos de inflexão, traçado de gráficos além dos problemas de otimização. No que se refere ao comportamento das funções, o conceito de função crescente ou decrescente é apresentado inicialmente de forma intuitiva, para, a seguir, ser definido formalmente. O autor ainda utiliza as representações gráficas de funções genéricas associadas à definição formal.


Intuitivamente, sabemos que uma função $f(x)$ é *crescente* quando a curva de f se inclina para cima e *decrescente* quando a curva se inclina para baixo.

Função Crescente e Função Decrescente ■ Seja $f(x)$ uma função definida no intervalo $a < x < b$ e sejam x_1 e x_2 dois números neste intervalo. Nesse caso,

$f(x)$ é **crescente** no intervalo se $f(x_2) > f(x_1)$ para qualquer $x_2 > x_1$.

$f(x)$ é **decrescente** no intervalo de $f(x_2) < f(x_1)$ para qualquer $x_2 > x_1$.

Figura 91: Definição de função crescente ou decrescente. Fonte : Hoffmann & Bradley

A relação entre o sinal da derivada e o comportamento da função é proposta por meio da observação da inclinação das retas tangentes para só depois o conceito ser formalizado.

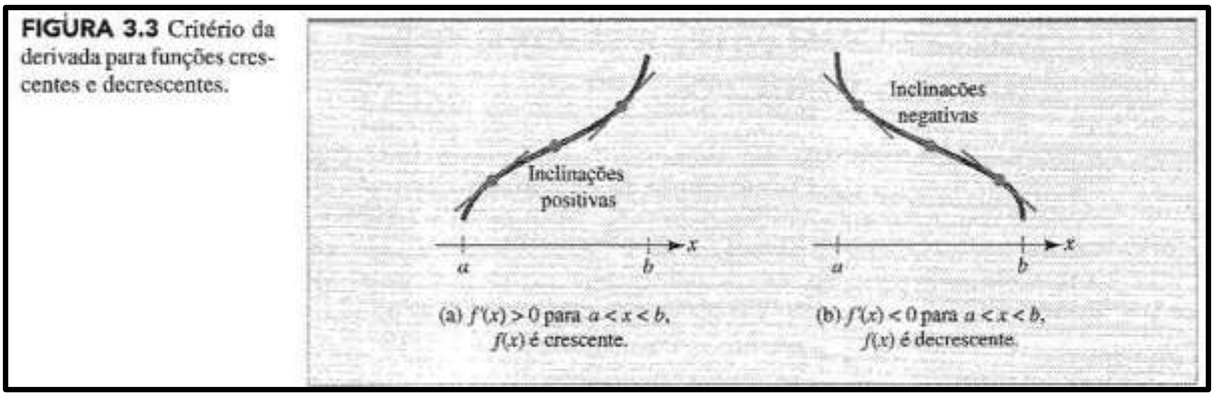
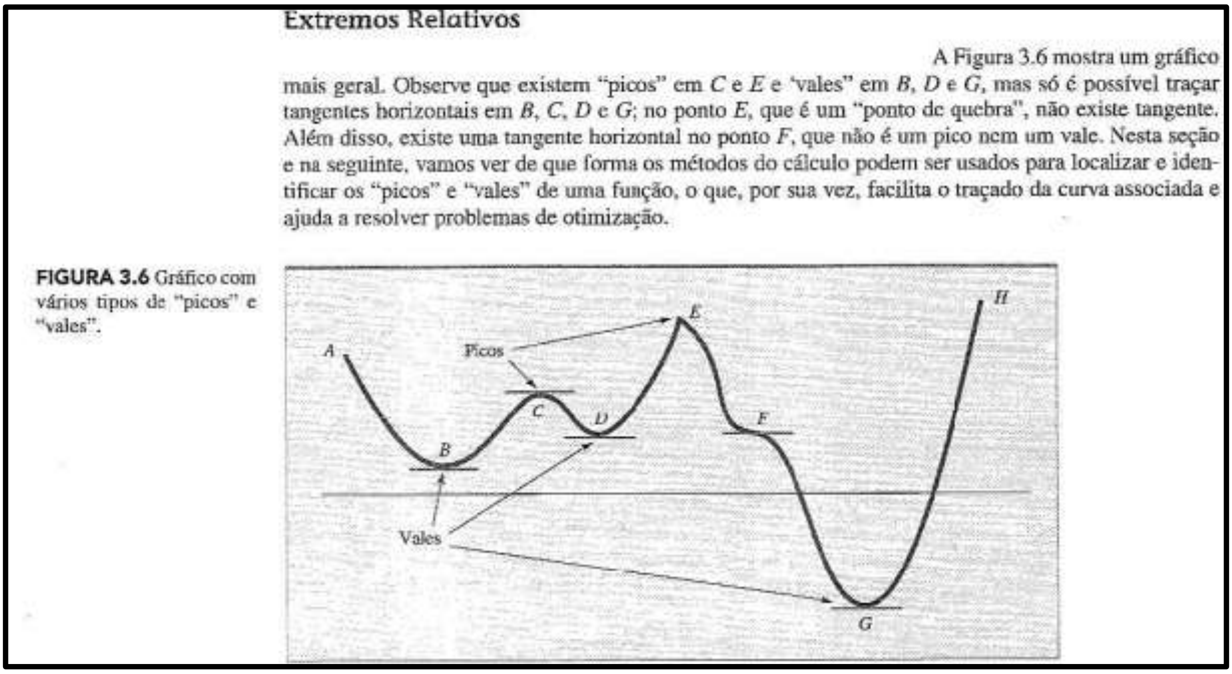


FIGURA 3.3 Critério da derivada para funções crescentes e decrescentes.

Figura 92: Critério da derivada para funções crescentes e decrescentes. Fonte :Hoffmann& Bradley

Vale destacar que nos exercícios resolvidos sobre esse tema, por meio da utilização de calculadoras gráficas, é sugerido aos alunos tanto o desenvolvimento algébrico do estudo do comportamento da função dada, como a análise do gráfico da função e da sua função derivada. Por meio dos exemplos e sob a ótica da teoria das Representações Semióticas de Duval, encontramos tratamentos e conversões, além da variedade de representações, condições essas, que segundo Duval são indispensáveis para a construção de um conceito em Matemática.

Ao abordarem os extremos relativos de uma função, os autores optam por apresentar um gráfico de uma função genérica. A partir dessa representação, os extremos são associados a "picos" e "vales" e as tangentes são traçadas.



Extremos Relativos

A Figura 3.6 mostra um gráfico mais geral. Observe que existem "picos" em C e E e 'vales" em B, D e G, mas só é possível traçar tangentes horizontais em B, C, D e G; no ponto E, que é um "ponto de quebra", não existe tangente. Além disso, existe uma tangente horizontal no ponto F, que não é um pico nem um vale. Nesta seção e na seguinte, vamos ver de que forma os métodos do cálculo podem ser usados para localizar e identificar os "picos" e "vales" de uma função, o que, por sua vez, facilita o traçado da curva associada e ajuda a resolver problemas de otimização.

FIGURA 3.6 Gráfico com vários tipos de "picos" e "vales".

Figura 93: Gráficos com vários tipos de "picos" e "vales".Fonte : Hoffmann & Bradley

Os pontos extemos de uma função são definidos logo após a análise do gráfico supracitado. Após a definição formal do conceito de extremos de uma função bem como o de ponto crítico, os autores apresentam um conjunto de gráficos que objetivam ilustrar a relação entre os pontos de máximo e mínimo relativos e os sinais da primeira derivada.

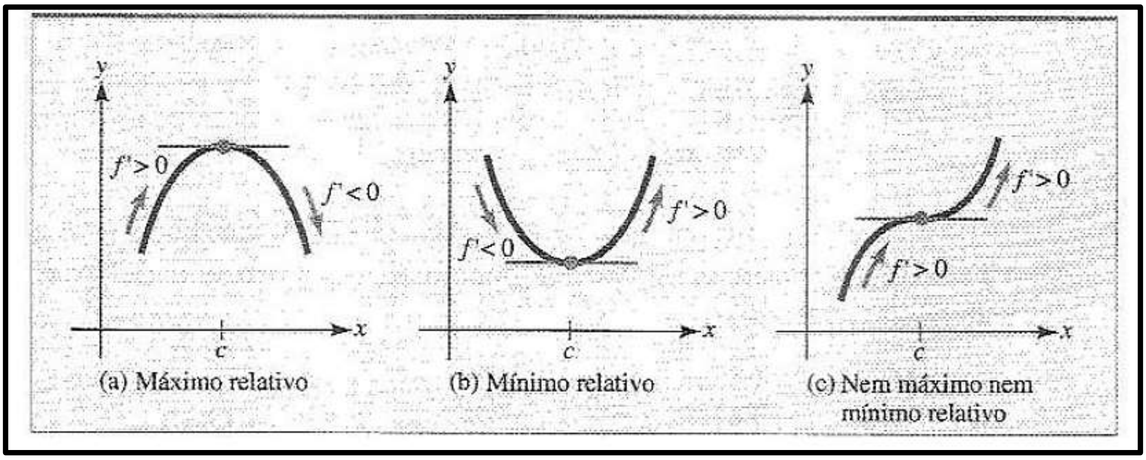
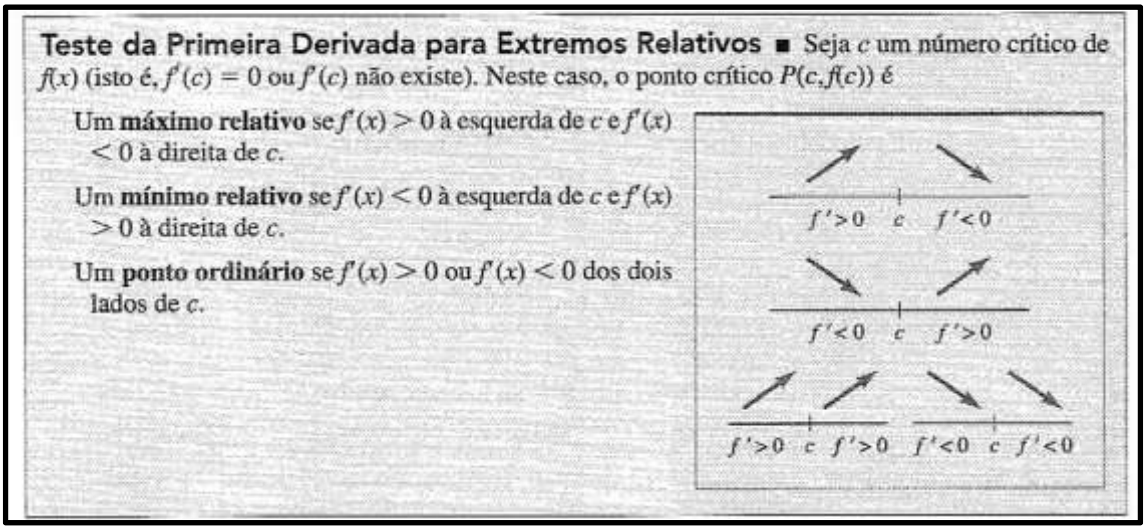


Figura 94: Representação dos máximos e mínimos relativos. Fonte : Hoffmann & Bradley

Os autores ainda apresentam representações gráficas de funções que possuem pontos de máximo ou mínimo, mas não possuem derivada definida nesses pontos.

A partir dos exemplos gráficos, nos quais os autores associam o sinal da derivada ao comportamento da função e, por conseguinte aos pontos extremos, o teste da derivada primeira é apresentado. Merece destaque a classificação dos pontos críticos em máximos relativos, mínimos relativos ou ordinários. Essa última classificação não foi encontrada em nenhuma das obras examinadas anteriormente.



Teste da Primeira Derivada para Extremos Relativos ■ Seja c um número crítico de $f(x)$ (isto é, $f'(c) = 0$ ou $f'(c)$ não existe). Neste caso, o ponto crítico $P(c, f(c))$ é

Um **máximo relativo** se $f'(x) > 0$ à esquerda de c e $f'(x) < 0$ à direita de c.

Um **mínimo relativo** se $f'(x) < 0$ à esquerda de c e $f'(x) > 0$ à direita de c.

Um **ponto ordinário** se $f'(x) > 0$ ou $f'(x) < 0$ dos dois lados de c.

Figura 95: Teste de derivada primeira e extremos de funções.Fonte : Hoffmann & Bradley

Ao analisarmos os exercícios propostos no capítulo, observamos a existência de questões cujo objetivo é meramente desenvolver a habilidade da manipulação algébrica dos alunos durante a resolução. Encontramos também exemplos cujo objetivo é desenvolver no aluno as capacidades de abstração e generalização, processos mentais, que segundo Dreyfus (2002) são constituintes do pensamento matemático avançado.

Embora os problemas de otimização sejam apresentados desde o momento em que são discutidos os conceitos de máximo e mínimos, é no final do terceiro capítulo, que encontramos um subcapítulo, cujo título é problemas práticos de otimização, destinado exclusivamente ao trabalho com esse objeto matemático. O subcapítulo inicia-se associando a ideia de estabelecer o processo de encontrar o ponto Máximo ou Mínimo de uma função. Logo em seguida, é apresentado um conjunto de procedimentos a serem utilizados para resolver um problema de otimização.

Método Geral para Analisar Problemas Práticos de Otimização

1º passo: Escolha a grandeza a ser otimizada. Em seguida, rotule todas as variáveis de interesse. Pode ser interessante usar letras que tenham alguma relação com a grandeza, como R para receita e A para área.

2º passo: Expresse as relações entre as variáveis em termos de equações ou desigualdades. Uma figura pode ajudar.

3º passo: Expresse a grandeza a ser otimizada (maximizada ou minimizada) em termos de apenas uma variável (a variável independente). Para isso, pode ser necessário usar uma ou mais das equações obtidas no 2º passo para eliminar outras variáveis. Determine também as possíveis restrições da variável independente.

4º passo: Se $f(x)$ é a grandeza a ser otimizada, calcule $f'(x)$ e determine todos os números críticos de f. Em seguida, determine o valor máximo ou mínimo pedido, usando os métodos da Seção 3.4 (a propriedade dos valores extremos ou o teste da derivada segunda para extremos absolutos). Dependendo do problema, pode ser necessário verificar o valor de $f(x)$ nos pontos extremos de um intervalo.

5º passo: Interprete os resultados em termos das grandezas físicas, geométricas ou econômicas apropriadas.

Figura 96: Procedimentos a serem utilizados na resolução de um problema de otimização.
Fonte :Hoffmann & Bradley

Os problemas apresentados são bastante parecidos com os problemas encontrados nas outras obras analisadas, sendo alguns deles, repetidos. Destacam-se os problemas aplicados a economia, a geometria, a física e a biologia. Encontramos também problemas relacionados à construção civil.

Ao pensarmos os capítulos analisados sob a perspectiva da construção de conceitos tendo como “pano de fundo” a teoria das representações semióticas, percebemos a utilização de várias formas de registros de representação em todas as atividades propostas. A utilização dessas representações é importante para a organização das informações sobre o objeto matemático que está sendo estudado, uma vez que que elas exerceram e exercem um papel primordial na construção do pensamento matemático.

Percebemos a preocupação dos autores em trabalhar com registros e com a articulação entre eles. Segundo Duval o trabalho com as representações se justifica pelo fato da impossibilidade da percepção dos objetos matemáticos sem a utilização dos registros, como acontece com os objetos reais do mundo físico.

Em vários exemplos propostos na obra, encontramos mudanças na forma de registro de representação utilizado, como por exemplo, a utilização de textos em língua natural, as representações algébricas e as representações gráficas e uma aproximação entre essas formas de registro. Para Duval, essa possibilidade de mudança se constitui uma condição necessária ao processo de aprendizagem. Desta forma, percebemos a preocupação dos autores com a construção dos conceitos.

Do ponto de vista da teoria do pensamento Matemático Avançado, percebemos nos capítulos analisados, a utilização de problemas contextualizados, que irão desenvolver no estudante a “formulação produtiva de conjecturas” como preconizado por Tall (1991).

Os problemas propostos, desenvolvem no aluno, um conjunto de habilidades como representação, visualização e generalização, processos esses que são apontados por Dreyfus (1991) como características do pensamento matemático avançado.

Embora, o trabalho com os objetos matemáticos partam sempre de situações que estimulem a construção de imagens de conceito, os autores sempre associam essas imagens as definições de conceito. Do ponto de vista da teoria do pensamento matemático avançado, as definições podem ajudar na formação da imagem conceitual e na prevenção de erros advindos de imagens equivocadas.

Em relação ao uso de ferramentas tecnológicas nas aulas de Cálculo, a obra apresenta um diferencial em relação a outras obras analisadas. Enquanto alguns autores usam os recursos tecnológicos apenas para facilitar em atividades mais “penosas” como por exemplo o traçado de gráficos de funções mais complexas, o presente livro, explora a tecnologia como elemento que promove uma discussão a respeito do objeto matemático estudado.

A forma como os recursos tecnológicos são propostos nas atividades, podem vir a constituir-se numa nova forma de se conduzir algumas atividades de Cálculo onde a interatividade e a cooperação corroborarão para construção de conceitos relacionados ao Cálculo Diferencial.

Uma vez apresentada à condução proposta pelos livros didáticos presentes na ementa de Cálculo I a respeito da construção do conceito de número critico de uma função real, apresentaremos no capítulo subsequente as entrevistas com professores e alunos na busca de encontramos mais informações a respeito do nosso objeto de investigação.

Como já mencionamos na abertura do capítulo, além de estudarmos a forma como foi conduzida a construção do conceito de Máximo e mínimo em uma função de uma variável real e sua articulação com os problemas de otimização em cada um dos livros, também nos preocupamos em verificar como cada um dos livros articulava-se com nosso aporte teórico. Para sintetizar essas informações elaboramos os quadros que se seguem.

Também nos propomos a investigar se a obra propõe atividades que utilizem recursos tecnológicos. Vale destacar que o ano em que o livro foi escrito/ editado foram levados em consideração no momento da análise.

Fundamentação Teórica	CATEGORIAS DE ANÁLISE	Leithold			Flemming e Gonçalves			J. Stewart			Munen e Foulis			Hoffmann e Bradley		
		Estudo das Derivadas	Pontos críticos [42]	Otimização	Estudo das Derivadas	Pontos críticos	Otimização	Estudo das Derivadas	Pontos críticos	Otimização	Estudo das Derivadas	Pontos críticos	Otimização	Estudo das Derivadas	Pontos críticos	Otimização
Teoria dasRepresentações Semióticas	Utilização de Representações Semióticas	☺	☺	☺	☺	☺	☺	☺	☺	☺	☺	☺	☺	☺	☺	☺
	Favorecimento da Construção de Imagens Mentais	☺	☺	😐	😐	😐	☺	☺	☺	☺	☺	☹	😐	☺	☹	☺
	Tratamentos	☺	☺	☺	☺	☺	☺	☺	☺	☺	☺	☺	☺	☺	☺	☺
	Conversões	☺	☺	😐	😐	😐	☺	☺	☺	☺	☹	☺	☺	☺	☺	☺
	Explicitação das unidades de Sentido	😐	☺	😐	😐	😐	😐	☺	☺	☺	😐	☹	😐	☺	☹	☺
	Atividades / Exemplos que favoreçam a mobilização de Registros semióticos	☺	☺	☺	☺	☺	☺	☺	☺	☺	☺	😐	☺	☺	😐	☺
	Atividades nas quais se evidenciamaspectos de Congruência	😐	😐	😐	😐	😐	😐	☺	☺	☺	😐	☹	☹	☺	☹	☺

Quadro 11 : Aspectos da Teoria das representações semióticas presentes nos livros analisados

Legenda:

☺	PRESENTE
😐	RARAMENTE
☹	AUSENTE

[42]Nesse contexto, quando nos referimos a pontos críticos estamos apenas nos referindo aos pontos de Máximo e/ou Mínimo

Fundamentação Teórica	CATEGORIAS DE ANÁLISE	Leithold			Flemming e Gonçalves			J. Stewart			Munen e Foulis			Hoffmann e Bradley		
		Estudo das Derivadas	Pontos críticos	Otimização	Estudo das Derivadas	Pontos críticos	Otimização	Estudo das Derivadas	Pontos críticos	Otimização	Estudo das Derivadas	Pontos críticos	Otimização	Estudo das Derivadas	Pontos críticos	Otimização
	Presença de Aspectos do Mundo Corporificado	☹	☺	☺	☹	😐	☺	☺	☺	☺	☺	☹	☺	☺	☹	☺
	Presença de Aspectos do Mundo Simbólico	☺	☺	☺	☺	☺	☺	☺	☺	☺	☺	☹	☺	☺	☹	☺
	Presença de Aspectos do Mundo Formal	☺	☺	☺	☺	☺	☺	☺	☺	☺	☺	☹	☺	☺	☹	☺
Três Mundos da Matemática	Atividades/ Exemplos que favoreçam a articulação entre os Três Mundos da Matemática	☹	☺	☺	☹	☹	☺	☺	☺	☺	☺	☹	☺	☺	☹	☺

Quadro 12: Aspectos da teoria dos Três Mundos da Matemática presentes nos livros analisados

Legenda :

☺	PRESENTE
😐	RARAMENTE
☹	AUSENTE

Chamamos a atenção ao fato de que os livros de Cálculo dos autores Munen e Foulis, bem como o dos autores Hoffmann e Bradley, embora tratem dos números críticos de uma função de uma variável real, não apresentam sua definição

Fundamentação Teórica	CATEGORIAS DE ANÁLISE	Leithold			Flemming e Gonçalves			J. Stewart			Munen e Foulis			Hoffmann e Bradley		
		Estudo das Derivadas	Pontos críticos	Otimização	Estudo das Derivadas	Pontos críticos	Otimização	Estudo das Derivadas	Pontos críticos	Otimização	Estudo das Derivadas	Pontos críticos	Otimização	Estudo das Derivadas	Pontos críticos	Otimização
Teoria do Pensamento Matemático Avançado	Atividades / Exemplos que favoreçam a articulação entre Imagem e Definição de Conceito	☺	☺	😐	😐	😐	😐	☺	☺	☺	☺	☹	☺	☺	☹	☺
	Atividades/ Exemplos que estimulem a visualização	☹	😐	😐	😐	😐	☺	☺	☺	☺	☺	☹	☺	☺	☹	☺
	Atividades /Exemplos que estimulem a representação Mental	☹	😐	😐	😐	😐	😐	☺	☺	☺	😐	☹	😐	☺	☹	☺
	Atividades/ Exemplos que estimulem a Representação Simbólica	☺	☺	☺	☺	☺	☺	☺	☺	☺	☺	☺	☺	☺	☺	☺
	Atividades/ Exemplos que estimulem a Mudança de representações	☹	😐	☺	😐	😐	😐	☺	☺	☺	😐	😐	☺	☺	☺	☺
	Atividades/ Exemplos que estimulem a modelação	☹	☹	☺	☹	☹	☺	😐	😐	☺	☹	☹	☺	😐	😐	☺
	Atividades/ Exemplos que estimulem a sintetização	☺	☺	☺	☺	☺	☺	☺	☺	☺	☺	☺	☺	☺	☺	☺

Quadro 13: Aspectos da teoria presentes nos livros analisados

Capítulo 05

As entrevistas

Realizamos entrevistas com os alunos que seriam os participantes da pesquisa, com alunos que já cursaram as disciplinas de Cálculo e também com os professores de Cálculo I, todos da universidade onde a pesquisa se desenvolveu.

Neste capítulo detalharemos e analisaremos os resultados das entrevistas realizadas.

5.1 A entrevista com os professores

Quando pensamos a rotina da sala de aula consideramos que professor e alunos são personagens complementares do processo de ensino e aprendizagem e desempenham papéis diferentes. Ao encontro desse pressuposto, Ponte (1992) nos afirma que professores de Matemática "são os responsáveis pela organização das experiências de aprendizagem dos alunos".

Uma vez que o objetivo do presente estudo é investigar os aspectos cognitivos e conceituais mobilizados na resolução de problemas de otimização por estudantes de engenharia entendemos ser pertinente entrevistar os professores de Cálculo I da universidade onde se desenvolveu o estudo para nos fornecer uma visão geral de quem eram esses professores e conhecer um pouco da sua atuação e suas concepções em relação ao nosso objeto de estudo.

O questionário foi composto de cinco perguntas e foram entrevistados os quatro professores que estavam atuando na disciplina Cálculo no semestre em que a coleta de dados aconteceu. Os professores foram identificados pelas letras A, B, C e D.

Em relação à formação dos professores, todos possuem formação inicial em Matemática, na modalidade Licenciatura. Em relação aos cursos de pós-graduação, os resultados estão apresentados na tabela 02.

Tabela 2:Formação em nível de pós-graduação dos professores participantes da pesquisa

Professor	Pós-graduação	Área de concentração da pós-graduação.
A	Mestre	Engenharia
B	Doutor	Engenharia
C	Doutorando	Engenharia
D	Mestrando	Engenharia

Fonte: Questionário de entrevistas

Quando perguntados a respeito do curso em que lecionam, os professores informaram que são alocados em um curso, mas como os alunos tem a liberdade de montar seus horários, todos os professores de Cálculo I, trabalham com alunos das várias modalidades do curso de engenharia oferecidos pela universidade.

O tempo médio de trabalho dos professores entrevistados na disciplina Cálculo I foi de 14 semestres consecutivos, ou seja, 7 anos.

Quando perguntados sobre a importância do trabalho com problemas de otimização, todos os professores disseram ser importante o trabalho com esse objeto matemático. Chamou-nos atenção da resposta do professor “B”:

> *“Acredito na potencialidade e na importância dos problemas de otimização. Durante todo o tempo que ensino Cálculo I, quando chegamos nessa parte do conteúdo encontramos problemas semelhantes: os alunos não gostam dos problemas, pois estes exigem deles conceitos para além do Cálculo Diferencial, como conceitos de Geometria e também uma boa dose de interpretação. Outro fator que me incomoda é o pouco tempo que temos para o trabalho com otimização. Temos uma ementa engessada e pesada em quantidade de conteúdos. No final das contas acabamos por tendo uma média de 4 aulas para tratar desse assunto. Com essa carga o trabalho fica prejudicado.”(professor “B”)*

Em relação aos recursos/estratégias usados nas aulas para o trabalho com pontos de máximo e/ou de mínimode uma função de variável real, todos os professores entrevistados informaram trabalhar com o material didático adotado pela universidade, aulas expositivas e listas de exercícios. Destacamos a fala dos professores “C” e “B” em relação a pergunta feita.

> *“Utilizo os textos que os livros têm, ou seja, o material didático e minhas listas de exercícios. Quanto as estratégias costumo levar alguns slides com gráficos para facilitar os alunos enxergarem os pontos no gráfico. Eles têm muita dificuldade em enxergar e desenhar gráficos.”*(Professor “C”)

...

> *“Trabalho com o livro base adotado pela instituição. Como apoio, elaboro listas de exercícios. Nessas listas alguns exercícios eu apresento a resolução das atividades e em outros eu apresento o resultado final. Opto por essa prática pois não tenho tempo para corrigir todos os exercícios. Sempre percebi muitas dificuldades dos alunos em visualizar os gráficos então solicitei que a faculdade instalasse em um dos laboratórios um software de geometria dinâmica, mas preciso ser honesto, com a carga horária que tenho e com o volume de conteúdos a serem dados no semestre, vou ao laboratório uma vez no semestre quando dá tempo.”*(Professor “B”)

De acordo com Gravina & Santarosa (1999),o conhecimento em matemática é construído a partir de muita investigação e exploração e a formalização é simplesmente o coroamento deste trabalho, que culmina na escrita formal e organizada dos resultados obtidos. Nesse sentido, também encontramos as ideias de Tall e Vinner (1981), quando nos afirmam que para que um conceito matemático seja construído, faz-se necessário uma familiarização por parte dos alunos, das ideias relacionadas a esse conceito.

Observamos nas manifestações dos professores uma tentativa de propor atividades que ofereçam alguma postura investigativa, seja para análise de gráficos apresentados em slides ou pela a utilização de softwares de geometria dinâmica. Constatamos que os professores em questão entendem que ambientes computacionais podem vir a se constituir em ambientes facilitadores da aprendizagem. Chama-nos atenção o fato de tais iniciativas não terem sido efetivamente implementadas por conta de uma ementa muito densa, e uma carga horária que impede o professor de propor aos alunos atividades investigativas e exploratórias, importantes para a construção de conceitos em Matemática.

Quando questionados a respeito da possibilidade dos problemas de otimização se tornarem agentes motivadores para o ensino de Cálculo Diferencial e Integral, e, mais especialmente, para o estudo da variação de funções, os entrevistados afirmaram que acreditavam nessa possibilidade. Vale destacar que todos os professores disseram que para esse fato ser implementado a carga horária de aulas semanais de Cálculo I precisaria ser revista.

Em relação aos livros utilizados para elaboração das aulas, as respostas variaram entre o material adotado pela instituição e alguns dos livros presentes na ementa da disciplina de Cálculo I. Apresentamos as respostas na Tabela 2.

Tabela 2: Obras utilizadas pelos entrevistados para elaboração das aulas

Nome da Obra/Autor	Número de professores que usam a obra para organizar suas aulas
O Cálculo com Geometria Analítica – Louis Leithold – Volume 1. São Paulo: Harbra, 1994	03
Cálculo A– Diva Marília Flemming e MíriamBuss Gonçalves – Editora Makron Books – Volume Único – São Paulo – 1992	03
Cálculo - James Stewart - Volume 1. São Paulo: Cengage Learning, 2006.	05
Cálculo I – Mustafa A. Munem e David J. Foulis, Rio de Janiero, LTC, 1982	04
Cálculo um curso moderno e suas aplicações, Hoffmann Laurence e Bradley Gerald, 9ª edição, LTC, 2008.	04

Fonte: Questionário aplicado aos professores

Vale destacar que o exame das obras no que se refere aos pontos de Máximo e /ou Mínimo e aos problemas de otimização foi feito no capítulo anterior.

5.2 Entrevista com os participantes da pesquisa

Os participantes da pesquisa foram alunos do bacharelado em Engenharia que durante a intervenção cursavam no mínimo o terceiro semestre da graduação, voluntários, tendo sido escolhidos mediante os seguintes critérios:

- ✓ terem disponibilidade para estarem da universidade aos sábados
- ✓ já terem sido aprovados na disciplina de Cálculo I.

Como a intenção foi observar e analisar os significados construídos por estudantes, quando inseridos em ambientes de ensino de Cálculo Diferencial, levando em consideração a interatividade entre os mesmos, optamos por trabalhar com 10 alunos que possuíssem o perfil retro mencionado, que trabalharam em duplas durante a maior parte do tempo. Antes de escolhermos os 10 alunos que efetivamente participariam da pesquisa, fomos à sala de um professor de Cálculo II que se propôs a ajudar nessa fase da pesquisa, para convidar os alunos que tivessem interesse em participar das intervenções.

A turma era constituída por 54 alunos. O objetivo da pesquisa foi explicado aos alunos e a entrevista inicial foi marcada para sábado dia 22/04/2016, às 9h da manhã numa das salas de aula da universidade onde a pesquisa se desenvolveu. Dos 54 alunos matriculados, 22 compareceram no sábado para a entrevista.

A entrevista foi composta de um questionário dividido em duas etapas: na primeira parte, foram colhidas informações pessoais dos alunos, como curso, etc. Já na segunda parte do questionário, foram feitas perguntas mais específicas relacionadas ao objeto do presente estudo, que podemos considerar como um diagnóstico inicial. Dos 22 alunos que participaram da entrevista, 17 eram alunos do terceiro período de engenharia e 05 eram alunos do quarto período que haviam sido reprovados em Cálculo II e estavam repetindo a disciplina.

5.3 Sobre os aspectos pessoais e acadêmicos

Embora a turma onde a pesquisa estivesse sendo realizada fosse uma turma de Engenharia Elétrica, por motivos já explicados, os alunos que foram entrevistados eram de outros cursos, como mostra a tabela 3.

Tabela 3 :Número de entrevistados por curso

Curso de Origem	Quantitativo de alunos
Engenharia Civil	07
Engenharia Elétrica	11
Engenharia de Produção	04

Fonte: Questionário dos alunos

A idade média dos entrevistados é de 23,7 anos sendo que essas idades variam de um mínimo de 19 anos ao máximo de 40 anos.

De acordo com os dados obtidos pelas entrevistas tanto com alunos como com professores de Cálculo I, constatamos que os alunos não tinham contato com softwares que permitissem o traçado de gráficos. Nesse sentido, fez-se necessária uma oficina para ambientar os alunos com os softwares que foram utilizados em nosso estudo: um para o traçado de gráfico de funções e outro de geometria dinâmica.

Um dos fatores que o pesquisador levou em consideração ao elaborar o questionário foi o fato de que um curso de Cálculo para a Engenharia exige do aluno um tempo de estudo bastante significativo. Sendo assim, seria interessante saber se os entrevistados teriam tempo exclusivo para os estudos. Optou-se assim por saber se os entrevistados trabalhavam ou não; 63,6% dos estudantes trabalham.

Como a universidade onde a pesquisa se desenvolveu recebe alunos de outras cidades e o tempo gasto com deslocamento entre as cidades deve ser levado em consideração quando se pensa no tempo livre para se dedicar aos estudos, sentimos a necessidade de verificarmos quantos alunos, dentre os entrevistados, residiam fora do município onde a pesquisa se desenvolveu; constatamos que 22,7% dos estudantes mora fora do município.

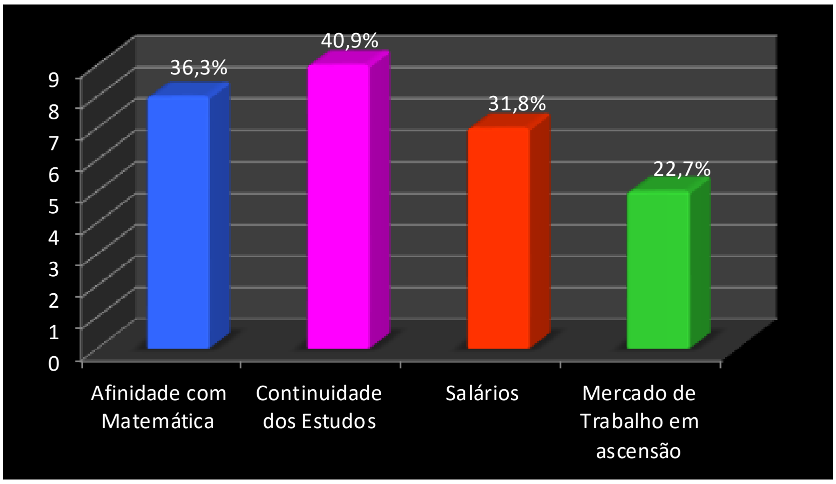
Em relação ao tempo de descolamento, os dados encontrados nos questionários, nos informam que o tempo médio de deslocamento para chegar a universidade é de aproximadamente 1,75h.

Em conversa informal com os alunos após a entrevista, o pesquisador ouviu dos alunos que residem fora, que outros colegas não puderam comparecer para a entrevista, por não poderem contar com o transporte gratuito oferecido pelos seus municípios de origem. Tal transporte só é oferecido de segunda a sexta-feira, o que acaba impedindo que esses alunos também escolham alguma disciplina que é oferecida nos sábados ou qualquer outra atividade acadêmica.

O alto índice de reprovação em Cálculo é reconhecido. Muitas são as pesquisas que buscam entender e/ou apontar essas causas. Nesse cenário, destacamos Machado (2008). Para Machado(2008), uma das possíveis causas da situação em que se encontra o ensino de Cálculo, seriam as dificuldades de natureza epistemológica, ou seja, "o conjunto de deficiências que os estudantes de Cálculo possui mas que foi construído ao longo de sua via escolar, ou seja, são "anteriores ao espaço – tempo" do ensino de Cálculo". Nessa perspectiva, resolvemos investigar qual a origem dos alunos participantes da entrevista no que se refere à sua escolarização em nível Médio e constatamos que 72,7% dos alunos fizeram o ensino médio na escola pública. Dentre os alunos que fizeram escola pública, 56% fizeram algum curso técnico que se relacionava com a engenharia.

Oliveira (2004), ao explicar o motivo do crescimento do número de alunos no Ensino Superior, considera as mudanças ocorridas no contexto social e político, em razão do Ensino Superior poder oferecer ao cidadão uma possibilidade de ascensão e de transformação do seu "status quo", além de objetivar a formação de profissionais capacitados às necessidades do mercado de trabalho. Baseados nessa reflexão, resolvemos investigar sobre que fatores foram responsáveis pela escolha pelo ingresso na graduação em Engenharia por parte dos estudantes entrevistados, apresentados no Gráfico 1

Gráfico 1 : Motivo pelo qual você escolheu cursar Engenharia



Fonte: Questionário respondido pelos participantes

Resumindo as informações gerais dos alunos, podemos dizer que os alunos têm idade média de 24 anos, e, em geral, trabalham e moram no mesmo município. Com as informações supracitadas, concluímos as entrevistas, na parte prospectiva do Design.

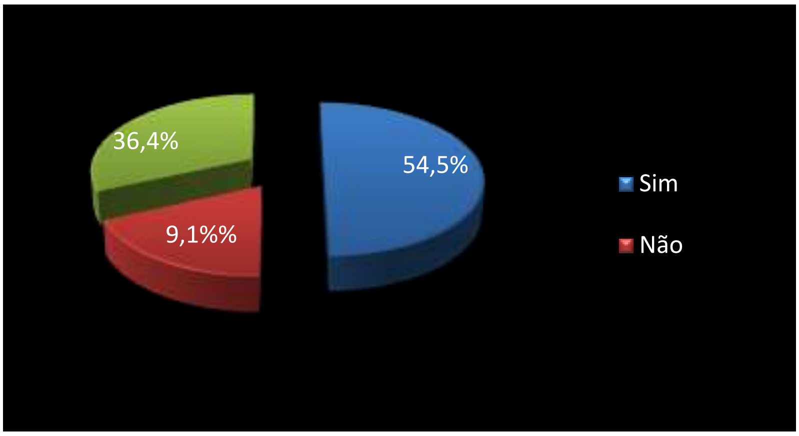
5.4. Segunda parte da entrevista: questões relacionadas ao conteúdo

A primeira questão da segunda parte da entrevista foi:

Durante o seu curso de Calculo Diferencial e Integral você estudou pontos críticos de uma função de uma variável real?

Organizamos as respostas no Gráfico 2.

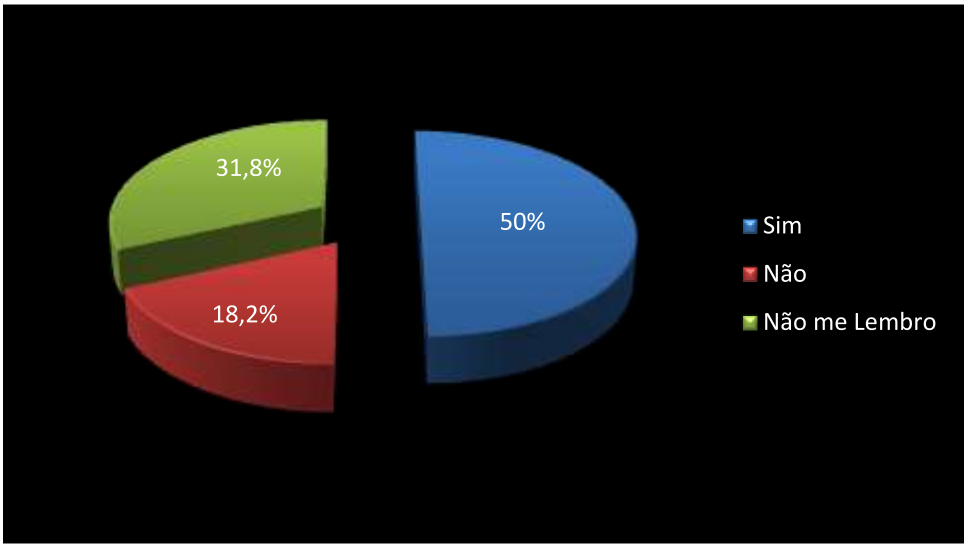
Gráfico 2:Durante o seu curso você estudou Pontos Críticos de uma função de uma variável real?



Fonte: Questionário respondido pelos participantes

A próxima pergunta reitera, de alguma forma, o fato dos alunos terem estudado pontos críticos. Os alunos foram perguntados se já haviam estudado os problemas de otimização

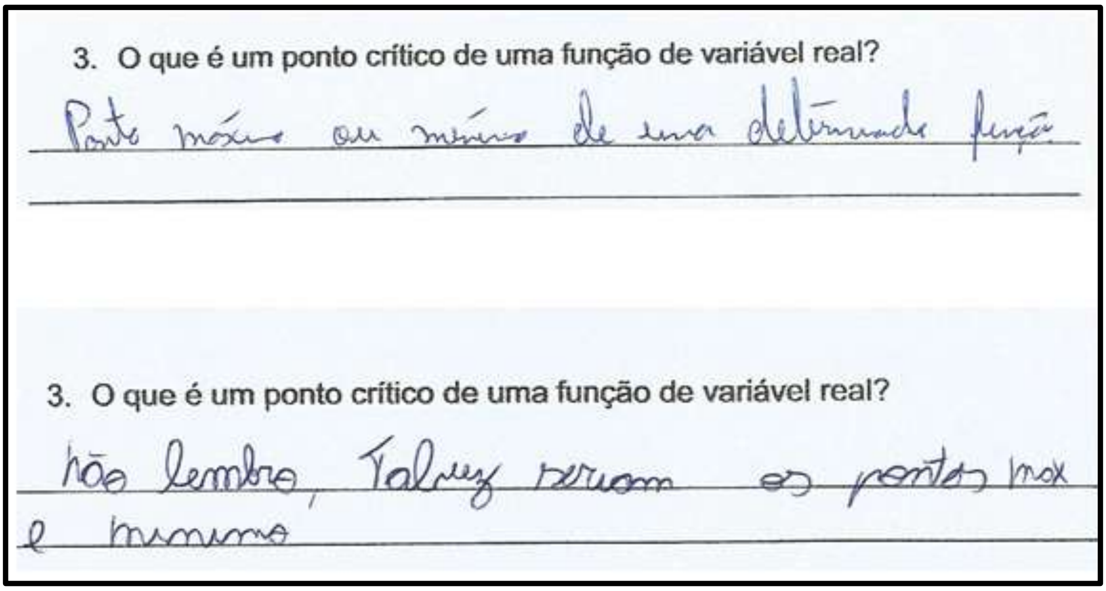
Gráfico 3: Você já estudou problemas de Otimização?



Fonte: Questionário respondido pelos participantes

Ainda na busca por identificar as imagens do conceito a respeito de ponto crítico de uma função de variável real, optamos por perguntar o que era um ponto crítico.

Apresentaremos a respostas dadas por alguns dos alunos. Chamaremos os alunos de X e Y.



3. O que é um ponto crítico de uma função de variável real?

Ponto máximo ou mínimo de uma determinada função

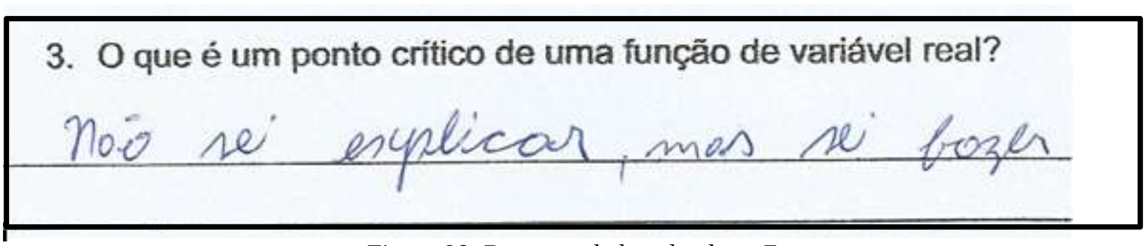
3. O que é um ponto crítico de uma função de variável real?

não lembro, Talvez seriam os pontos max e mínimo

Figura 97 : Resposta dada pelos alunos X e Y

Embora os alunos não tenham mencionado a definição de ponto crítico de uma função, constatamos que eles associam o conceito de ponto crítico à ideia de ponto de Máximo e de Mínimo de uma função de variável real.

Outra resposta dada pelo aluno que chamaremos de F, evidenciou as ideias de Silva (1999) no que se refere à supremacia dos procedimentos algébricos em detrimento dos relativos à apreensão do conceito.



3. O que é um ponto crítico de uma função de variável real?

Não sei explicar, mas sei fazer

Figura 98: Resposta dada pelo aluno Z

Estamos cientes de que nas aulas de Cálculo I, os exercícios são necessários, pois é por meio deles que os alunos vão desenvolver e consolidar suas habilidades. Também nossa experiência mostra que boa parte dos alunos não percebe esse fato e acabam não entendendo o propósito dos exercícios A saída para esse quadro seria a utilização de situações que provocassem nos alunos a curiosidade e o espírito investigativo.

Uma vez que os objetos de estudo do Cálculo são assuntos demasiadamente abstratos, cabe, ao professor a utilização de recursos que sejam capazes de tornar esses objetos concretos, facilitando assim sua apreensão.

De acordo com Laudares e Miranda(2007) a universidade, por ser uma instituição social, não pode se recusar a utilizar os conhecimentos tecnológicos que os alunos trazem consigo. Segundo os autores, boa parte dos professores ainda relutam em inserir, em sua praxis, recursos que podem promover uma inversão da situação de passividade dos alunos para uma situação de interatividade.

Por concordarmos com o fatos que expusemos, entendemos que deveríamos investigar, junto aos entrevistados, que recursos os professores de Cálculo I usavam em suas aulas.

Os resultados encontram-se na Tabela 4.

Tabela 4: Recurso utilizado pelo professor nas aulas de Cálculo I

Recurso Utilizado	Percentual de utilização
Calculadora Científica	90,9%
Calculadora Gráfica	0%
Computadores	18,2%
Laboratório de Informática	18,2%
Sotwares com Geogebra, Winplot e outros	15,7%
Lista de Exercicios	100%
Aulas expositivas	45,5%
Livros	0%

Fonte: Questionário dos alunos

A próxima etapa do questionário visou verificar se os alunos dominavam, ainda que minimamente as ideias de otimização. Para tanto, perguntamos aos entrevistados se eles se lembravam de como resolver um problema de otimização; 77,3% dos estudantes afirmaram que não se lembram. Pudemos, então, verificar que, embora 50% dos entrevistados afirmassem já terem estudado problemas de otimização, apenas 22,7% deles afirmaram se recordar de como resolver um problema de otimização.

Optamos neste momento por oferecer aos entrevistados dois problemas de otimização, com o objetivo de investigar se os alunos resolveriam esses problemas e que estratégias usariam durante a resolução. Apresentaremos a seguir os problemas que constavam nas entrevistas e um relato relacionado aos dados que obtivemos pela análise dos protocolos de respostas.

O primeiro problema proposto aos entrevistados foi:

a) Dentre os números naturais cuja soma é 7, determine aqueles cujo produto é máximo.

Figura 99 : Problema 1

Durante a entrevista, um dos alunos questionou o pesquisador sobre quantos eram os números que deveriam ser considerados na resolução da questão. Nesse instante, o pesquisador informou a todos os entrevistados que deveriam ser considerados apenas dois números naturais.

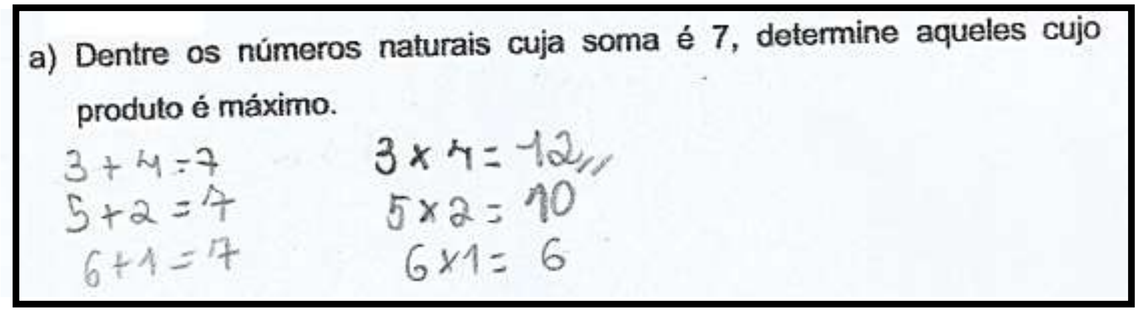
Dos 22 entrevistados, o desempenho foi o seguinte:

Tabela 7: Desempenho dos alunos no problema 1

Desempenho	Quantitativo	Percentual
Acertaram	11	50%
Não Fizeram	08	36,4%
Erraram	03	13,6%

Fonte: Questionário dos alunos

Quando analisamos as resoluções dos exercícios dos entrevistados que acertaram a questão, verificamos que **todos** resolveram por tentativa, como mostra o protocolo reproduzido na figura abaixo:


a) Dentre os números naturais cuja soma é 7, determine aqueles cujo produto é máximo.

3 + 4 = 7   3 x 4 = 12

5 + 2 = 7   5 x 2 = 10

6 + 1 = 7   6 x 1 = 6

Figura 100: Desenvolvimento comum a 50% dos protocolos

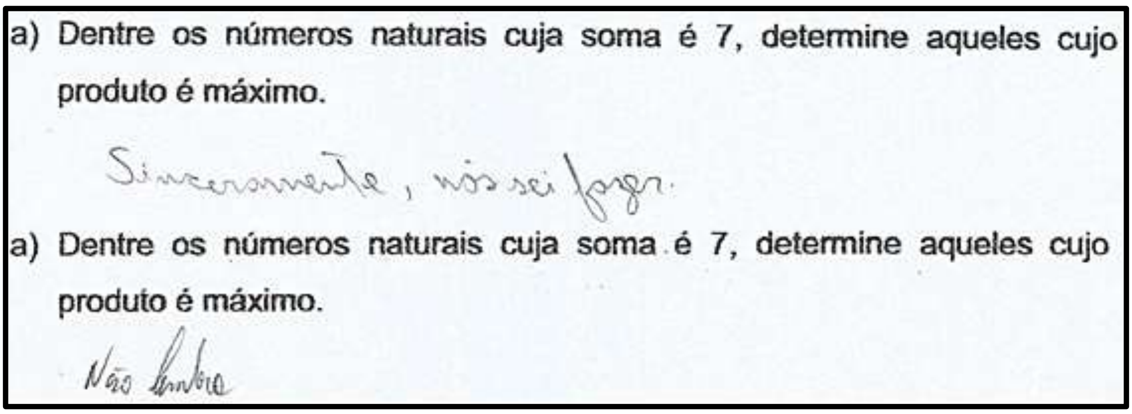
Ao observamos essa resolução verificamos que os alunos que resolveram a questão optaram por listar os possíveis números que satisfizessem a condição inicial do problema proposto.

Se observarmos o processo utilizado por esses alunos, sob a perspectiva da teoria do pensamento matemático avançado, vemos o que, de acordo com Dreyfus (1991) distingue o pensamento matemático elementar e o avançado: a complexidade como o objeto matemático é tratado.

Nessa perspectiva somos levados a concordar com o autor quando ele nos diz que, “é possível tratar assuntos avançados de maneira elementar”. Ao nosso ver, essa afirmativa é facilmente ilustrada pela resolução acima.

Dentre as resoluções que encontraram a resposta correta, nenhum dos alunos escreveu o par formado pelos algarismos 0 e 7.

Ao analisarmos os protocolos dos alunos que não fizeram a questão, observamos que a justificativa apresentada por eles é o fato de não lembrarem de como evidenciar as respostas reproduzidas na figura 101.


a) Dentre os números naturais cuja soma é 7, determine aqueles cujo produto é máximo.

Sinceramente, não sei fazer.

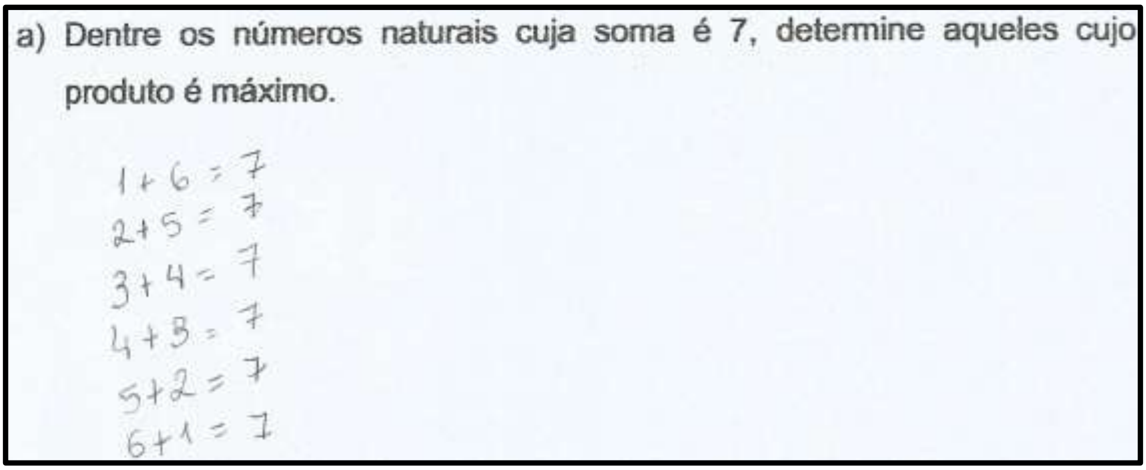
a) Dentre os números naturais cuja soma é 7, determine aqueles cujo produto é máximo.

Não lembro

Figura 101: Justificativa de dois dos alunos que não resolveram o problema 1

Causou-nos surpresa o fato de aproximadamente 36% dos alunos não ter resolvido o problema sequer por tentativas.

Dentre os alunos que erraram o problema proposto, destacamos o protocolo reproduzido na figura.



a) Dentre os números naturais cuja soma é 7, determine aqueles cujo produto é máximo.

1+6=7
2+5=7
3+4=7
4+3=7
5+2=7
6+1=7

Figura 102: Protocolo de resolução de um dos alunos que erraram o problema 1

Observamos que, embora o estudante tenha tentado resolver o problema por tentativa, ele desconsiderou o fato de que quando escreveu " 1+ 6= 7" e " 6+1=7" na verdade escreveu os mesmos algarismos. Sentimos falta também da presença do 0+7.

Para Duval (1999) o acesso aos objetos matemáticos passa necessariamente por representações semióticas, que são externas e conscientes ao indivíduo. Exemplos de registro de representação semiótica são a escrita em língua natural, escrita algébrica, tabelas, gráficos cartesianos. Ainda segundo Duval (2003), uma das atividades cognitivas que caracteriza uma representação semiótica é a formação de uma representação identificável, ou seja, quando é possível reconhecer nesta representação aquilo que ela representa. Uma atividade cognitiva, que, ao nosso ver, não foi mobilizada pelo aluno que estamos analisando a resolução, é a conversão. Observamos que o aluno não conseguiu converter a informação da língua natural para a linguagem simbólica, ou a converteu parcialmente.

Observemos novamente a resolução da Figura 103.

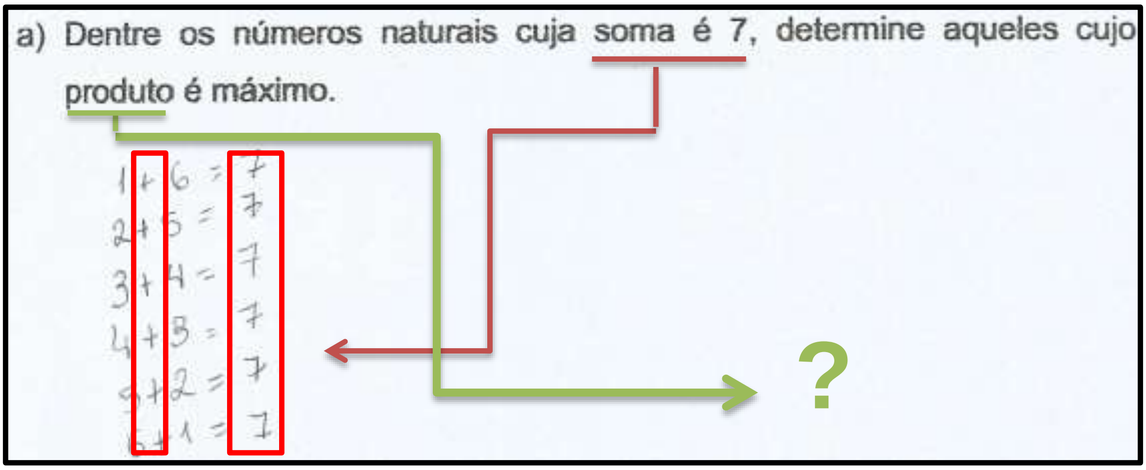


Figura 103:Revisitando a resolução anterior

Analisando o protocolo da Figura 103, podemos observar que quando se tratou da primeira parte do enunciado, houve o que Duval (2012) chama de congruência semântica, ou seja, o aluno reconheceu o objeto matemático, ao passo que, quando esse reconhecimento não ocorreu, não há congruência semântica como observamos na segunda parte do enunciado. A ausência da congruência impediu que a atividade fosse resolvida.

Uma outra "tentativa" de resolução que nos chamou a atenção foi a que apresentamos na Figura 104.

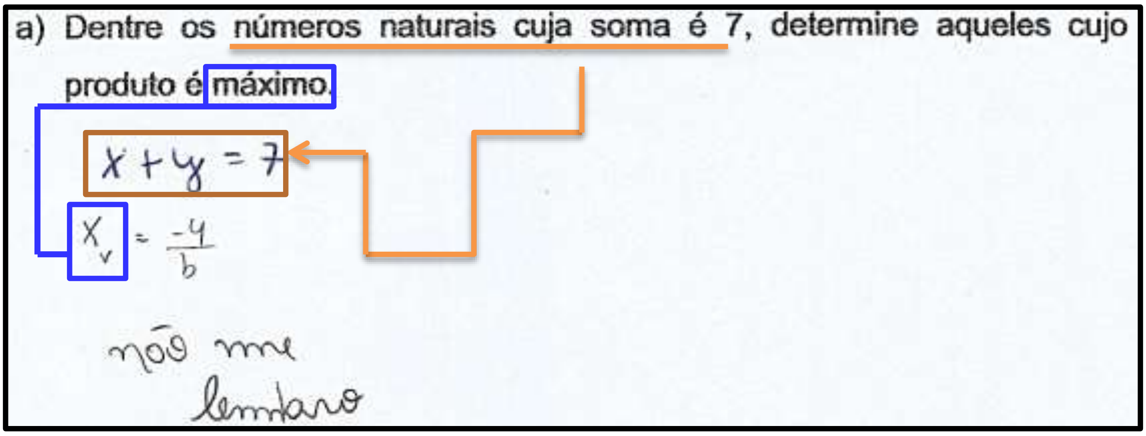


Figura 104: Protocolo do segundo aluno que errou o problema 1

Ao analisarmos essa resolução da Figura 104 verificamos que também acontece congruência semântica na primeira parte do enunciado, como no exemplo anterior. A diferença está no fato de que nesse protocolo, foi usada pelo estudante, a representação em linguagem algébrica.

Outro fator que nos chama atenção foi o fato de o aluno associar a palavra **máximo** ao “x” do vértice de uma função do 2º grau, mesmo errando a fórmula. Tal ação reforça a ideia de que, para o aluno em questão, o “x_V”ou seja, a abscissa do vértice de uma função de segundo grau, é uma das imagens de conceito da maximização de funções.

De acordo com Vinner (1991), quando um indivíduo ouve o nome de um conceito, ele produz um estímulo que aciona algo em sua memória caracterizado como imagem do conceito. Dessa forma, pode-se afirmar que a imagem do conceito é algo presente em nossa mente que associa uma coisa não verbal ao nome do conceito. Segundos os autores, a aprendizagem de um conceito requer o desenvolvimento anterior de uma imagem de conceito suficientemente rica. Podemos então observar que esse conceito não foi plenamente construído o que implicou no fato da questão não ter sido resolvida.

A segunda questão proposta era mais “sofisticada” do ponto de vista tanto da resolução, quanto da interpretação.

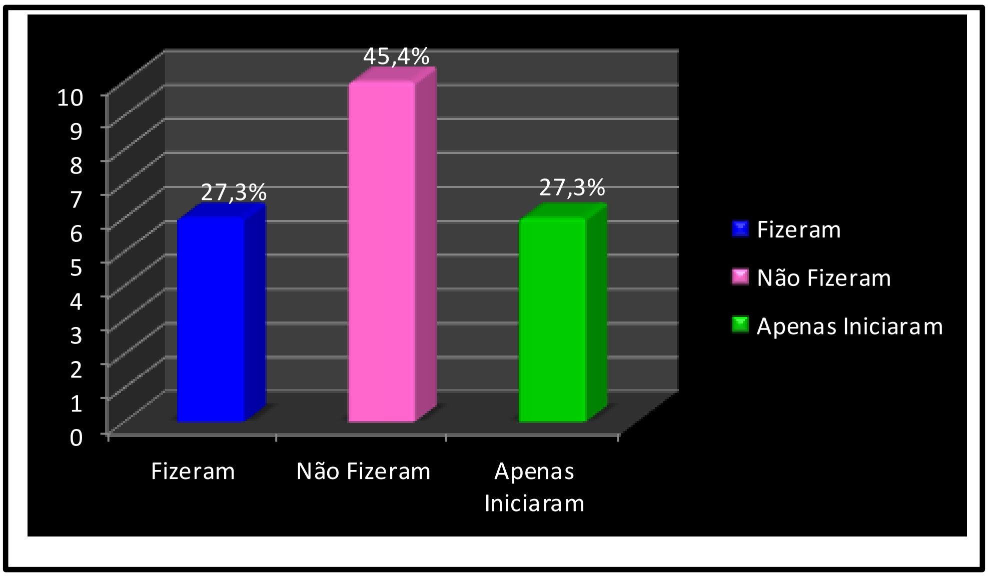
b) Pretende-se estender um cabo de uma usina de força à margem de um rio de 900m de largura até uma fábrica situada do outro lado do rio, 3.000m rio abaixo. O custo para estender um cabo pelo rio é de R$ 5,00 o metro, enquanto que para estendê-lo por terra custa R$ 4,00 o metro. Qual é o percurso mais econômico para o cabo?

Figura 105: segunda questão proposta

Para facilitar a análise, separamos os protocolos em três categorias de análise, a saber: fizeram a questão, não fizeram a questão e apenas iniciaram a questão. Entendemos ser ideal não classificar em acertaram ou não acertaram, pois dos 22 participantes, todos cometeram erros na solução.

Observe o percentual dos entrevistados presentes em cada categoria de análise elencada.

Gráfico 4: Desempenho dos Alunos no problema 2



Fonte: Questionário dos alunos

Quando analisamos os protocolos dos alunos que apenas começaram a fazer a questão, fica claro que o grande problema enfrentado por eles foi compreender a descrição feita no enunciado, fazer a representação da situação proposta e considerar que o fio poderia ser estendido parte por terra e parte sobre a água.

Destacamos três tentativas de resolução para o mesmo problema que chamaremos: resolução A, resolução B e resolução C.

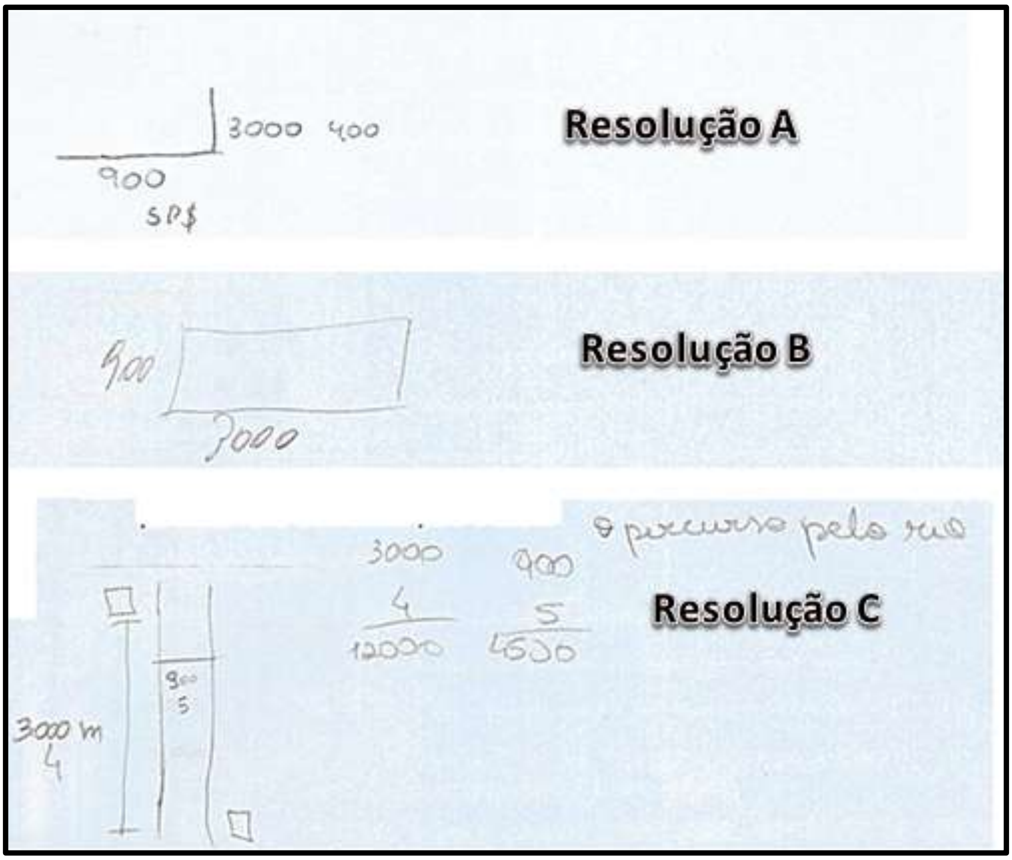
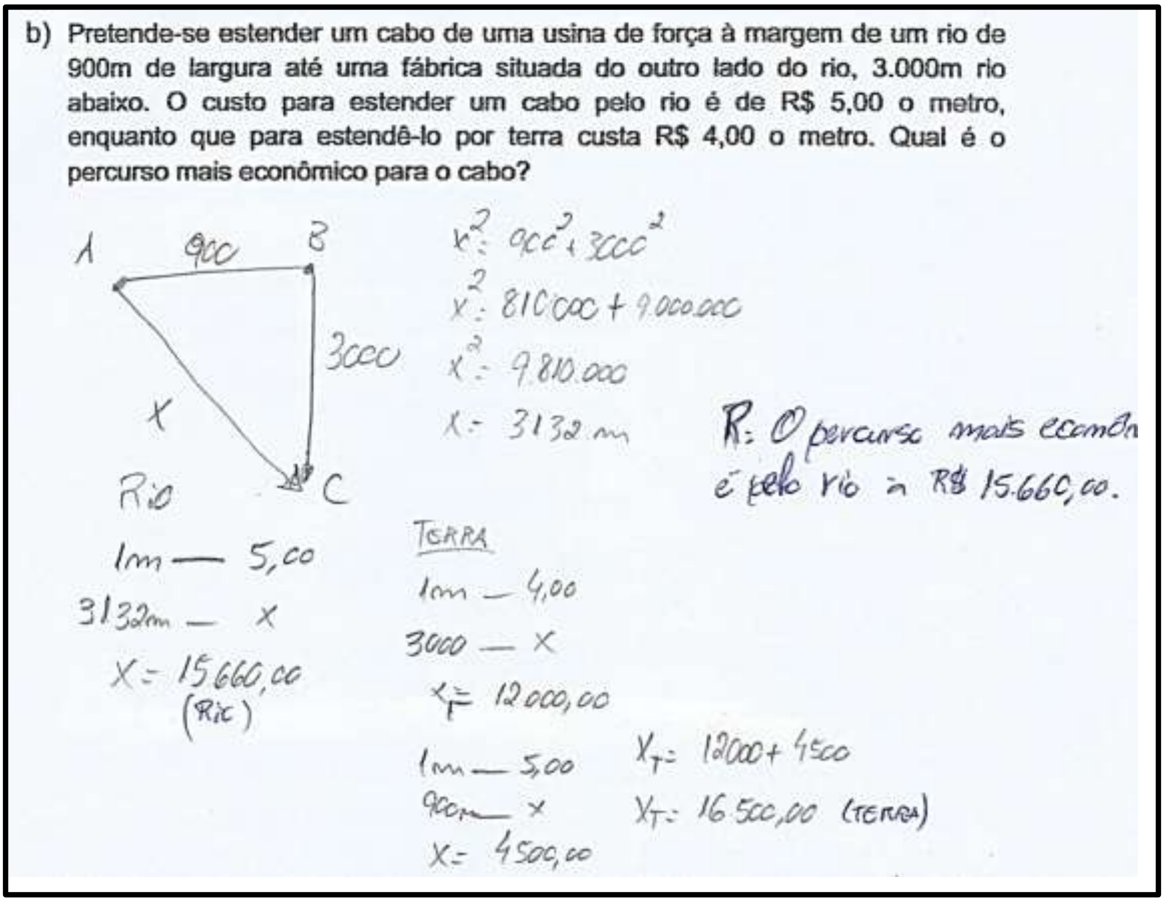


Figura 106: Resoluções A, B e C para o problema 2

Observamos que os três estudantes não conseguiram elaborar uma representação mínima para o que o problema narrava.

Nessa perspectiva, Dreyfus (1991) nos afirma que o processo de representação está ligado às representações que utilizamos dos objetos matemáticos e às representações que fazemos dos mesmos em nossa mente, ou seja, existem representações simbólicas e representações mentais e, tais representações são utilizadas no contexto matemático. Para esse autor são as representações que possibilitam o nosso pensar matematicamente. No nosso contexto, a precariedade da representação pode justificar a não resolução da questão.

A terceira categoria de análise foi aquela que contempla os alunos que resolveram a questão sem chegar ao resultado correto. Chamou-nos a atenção as seguintes resoluções, que chamaremos de “D” e “E” apresentadas nas Figuras 107 e 108.



b) Pretende-se estender um cabo de uma usina de força à margem de um rio de 900m de largura até uma fábrica situada do outro lado do rio, 3.000m rio abaixo. O custo para estender um cabo pelo rio é de R$ 5,00 o metro, enquanto que para estendê-lo por terra custa R$ 4,00 o metro. Qual é o percurso mais econômico para o cabo?

A 900 B

3000

x

Rio C

$x^2 = 900^2 + 3000^2$

$x^2 = 810000 + 9000000$

$x^2 = 9810000$

$x = 3132\ m$

R: O percurso mais econômico é pelo rio R$ 15.660,00.

1m — 5,00

3132m — x

x = 15660,00

(Rio)

TERRA

1m — 4,00

3000 — x

$x_T = 12000,00$

1m — 5,00

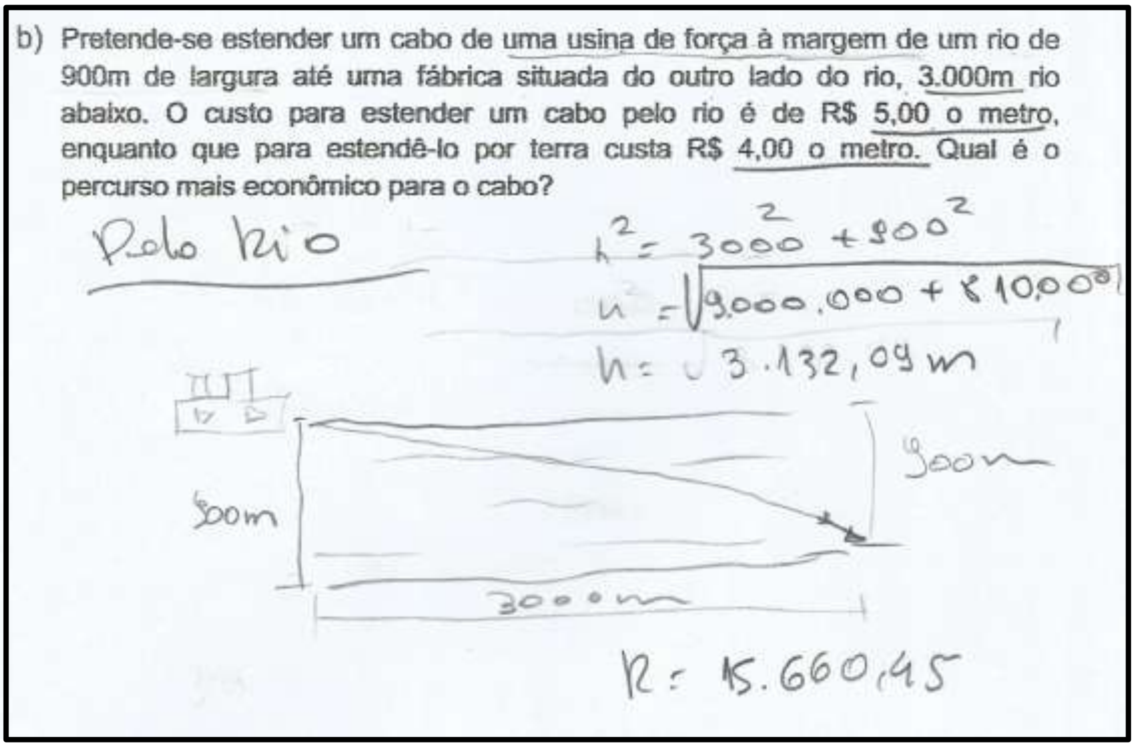
900m — x

x = 4500,00

$X_T = 12000 + 4500$

$X_T = 16500,00$ (TERRA)

Figura 107: Resolução "D" do problema 2



b) Pretende-se estender um cabo de uma usina de força à margem de um rio de 900m de largura até uma fábrica situada do outro lado do rio, 3.000m rio abaixo. O custo para estender um cabo pelo rio é de R$ 5,00 o metro, enquanto que para estendê-lo por terra custa R$ 4,00 o metro. Qual é o percurso mais econômico para o cabo?

Pelo Rio

$h^2 = 3000^2 + 900^2$

$h = \sqrt{9.000.000 + 810.000}$

$h = 3.132,09\ m$

900m

900m

3000m

R: 15.660,45

Figura 108: Resolução "E" do problema 2

Tais resoluções nos evidenciam a importância das representações no desenvolvimento da atividade matemática.

Levando em consideração a importância das representações, sejam elas mentais ou simbólicas, devemos estar conscientes e atentos ao fato de que se a representação mental concerne a esquemas internos que as pessoas utilizaram para se relacionar com o mundo externo, as representações simbólicas devem ser externadas de forma escrita ou falada, com o objetivo de tornar a comunicação mais compreensível sobre o conceito.

Nessas duas últimas resoluções apresentadas observamos que os alunos levaram em consideração apenas duas possibilidades de trajetória: ou o cabo iria apenas por terra, ou apenas pela água (como evidencia a resolução "D"), desconsiderando a possibilidade de o trajeto ser misto, ou seja, parte dele ser realizado por terra e parte pela água, que, nesse caso é a solução que minimiza o custo.

A última questão da entrevista tinha por objetivo tentar encontrar os motivos que impediram a resolução de algum dos problemas propostos.

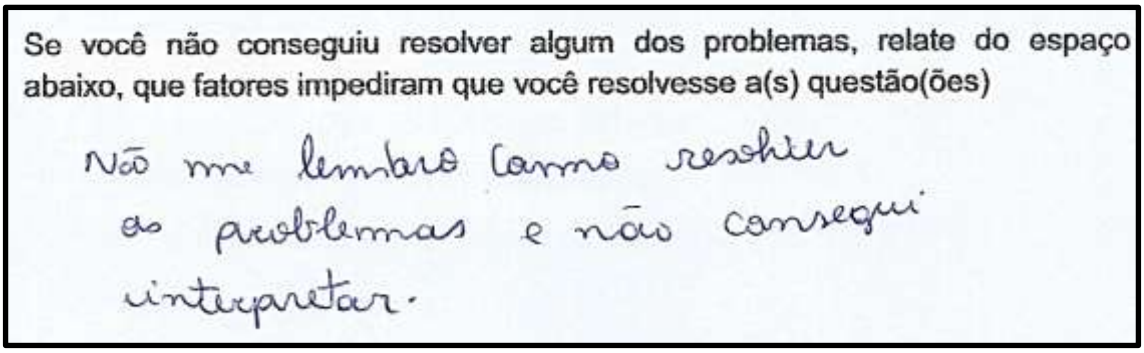
A Tabela 8 apresenta de maneira geral os resultados encontrados.

Tabela 4: Desempenho Geral dos entrevistados

Desempenho	Quantitativo
Resolveram apenas um dos problemas	14
Resolveram os dois problemas	8
Não resolveram nenhum dos problemas	8

Fonte: Questionário dos alunos

Dentre os entrevistados que deixaram de resolver pelo menos um dos problemas, 06 também não responderam a última pergunta, ou seja, não justificaram o motivo de não terem resolvido a(s) questão (ões). Dentre aqueles que apontaram motivos pelos quais não responderam pelo menos um dos exercícios, 06 disseram não se lembrar mais do assunto. Dentre as justificativas, destacamos a mostrada na Figura 109.


Se você não conseguiu resolver algum dos problemas, relate do espaço abaixo, que fatores impediram que você resolvesse a(s) questão(ões)

Não me lembro como resolver os problemas e não consegui interpretar.

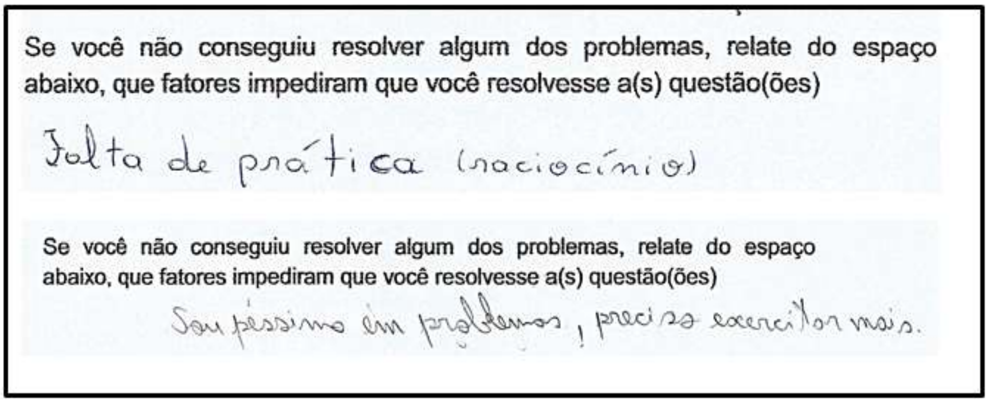
Figura 109: Justificativa "1"

Quando analisamos os protocolos do aluno em questão, que diz não ter conseguido resolver por não ter conseguido interpretar as questões, observamos que em nenhum dos dois problemas propostos houve a construção de qualquer tipo de representação.

Para Dreyfus, é a interação de processos como a representação, visualização, dentre outros, que vão caracterizar o pensamento matemático avançado. Segundo ele, sem essa articulação, torna-se impossível a existência da compreensão dos objetos matemáticos.

Como sabemos são do senso comuns ditados como “só se aprende a fazer fazendo” que acabam por reforçar a ideia de que quanto mais exercícios forem feitos mais aptos ao sucesso estarão os alunos. Essas “crenças” são comuns entre professores e alunos, que não levam em consideração que a “experiência Matemática” é construída a partir da prática, mas essa prática precisa estar dotada de sentido e não mecanizada em processos meramente algorítmicos.

Observemos duas justificativas dadas por dois dos entrevistados reproduzidas na Figura 110.


Se você não conseguiu resolver algum dos problemas, relate do espaço abaixo, que fatores impediram que você resolvesse a(s) questão(ões)

Falta de prática (raciocínio)

Se você não conseguiu resolver algum dos problemas, relate do espaço abaixo, que fatores impediram que você resolvesse a(s) questão(ões)

Sou péssimo em problemas, preciso exercitar mais.

Figura 110: Justificativas dadas por 2 alunos

Pelo observado nesses e nos demais protocolos, os alunos entrevistados também acreditam que o desenvolvimento da aprendizagem está associado ao treinamento, ou seja, seria através de exercícios que o sucesso com o Cálculo seria atingido.

Como já citamos nesse estudo, em relação ao ensino de matemática nos cursos superiores, para Tall (1995), em muitos casos, os alunos são apresentados a uma teoria já deduzida, em detrimento de se permitir ao aluno a construção do conceito do objeto matemático que o professor está trabalhando. Acreditamos que não seja um aumento no número de exercícios que vá facilitar a apreensão de conceitos matemáticos, e sim uma maior variedade e qualidade das questões.

Na busca de informações que nos possibilitassem elaborar um conjunto de atividades capazes de contemplar o objetivo do estudo, resolvemos então, entrevistar alunos que já haviam realizado as disciplinas de Cálculo do Bacharelado.

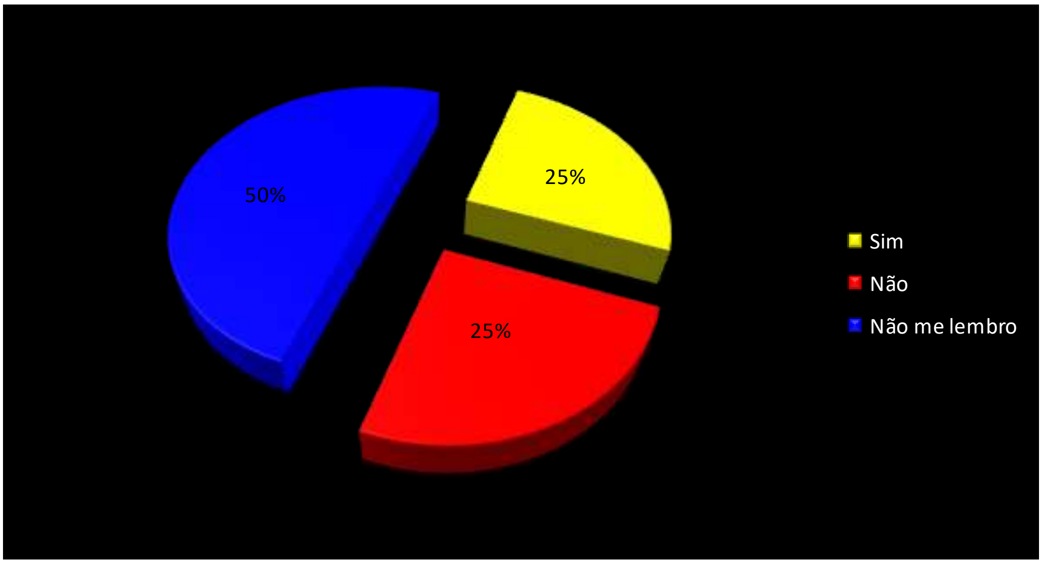
Reiteramos que o objetivo dessa entrevista era verificar as possíveis imagens de conceito e definições de conceito a respeito do objeto matemático estudado, com vistas a elaboração de nossa sequência de ensino.

5.4 Entrevistas com "Veteranos"

A entrevista foi feita com 8 alunos que cursavam o 8º período de um dos cursos de Engenharia oferecidos pela instituição onde aconteceu a pesquisa. Optamos em fazer um recorte e iremos nos ater à segunda e terceira partes do questionário.

Quando perguntados se já haviam estudados pontos críticos de uma função de variável real, 37,5% responderam afirmativamente e 62,5% disseram não se lembrar. Assim como os entrevistados que tinham cursado Cálculo I no semestre anterior à entrevista, os alunos que estavam para se formar evidenciaram o fato de não se lembrarem de ter estudado ponto crítico de uma função. Perguntamos em seguida se eles se lembravam de terem estudado problemas de otimização durante o curso de Cálculo I. No gráfico 05temos a distribuição das respostas.

Gráfico 5: Resposta a questão 02

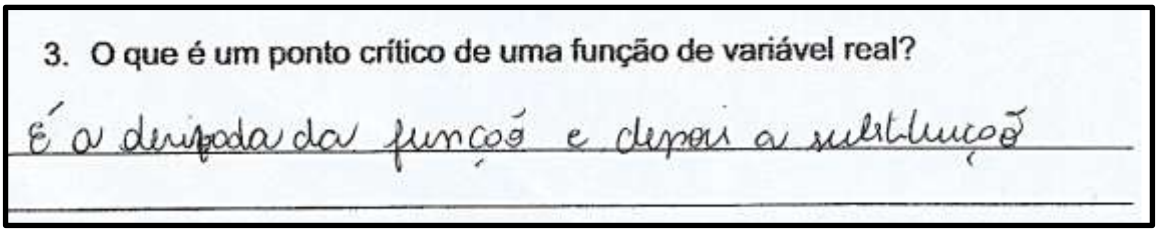


Fonte: Questionário dos entrevistados

Quando foram solicitados a explicar o que era o ponto crítico de uma função de variável real, apenas 2 dos 8 entrevistados, ou seja, 25% deles, deram uma resposta diferente de “ não lembro”.

Garzella (2003) alerta que a prática pedagógica é um dos principais determinantes do sucesso ou fracasso na disciplina, uma vez que as práticas adotadas pelo professor podem auxiliar ou dificultar o processo de apropriação do conhecimento, podendo conduzir os alunos a uma aprendizagem momentânea, ou seja aquela que perdura até o dia da prova ou o final do semestre.

Observemos a resposta dada pelo aluno “Veterano A ”reproduzida na Figura 111.



3. O que é um ponto crítico de uma função de variável real?

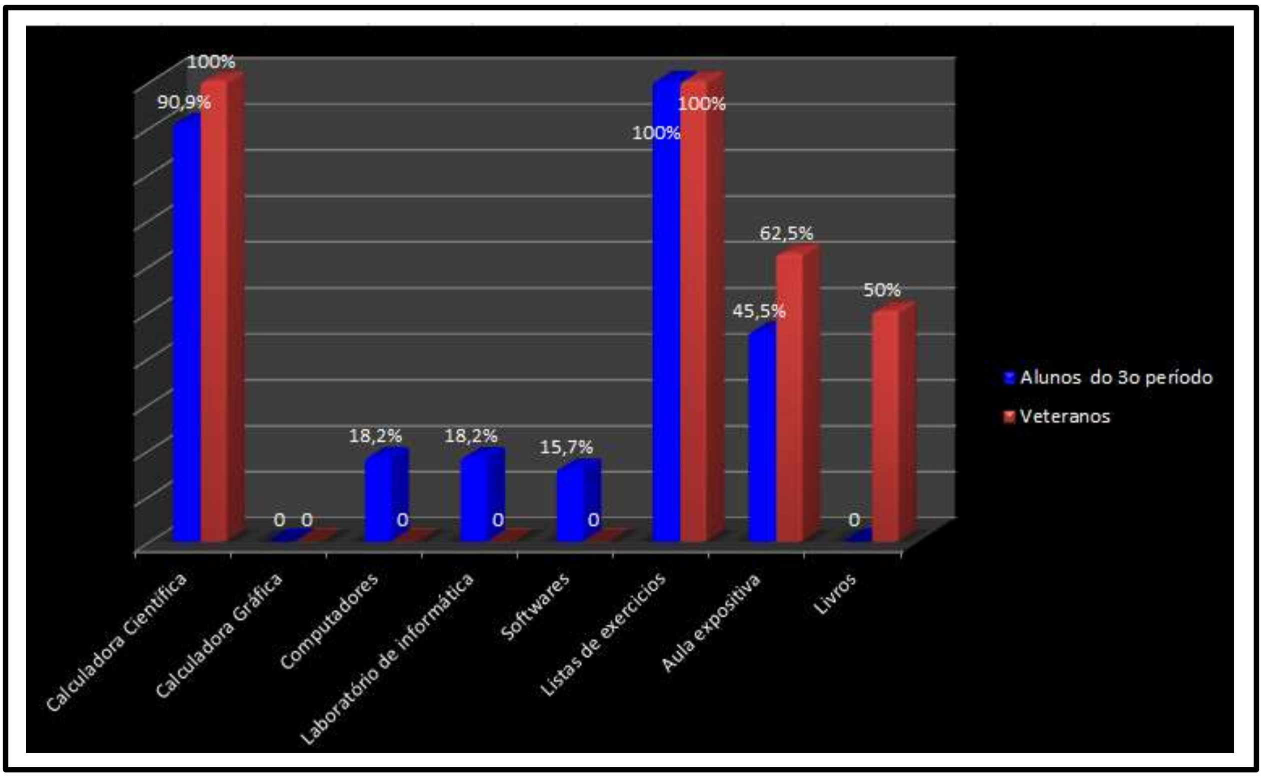
É a derivada da funçaõ e depois a substituiçaõ

Figura 111: Resposta do "Veterano A"

Pelo que observamos, ao ser exposto ao termo ponto crítico de uma função, a imagem de conceito que esse aluno associou foi o de derivada. Os procedimentos algébricos também foram observados na resposta do estudante, quando ele afirma que *“depois a substituição”*.

Outro ponto que investigamos, diz respeito a que estratégias os professores de Cálculo I usavam em suas aulas. Optamos aqui por apresentar, no Gráfico 06 , um comparativo das respostas dadas pelos alunos que haviam acabado de cursar Cálculo I e os Veteranos.

Gráfico 6: Recursos usados nas aulas de Cálculo I



Fonte: protocolo dos alunos

Assim como fizemos com os alunos que participaram das intervenções, também gostaríamos de saber como esses alunos resolviam os problemas de otimização. Para tanto, foram apresentados aos mesmos as questões propostas aos alunos participantes da intervenção.

Dentre os “veteranos”, 62,5% não responderam a questão “A” e justificaram com respostas como: “*não me lembro”* ou “*esqueci”*, como ilustrado abaixo:

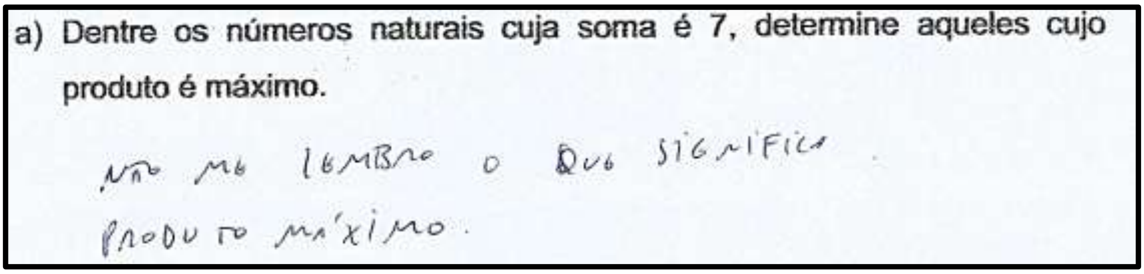


Figura 112: Resposta de um dos "veteranos" ao problema "A.

Chamou-nos atenção o fato de nenhum dos alunos “Veteranos” terem conseguido resolver o problema “A”, mesmo usando o processo de tentativas. Observemos a resolução dos veteranos “A” e “B” apresentadas nas figuras 113 e 114.

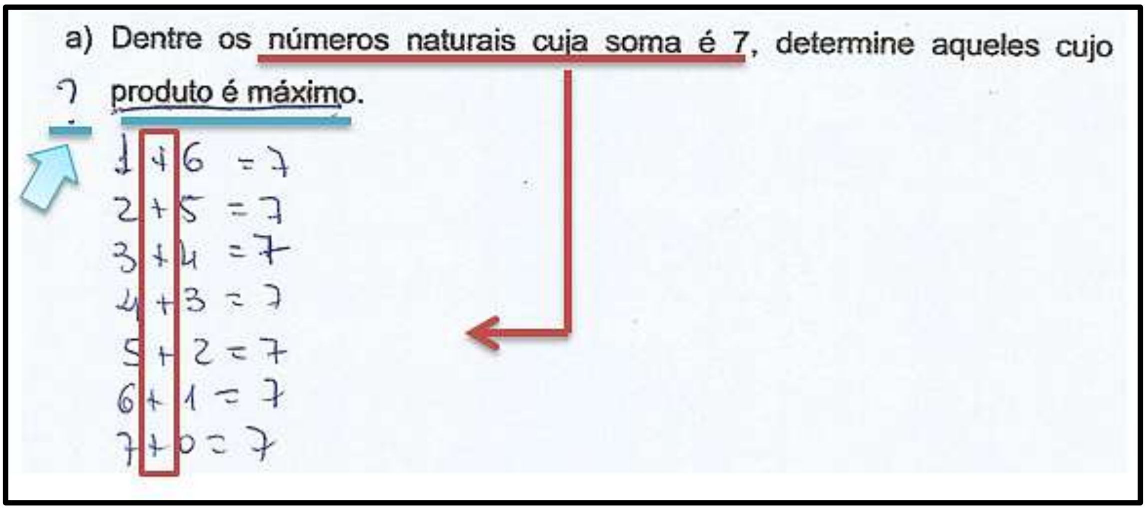


Figura 113: Resolução do "Veterano A"
Fonte: Protocolo do participante

Assim como o aluno que não fez a questão e justificou afirmando não se lembrar o que significa produto máximo, percebemos que esse “esquecimento” também esteve presente na resolução que estamos analisando.

Vejamos a resolução do aluno “Veterano B” na Figura 1114.

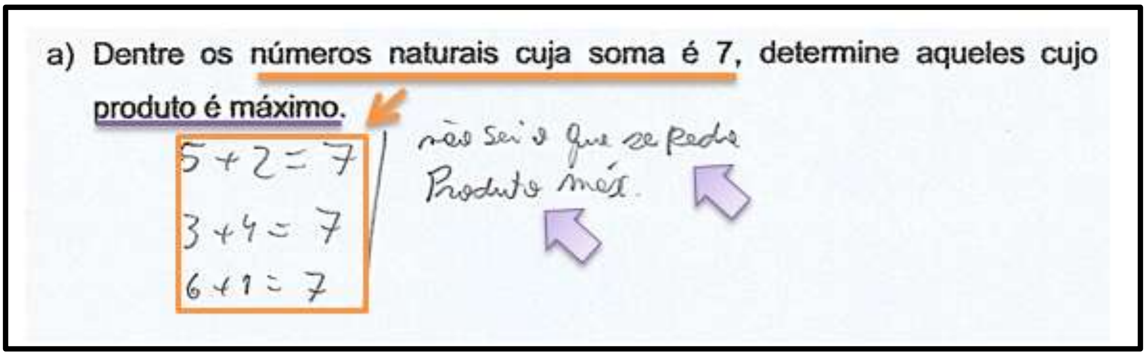


Figura 114: Resposta dada pelo aluno "Veterano B"
Fonte: Protocolo do participante

Observamos, para ambos os alunos, o problema na resolução da questão foi a hierarquização dos conceitos matemáticos.

O terceiro aluno que respondeu a questão, também cometeu erro bastante semelhante aos outros dois, como apresentado na Figura 115.

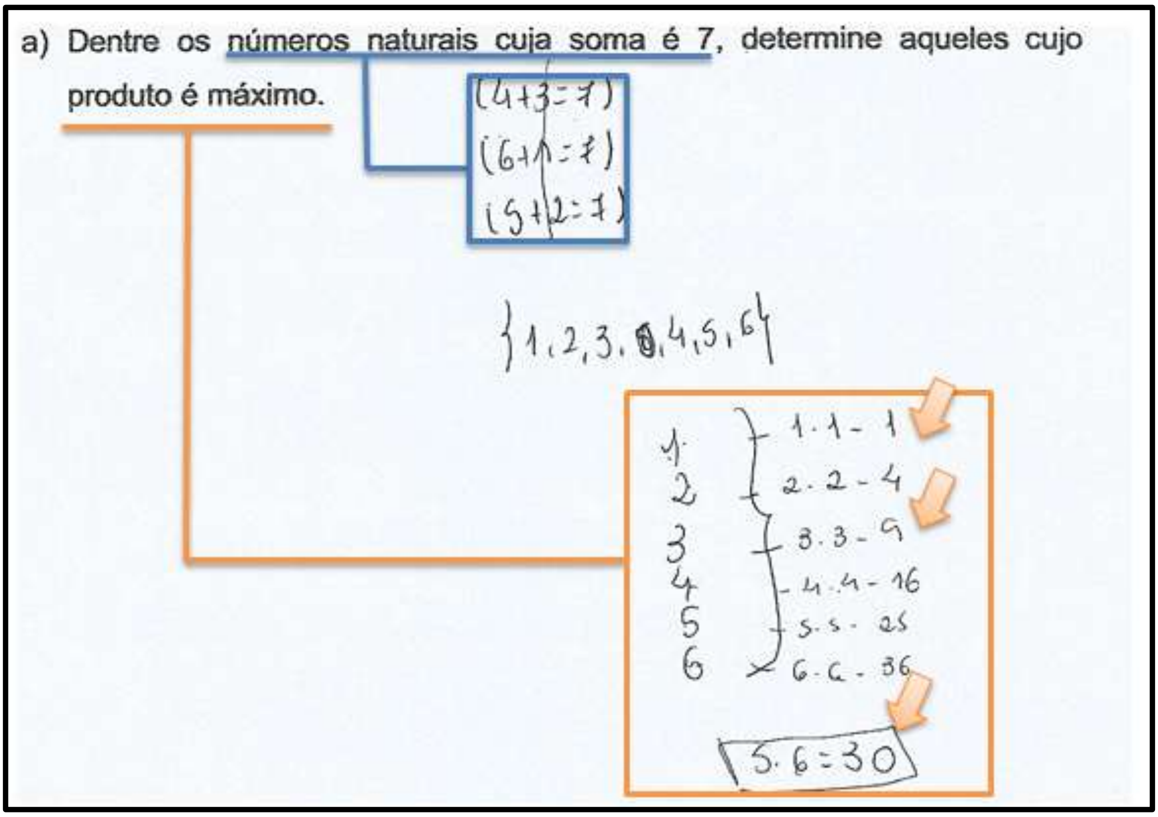


Figura 115: Resolução do aluno "Veterano C".
Fonte: Protocolo do participante

Quando observamos as resoluções presentes, verificamos que a imagem do conceito a respeito do produto e do produto máximo, não está suficientemente construída. Em relação ao segundo problema proposto aos alunos “veteranos”, nenhum deles resolveu ou tentou iniciar a resolução do problema.

b) Pretende-se estender um cabo de uma usina de força à margem de um rio de 900m de largura até uma fábrica situada do outro lado do rio, 3.000m rio abaixo. O custo para estender um cabo pelo rio é de R$ 5,00 o metro, enquanto que para estendê-lo por terra custa R$ 4,00 o metro. Qual é o percurso mais econômico para o cabo?

Figura 116: Problema 2 apresentado aos alunos " veteranos".

Quando perguntados a respeito do motivo responsável pelo fato de não terem conseguido responder alguns dos problemas, 07 dos 08 entrevistados responderam: “*não me lembro mais”* enquanto um dos entrevistados respondeu:

Se você não conseguiu resolver algum dos problemas, relate do espaço abaixo, que fatores impediram que você resolvesse a(s) questão(ões)

Não consegui fazer, pois não tenho o costume de estudar matérias de períodos que já passaram

Figura 117: Justificativa de um dos alunos Veteranos
Fonte: Protocolo do participante

Esse depoimento vem ao encontro das ideias de Garzella (2003), no que se refere ao fato dos alunos apenas mecanizarem os procedimentos de Cálculo e que esses se perdem ao longo dos semestres subsequentes.

Do ponto de vista geral, não percebemos diferença significativa entre as imagens de conceito relativas aos problemas de otimização apresentadas pelos participantes da pesquisa, ou seja, alunos que em sua maioria haviam estudado Cálculo I no semestre anterior à realização das entrevistas e os que foram apresentados pelos alunos que já haviam completado os estudos de Cálculo.

Capítulo 06

Análise das Intervenções

Apresentam-se, neste capítulo, a descrição e análise dos protocolos e registros das atividades desenvolvidas junto aos participantes da pesquisa. Destacamos que, em alguns momentos, fez-se necessária a utilização de *prints* de telas de computadores utilizados pelos participantes, áudios de conversas entre os mesmos, bem como entrevistas feitas junto aos participantes na tentativa de elucidar algumas dúvidas relativas à resolução das questões.

Após aplicação das atividades diagnósticas e subsidiados pelo Design Experiment que prevê uma avaliação contínua da prática realizada, permitindo com isso realizar as devidas adaptações e melhorias durante o período em que a mesma estiver sendo executada, optamos por oferecer aos participantes da pesquisa um *feedback* do desempenho dos mesmos nas atividades. Para tanto, foi marcado um encontro, no sábado, dia 28/05, às 9h da manhã, no campus onde a pesquisa estava se desenvolvendo para uma discussão sobre as dificuldades identificadas nas questões propostas no questionário inicial.

A conversa entre o pesquisador e os participantes teve início com uma avaliação dos participantes a respeito das eventuais dificuldades evidenciadas nos protocolos das atividades inicialmente propostas. Devemos destacar que, até esse encontro, os estudantes encontravam-se preocupados com continuidade da participação no projeto, com a forma pela qual o seu desempenho nas atividades seria apresentado no estudo, mesmo já havendo sido informados de que sua identidade seria preservada.

> *P1: Professor, acho que não devo continuar a participar da sua pesquisa. Eu não consegui acertar os problemas. Com as minhas respostas erradas como eu vou poder participar?*

Assim que o participante P1 fez esse questionamento, os demais participantes concordaram com ele. Nesse momento, o pesquisador precisou deixar claro que inicialmente, ele não estava interessado em respostas certas ou erradas, mas sim, em entender como os mesmos resolveram cada uma das duas questões propostas. A seguir, os alunos foram questionados a respeito das respostas das questões no intuito de oferecer ao pesquisador dados acerca do “insucesso” dos mesmos nas atividades propostas.

De acordo com Viner(1983) as pesquisas relacionadas ao fracasso em Cálculo Diferencial e Integral concentram-se especialmente nos problemas de compreensão das definições matemáticas, em especial as de funções.

De forma geral, as justificativas apontadas pelos participantes estavam atreladas ao fato de não se lembrarem das fórmulas que deveriam usar e/ou de que técnicas operatórias deveriam ser aplicadas nos problemas propostos. Tal justificativa está coerente com a ideia defendida por FROTA (2001) que compreende como o principal problema no processo de ensino-aprendizagem a forma como os alunos estudam.

A análise dos protocolos referentes à primeira questão, induziram ao pesquisador à conclusão de que os alunos que tentaram resolvê-lo apresentaram uma característica comum: não entenderam o que significava determinar, no contexto proposto, o produto máximo, como ilustrado nas páginas 221 e 222.

Quando levados a discutir a questão, um dos participantes fez o seguinte comentário:

> *P2: Professor, a soma dos números tinha que ser sete. Certo?*
> *Pesquisador: Sim, tinha.*
> *P2. Então professor, a soma era fixa, certo?*
> *Pesquisador: Sim, era.*
> *P2: Então professor, o produto também tinha que ser fixo? Como poderia ser máximo? Se eu escolho, por exemplo, 2 e 5 o produto é dez e pronto. Não tem como “dois vez cinco” ser máximo. É 10 e acabou.*

A partir do exposto pelo aluno, nos certificamos de que a dificuldade central não estava no conteúdo específico esperado pelo pesquisador para a resolução da questão. A ideia de produto máximo não era concebida por esse participante bem como por outros – o que ficou evidenciado durante a conversa com os mesmos – pois estes não entendiam que esse produto variava de acordo com a escolha dos pares de números.

O pesquisador reproduziu no quadro um conjunto de possibilidades de soma 7 (escolhida aleatoriamente dentre os protocolos) e discutiu com os alunos que o fato da soma ser fixa não era um impeditivo para que o produto fosse variável, e, em sendo o produto variável, seria possível determinar aquele par de números que produziriam um produto máximo.

Embora um dos objetivos com esse encontro fosse discutir a possibilidade da linguagem algébrica na resolução do problema proposto, optamos por não nos valer dessa alternativa, nesse momento. Ficou também combinado com os participantes da pesquisa que a cada intervenção que realizássemos, faríamos um encontro similar ao que havíamos feito naquele dia para discutir as resoluções e/ou sanar alguma dúvida referente à atividade proposta.

A segunda questão proposta aos alunos, a nosso ver, era mais complexa pois além de não permitir resolução por tentativa e erros "obrigava" a utilização de conhecimentos de Geometria Plana, de linguagem algébrica e um trabalho um pouco mais "refinado" com funções, derivadas e ideias relacionadas a valores extremos e pontos críticos.

> Pretende-se estender um cabo de uma usina de força à margem de um rio de 900m de largura até uma fábrica situada do outro lado do rio, 3.000m rio abaixo. O custo para estender um cabo pelo rio é de R$ 5,00 o metro, enquanto que para estendê-lo por terra custa R$ 4,00 o metro. Qual é o percurso mais econômico para o cabo?

Figura 118: Questão 02 do questionário diagnóstico

Durante a discussão, os alunos foram instigados pelo pesquisador a apresentarem suas alternativas de resolução. Chamaram-nos atenção as observações feitas pelo participante indicado como Participante D (PD).

> *Pesquisador: Pessoal, como vocês pensaram resolver o problema?*
>
> *PD: Professor, essa eu tenho certeza que acertei. Pois a resolução é bastante simples. Basta eu calcular o gasto indo por terra e o custo indo pelo rio e escolher o mais barato.*
>
> *Pesquisador: Certo. E como fazer?*
>
> *PD: Por terra eu somei e fiz uma regra de três e por água eu usei o "lance" da hipotenusa ao quadrado, e descobri o tamanho do cabo pelo rio. Fiz outra regra de três.*

Pesquisador: Alguma outra sugestão? E então gente? Alguma outra forma de se pensar a resolução desse problema? Será que não existe outra forma de estender o cabo?

PD: Só se puder fazer dos dois jeitos uma parte pela terra e outra pela água (risos)

Pesquisador: Vamos testar essa possibilidade?

PD: Ah, fala sério professor, nunca eu ia pensar "nisso".

Após serem motivados a pensar numa "nova" possibilidade de resolução do exercício, a questão foi resolvida no quadro e nesse momento foram discutidas questões referentes a valores extremos e domínio de uma função.

Depois de discutidas as questões, agendamos a data da próxima intervenção, que descrevemos a seguir.

6.1 Descrição e análise das atividades da primeira intervenção

Embora, 22 alunos tenham participado das entrevistas iniciais apenas 10 deles participaram da primeira intervenção. A intervenção aconteceu no sábado, dia 11/06/2016, das 9h às 12h numa das salas de aula da universidade onde se desenvolveu a pesquisa.

O objetivo da primeira questão (Figura 119) era verificar se os alunos identificavam, a partir da análise do gráfico de uma função, os intervalos em que essa função cresce ou decresce. Para tanto, foram apresentados dois gráficos e os estudantes deveriam explicitar as informações os levaram à resposta apresentada.

6.1.1 Atividade 01

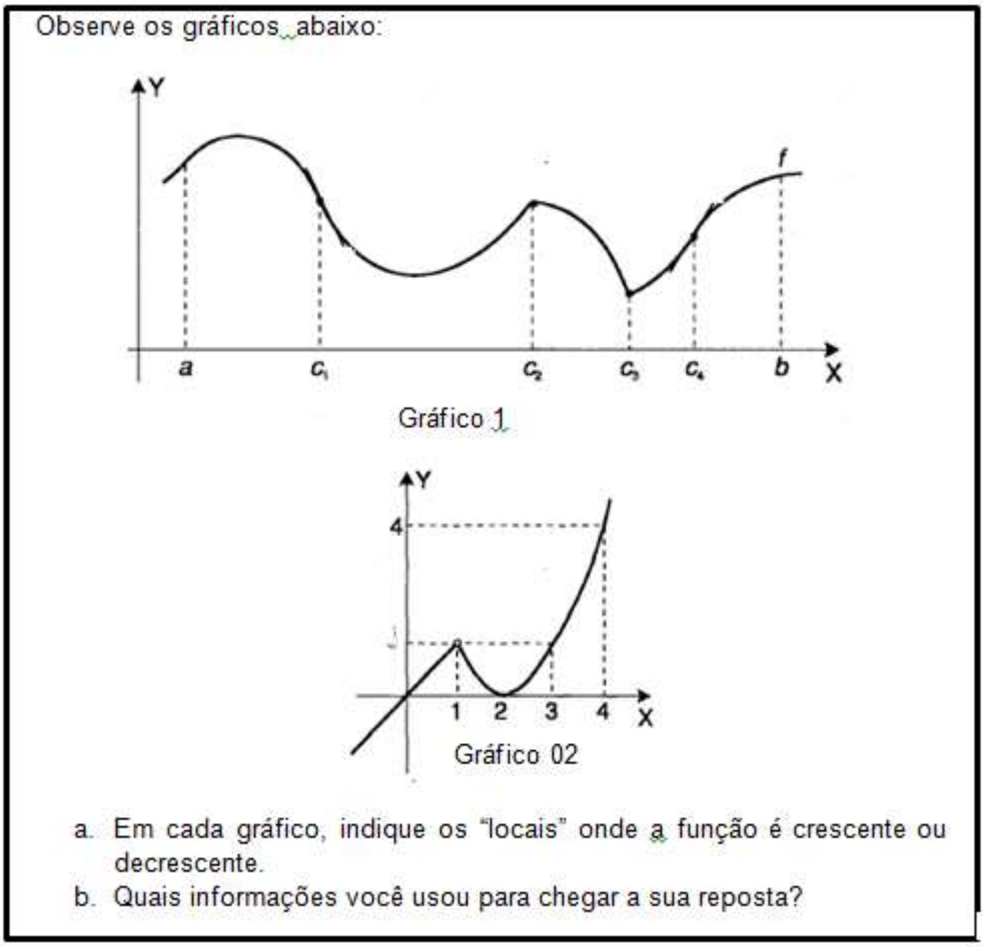


Figura 119: Atividade 01. Intervenção 01

Vale destacar que, nessa primeira atividade, os alunos trabalharam em duplas, porém os protocolos foram individuais.

Dos dez alunos, 08 responderam à questão sem problemas nem erros. Uma das duplas apresentou resposta (Figura 120):

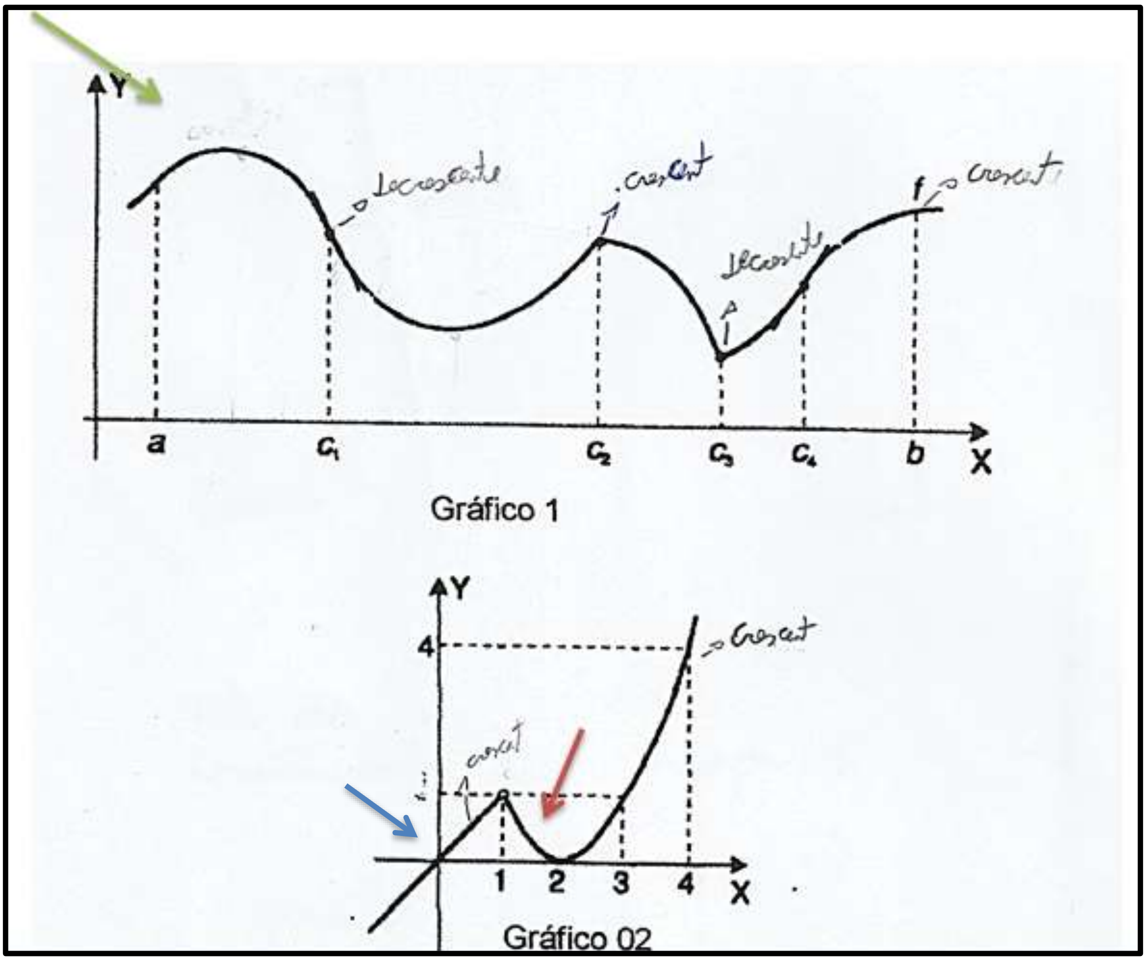


Figura 120: Resposta do aluno”L" .
Fonte: protocolo do participante

O aluno “L”, inicialmente apontou um intervalo de crescimento no gráfico 01 (seta em verde na Figura 120) e depois apagou. Já no gráfico 02, o aluno desconsiderou o intervalo de decrescimento da função.

Uma das imagens mentais associada ao conceito de crescimento ou decrescimento de funções foi a da concavidade da parábola. Observemos sua justificativa na Figura 121.

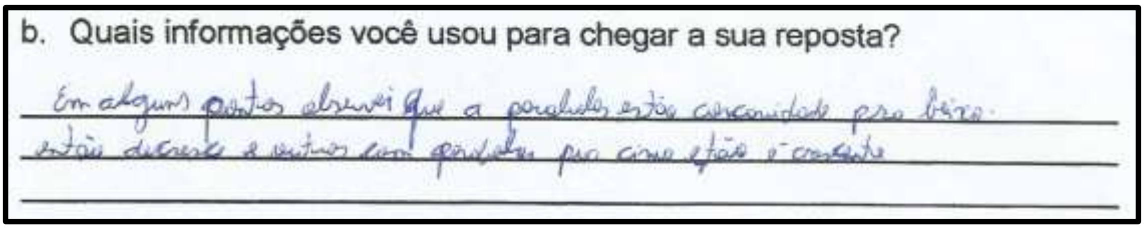


Figura 121: Justificativa do aluno "L". Fonte: Protocolo do participante

Observamos que o aluno “L” possui uma imagem de conceito de função crescente ou decrescente associada à imagem da concavidade da parábola, sendo assim, este aluno acaba por usar essa imagem mental em gráficos que não são parábolas, como no gráfico 01 ou até mesmo em retas, como indicado na seta azul.

Vejamos agora a questão respondida pelo aluno “F” (Figura 122).

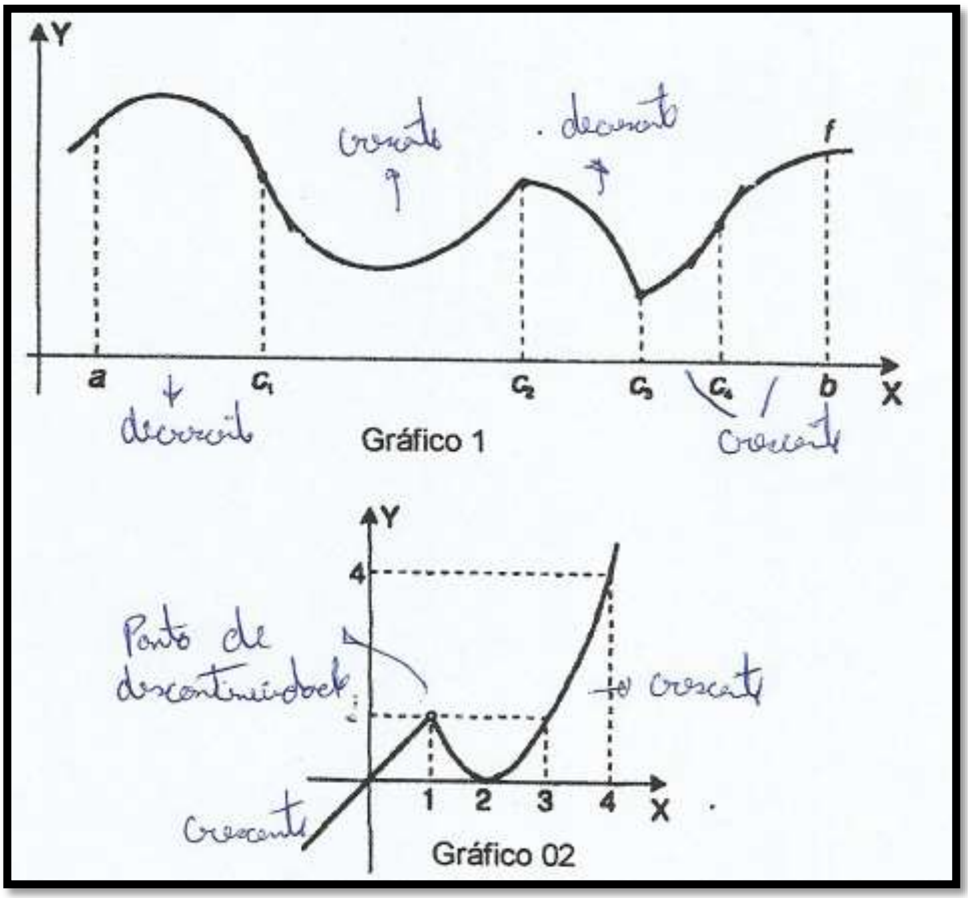


Figura 122: Resposta dada pelo aluno F. Fonte: Protocolo do Participante

Embora o aluno “F” tenha cometido equívocos similares aos do aluno “L”, vale analisar a sua justificativa e compararmos a justificativa com suas respostas (Figura 123).

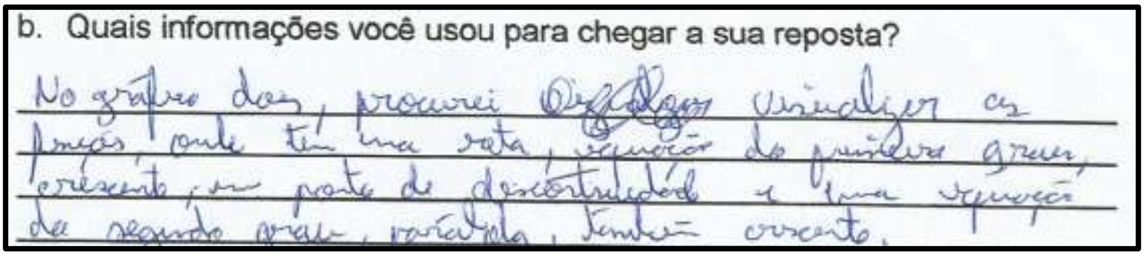


Figura 123: Justificativa do aluno "F"“F”.
Fonte: Protocolo do participante

Podemos observar que, mais uma vez, o fato do gráfico ter uma forma curvilínea, a imagem mental associada é a da parábola. Embora o aluno “F” não a tenha mencionado em sua justificativa, fica notória a associação do comportamento da função à concavidade da curva, ou seja, a imagem do conceito subjacente.

Precisamos estar atentos ao fato de que a imagem de conceito pode não ser totalmente coerente e conter aspectos que divirjam da definição formal.

Dentre as duplas que acertaram a questão, vale destacar a resposta e justificativa do aluno “I” (Figura 124).

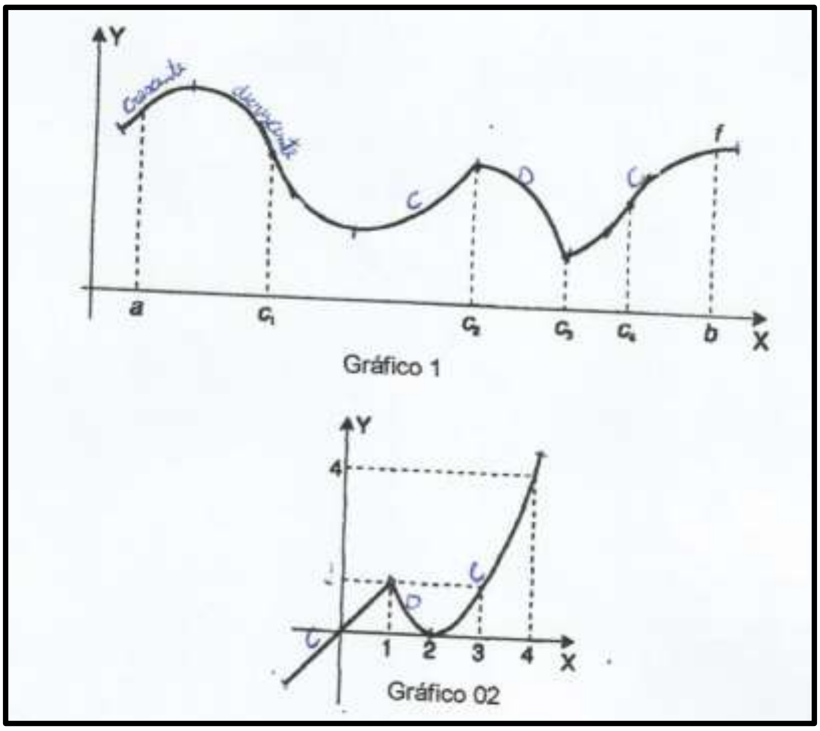
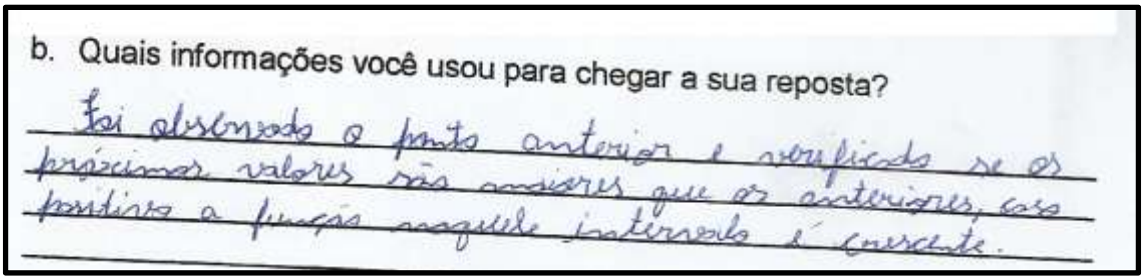


Figura 124: Resolução do aluno "I". Fonte : Protocolo do participante


b. Quais informações você usou para chegar a sua reposta?

Foi observado o ponto anterior e verificado se os próximos valores são maiores que os anteriores, caso positivo a função naquele intervalo é crescente.

Figura 125: Justificativa do aluno "I".
Fonte: Protocolo do participante

O aluno “I” (Figura 125) valeu-se da ideia de “aumento e diminuição dos valores analisados no gráfico” para determinar se no intervalo em questão a função cresce ou decresce.

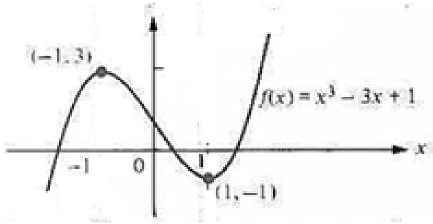
Nas resoluções apresentadas verificou-se o predomínio das imagens de conceito equivocadas em relação a crescimento e decrescimento de funções: a associação de crescimento de decrescimento à concavidade de parábolas no estudo de gráficos que não eram parábolas.

6.1.2 Atividade 02

O objetivo dessa questão (Figura 126) foi verificar se os alunos, a partir da representação gráfica de uma função, eram capazes de determinar seu ponto de máximo e/ou de mínimo bem como investigar que estratégias foram usadas para a obtenção da resposta.

Atividade 02

Observe o gráfico abaixo:



- ✓ Essa função possui ponto máximo? ____________________
- ✓ Em caso afirmativo, qual é esse ponto? ____________________
- ✓ Essa função possui ponto mínimo? ____________________
- ✓ Em caso afirmativo, qual é esse ponto? ____________________

Quais são os dados ou fatos que permitiram você responder os itens anteriores?

Figura 126: Atividade 02. Intervenção 01

Dentre os 10 alunos que participaram da intervenção, apenas dois (uma dupla) se equivocaram e justificaram dizendo que não se lembravam da resposta. Selecionamos duas justificativas corretas que chamaram a atenção dos pesquisadores (Figura 127).

lembrei as formulas de máximo e mínimo de uma função $(-b/a)$; $(-\Delta/a)$ porém não soube aplicar os mesmos no valor do cubo para achar o Δ, então através do gráfico analisei e marquei os pontos onde o mais alto era o máximo e o menor o mínimo.

Figura 127: Justificativa da atividade 02 da intervenção 01. Aluno "I"
Fonte: Protocolo do participante

Com essa justificativa, evidenciamos uma afirmativa já mencionada no presente estudo: o predomínio das técnicas algébricas em detrimento da postura analítica. Observamos que, mais uma vez, os estudantes, ao se depararem com a expressão ponto máximo e ponto mínimo, imediatamente recorreram a ideia de vértice da parábola, mesmo que usando a fórmula errada. Os estudantes tentam aplicar a fórmula para as coordenadas do vértice do gráfico de uma função de segundo grau em se tratando de uma função polinomial de grau 3. O elemento dificultador foi, segundo a dupla, “não conseguir encontrar o Δ”. A partir desse insucesso, os estudantes optam por utilizar outra imagem mental associada à ideia de ponto de máximo e de mínimo, à ideia de ponto mais alto e ponto mais baixo.

Chamou-nos também a atenção, a tentativa de generalização, mesmo que equivocada. Para Dreyfus(1991), o processo de generalização é considerado um dos processos mais importantes quando nos referimos à aprendizagem dos conceitos matemáticos. Segundo ele, esse processo é caracterizado por induzir algo a partir de particularidades, a fim de identificar aspectos comuns e expandir domínios de validade. De acordo dom Dreyfus(1991), “a generalização pode estabelecer um resultado grande para uma classe de resultados ou estabelecer a formulação de um conceito matemático e, estas são as grandes importâncias deste processo na Matemática.”

A resposta e justificativa do aluno “L” (Figura 128) também chama a atenção para a necessidade de uma comprovação algébrica em detrimento da observação do comportamento da função pelo gráfico.

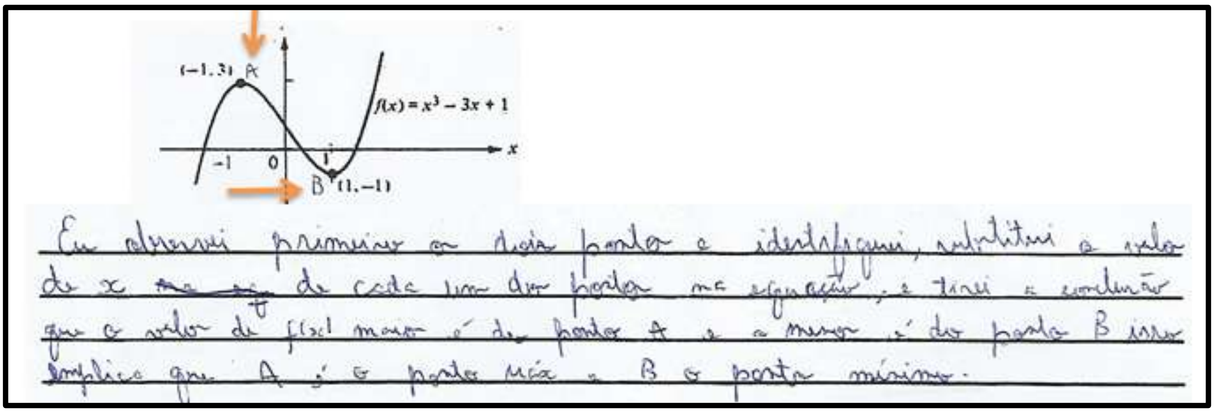


Figura 128: Resolução do aluno "L", questão 02 da intervenção 01. Fonte: Protocolo do participante

Podemos constatar que, embora inicialmente o aluno afirme que observou os pontos A e B, ele substituiu o valor de x na lei de formação da função para só depois concluir algo a respeito do ponto.

Quando revisitamos o quadro teórico do nosso estudo, na busca de entender a ação dos participantes, nos deparamos coma ideia de imagem conceitual de Tall e Vinner. De acordo com Tall e Vinner (1991), a imagem conceitual corresponde ao que está associado ao conceito na mente do indivíduo e *inclui todas*as imagens mentais, *processos e propriedades ligadas a ele*, e nesse caso, temos um forte indicativo que nos permite concluir a importância dos procedimentos algébricos em detrimento da observação e análise do gráfico.

Assim como na questão anterior, a maioria dos alunos respondeu corretamente. Chamou a atenção dos pesquisadores a necessidade encontrada por váriosalunos de realizarem procedimentos algébricos em detrimento de apenas observar as informações presentes na representação gráfica da função em questão. Notamos, neste caso, uma dificuldade em trabalhar com diferentes tipos de representação.

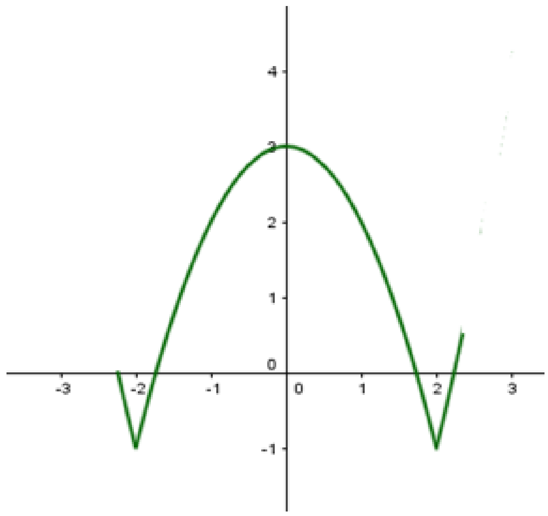
De acordo com Tall (2002), o pensamento é entendido como uma atividade interna e racional que envolve a reflexão sobre uma ação, sobre aquilo que vemos e pensamos acerca do que nos cerca. Neste sentido, tomamos, enquanto pesquisadores, a consciência de que deveríamos alterar as próximas questões se buscávamos propiciar uma transição nas formas de pensar nosso objeto de estudo.

6.1.3 Atividade 03

Como supúnhamos, a explicitação da lei de formação da função despertou no aluno a necessidade da utilização de recursos algébricos. Optamos, na sequência, por apresentar uma questão (Figura 129) bastante parecida com a questão anterior, porém com a diferença de não explicitar a lei de formação da função.

Atividade 03

Observe o gráfico abaixo:



- ✓ Essa função possui ponto máximo? ______________________
- ✓ Em caso afirmativo, indique no gráfico.
- ✓ Essa função possui ponto mínimo?______________________
- ✓ Em caso afirmativo, indique no gráfico

Quais são os dados ou fatos que permitiram você responder os itens anteriores?

Figura 129: Atividade 03. Intervenção 01

O objetivo dessa questão, assim como o da questão anterior, foi verificar se os alunos, a partir da representação gráfica de uma função eram capazes de determinar seu ponto de máximo e/ou de mínimo bem como investigar que estratégias foram usadas para a obtenção da resposta.

Diferentemente da questão anterior, todas as duplas responderam acertadamente a questão.

Dentre as justificativas, destacou-se a reproduzida na Figura 130.

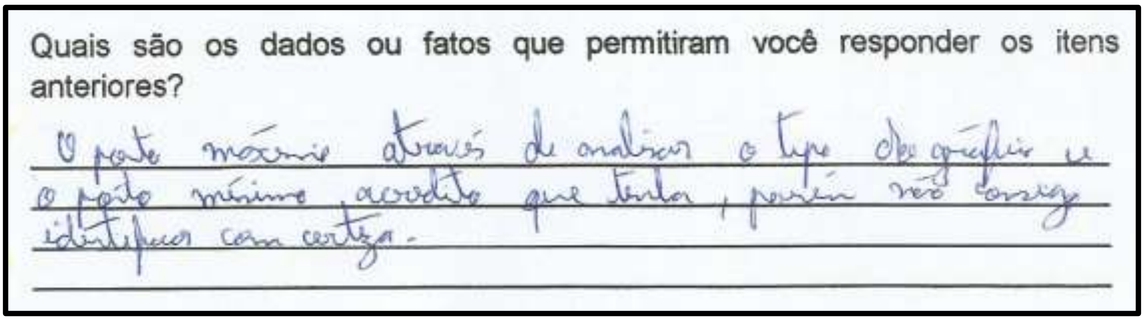

Quais são os dados ou fatos que permitiram você responder os itens anteriores?
O ponto máximo através de analisar o tipo de gráfico e o ponto mínimo acredito que tenha, porém não consigo identificar com certeza.

Figura 130:Justificativa dupla "F", questão 03.

Fonte: Protocolo do participante

Em conversa com a dupla, na semana seguinte a execução da intervenção, perguntei o motivo da falta de certeza. A resposta que obtive foi:

> *"Ah, professor esse lance de responder questão de Cálculo sem ter a função dá maior insegurança. Dá certo responder sem fazer conta não. Bate insegurança mesmo."*

A análise da justificativa apresentada anteriormente, nos remete ao fato da importância de estarmos preocupados em, ao trabalharmos com conceitos relativos as funções, valermo-nos do fenômeno da conversão, defendido por Duval.

Precisamos estar atentos ao fato de que, quanto mais diversificada for a representação de um objeto, maior é a compreensão que o estudante terá a seu respeito, e a apropriação do seu significado se dará a partir de conversões estabelecidas entre as diversas maneiras de representá-lo. Nesse sentido, estamos convencidos de que um trabalho com extremos de funções reforçando as conversões entre a representação algébrica e gráfica, contribuiria para a não dependência de um único tipo de registro, nesse caso, o algébrico.

Na mesma perspectiva, encontramos a resposta da dupla I & I (Figura 131).

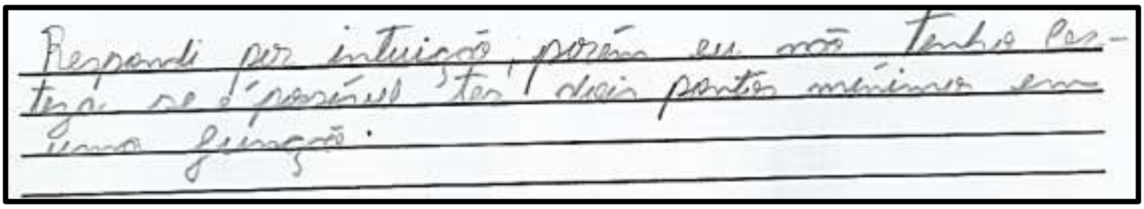

Respondi por intuição, porém eu não tenho certeza se é possível ter dois pontos mínimos em uma função.

Figura 131: Justificativa dupla I & I questão 03 da intervenção 01.
Fonte : Protocolo dos participantes

Observamos que o fato de a questão apresentada não possuir um cálculo algébrico para ser feito, acaba por despertar nos estudantes uma certa sensação de desconforto e/ou insegurança.

De maneira geral, todos os participantes apresentaram um desempenho satisfatório na questão proposta.

6.1.4 Atividade 04

O objetivo dessa questão (Figura 132) foi investigar as estratégias que os alunos utilizam no momento de resolver um problema "clássico" de otimização. Buscávamos também investigar se os estudantes recordavam-se das técnicas empregadas nas aulas de Cálculo I para resolver o problema proposto.

> **Atividade 04**
>
> Resolva o problema abaixo, da maneira que achar mais conveniente. Não se esqueça de deixar indicada a maneira como você chegou ao resultado.
>
> Considere dois números naturais cuja soma seja 8. Quais deles tem produto máximo?

Figura 132: atividade 04 Intervenção 01

Assim como o ocorrido na entrevista inicial, todos os estudantes resolveram a questão por tentativas, ou seja, tentaram encontrar o par de números naturais que satisfizessem a condição proposta, como nos mostra o protocolo abaixo:

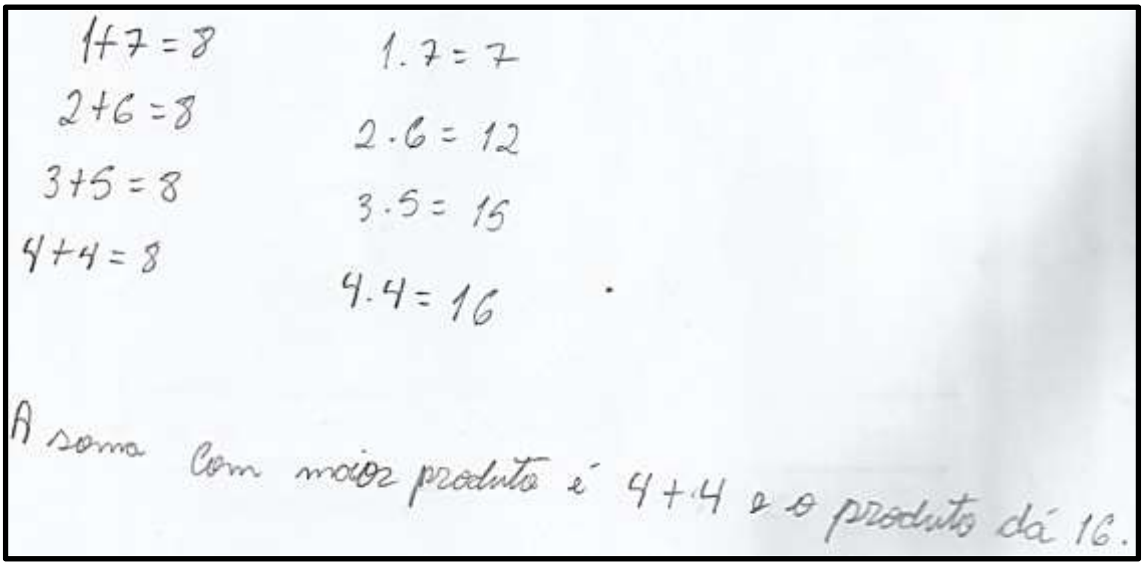


Figura 133: Resolução aplicada por todas as duplas na atividade 04 na intervenção 01
.Fonte: Protocolo do participante

Se estamos interessados em observar a resolução dessa questão na busca de verificar se o pensamento empregado estava no nível elementar ou avançado, devemos recorrer os aspectos teóricos do nosso estudo.

Tall (2002) afirma que o pensamento matemático avançado envolve um ciclo de atividades a considerar desde o ato de modelar um problema para a pesquisa matemática até a sua formulação criativa de conjecturas, concluindo com a prova. Já Dreyfus (1991) faz uma distinção muito tênue entre esses tipos de pensamento, considerando ser possível pensar em tópicos matemáticos avançados em uma forma elementar e poder existir pensamento avançado sobre tópicos elementares.

O fato de o problema ser balizado no conjunto dos números naturais, ou seja, num universo de valores discretos, acabou por facilitar a resolução por tentativas, ou seja, estávamos diante de um problema que foi resolvido de maneira elementar, mesmo tendo sido pensado pelos pesquisadores, para ser resolvido de forma avançada.

Pelo caráter cíclico e intervencionista da metodologia de pesquisa escolhida, optamos por apresentar, na intervenção seguinte, um novo problema, bastante similar a esse, porém num universo de possibilidades muito maior, uma vez que os dados não mais seriam discretos e sim contínuos.

6.1.5 Atividade 05

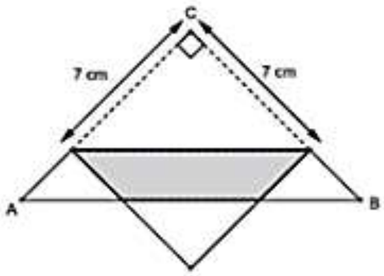
Com essa questão (Figura 134) os pesquisadores tinham por objetivo verificar quais os procedimentos utilizados para a resolução de cada um dos itens propostos e, em especial, no item d. Para a resolução, os alunos tinham a sua disposição, papel, régua, tesoura, lápis, borracha e calculadora científica.

Essa foi a questão em que os participantes tiveram mais dificuldade para resolver, tanto que apenas uma das duplas conseguiu resolvê-la quase integralmente. A primeira dificuldade encontrada pelos alunos foi na interpretação do enunciado da questão. Todas as duplas leram e releram a questão da busca de iniciar a resolução.

Atividade 06

Propriedades importantes do triângulo retângulo isósceles:

a) Esse triângulo é a metade de um quadrado;
b) Uma paralela a qualquer dos lados do triângulo retângulo isósceles corta os outros dois lados determinando um novo triângulo retângulo isósceles.



Problema: (OBMEP 2013 - N3-2ª fase)

A figura mostra um triângulo de papel *ABC*, retângulo em *C* e cujos catetos medem 10 cm. Para cada número x tal que $0 \leq x \leq 10$, marcam-se nos catetos os pontos que distam x cm do ponto *C* e dobra-se o triângulo ao longo da reta determinada por esses pontos. Indicamos por $f(x)$ a área, em cm^2, da região onde ocorre sobreposição de papel.
Por exemplo, na figura ao lado, a área da região cinzenta é $f(7)$.

a) Calcule $f(2)$, $f(5)$ e $f(7)$.

b) Escreva as expressões de $f(x)$ para $0 \leq x \leq 5$ e $5 \leq x \leq 10$.

c) Faça o gráfico de $f(x)$ em função de x.

d) Determine o maior valor possível para a área da região de sobreposição.

Figura 134: atividade 05 Intervenção 01

Durante a primeira fase da resolução, ou seja, durante a leitura, uma das duplas chamou o entrevistador e disse que não estavam conseguindo entender a situação proposta e, que, portanto, não conseguiriam resolver a questão.

A dupla tentou um pouco mais e entregou o protocolo sem resolver a questão, apenas justificando (Figura 135).

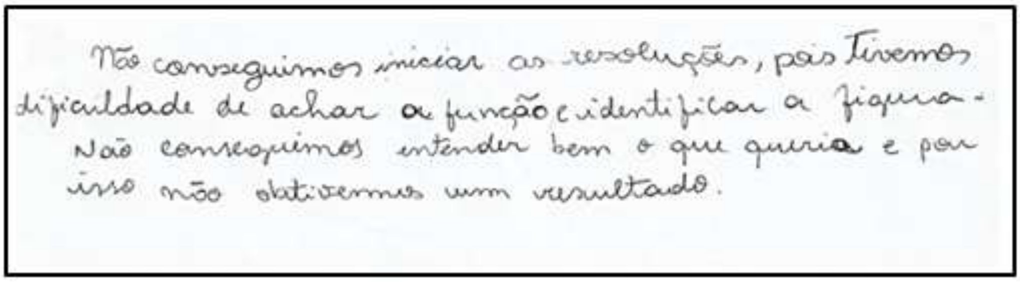

Não conseguimos iniciar as resoluções, pois Tivemos dificuldade de achar a função e identificar a figura. Não conseguimos entender bem o que queria e por isso não obtivemos um resultado.

Figura 135:Justificativa da dupla que entregou a questão em branco.
Fonte: Protocolo dos participantes

Durante a realização dessa atividade o primeiro procedimento adotado por várias das duplas foi a tentativa de uma representação figural para a situação proposta (Figuras 136 e 137).

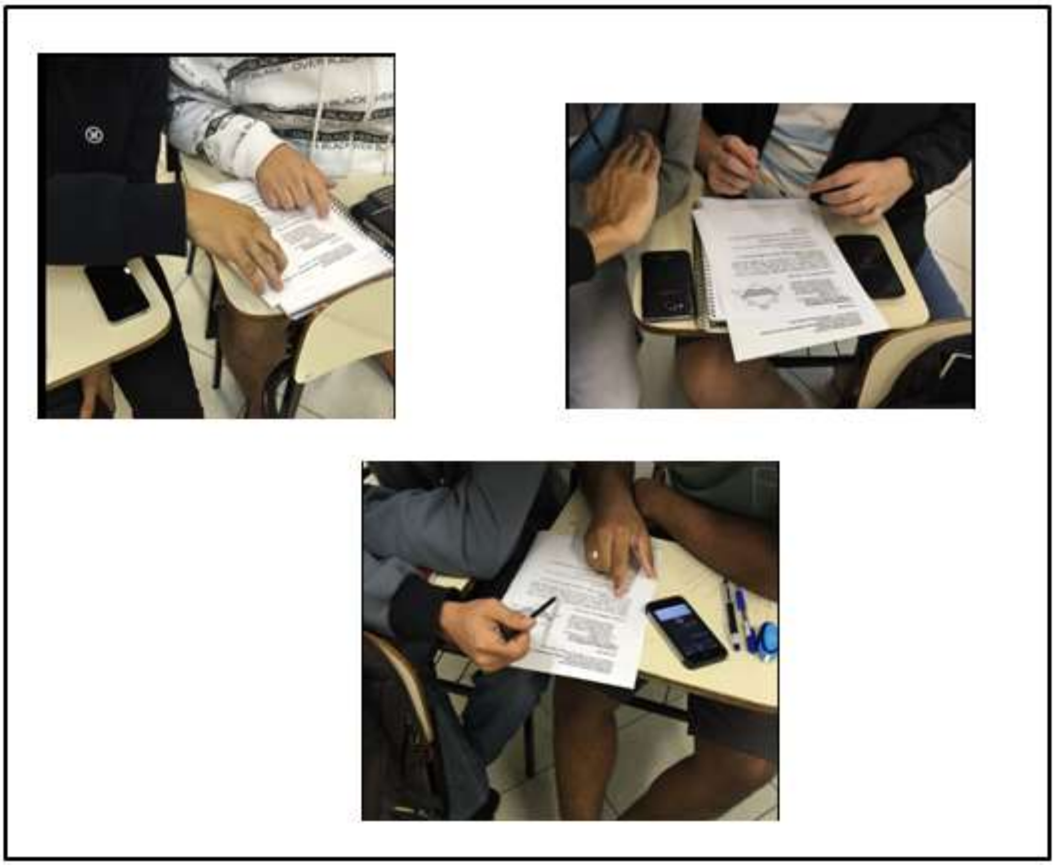


Figura 136: Duplas lendo e discutindo a questão proposta

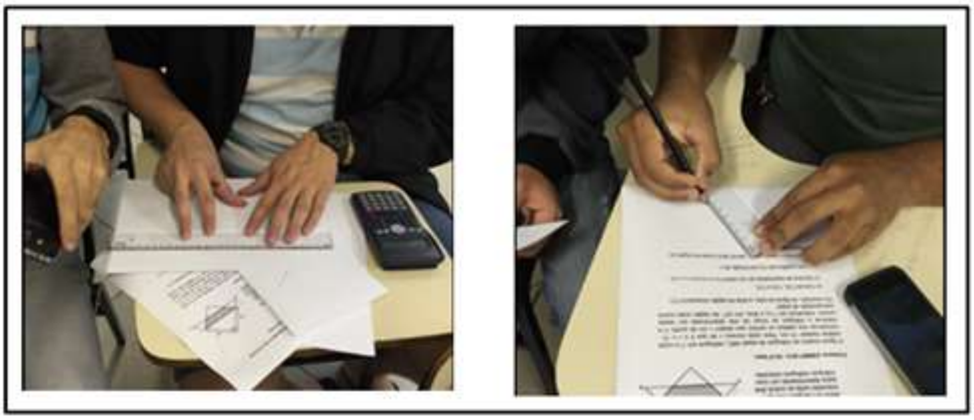


Figura 137: Participantes elaborando a representação figural da situação proposta

Quando observamos a ação dos alunos frente à situação proposta, notamos a presença de algumas características do pensamento matemático avançado elencados por Dreyfus (1991): representar, visualizar, generalizar, conjecturar, abstrair e formalizar, o que nos leva a garantia de que a atividade proposta, encontra-se no nível do pensamento matemático avançado.

Destacamos, nessa fase da resolução, a necessidade das representações e a importância da visualização. Segundo Dreyfus (1991) a visualização inclui, por si só, interpretação, compreensão de modelos visuais além da capacidade de traduzir em informação de imagens visuais o que é dado em forma simbólica.

Por se tratar de um problema que além das informações algébricas, também trabalhamos com as informações geométricas, destacamos a presença do que Duval (1995) chamou de apreensão operatória, ou seja, as transformações possíveis da representação figural inicial por organização perceptiva[43]. Essas modificações apontam para a obtenção de novos elementos que podem levar à solução de uma determinada situação-problema.

Chamou-nos a atenção a conversa entre os membros da dupla F, durante o esboço da figura. (Figura 138)

[43]Diz respeito à interpretação das formas de uma figura geométrica que permite identificar ou reconhecer de forma direta o objeto. Duval. 1995

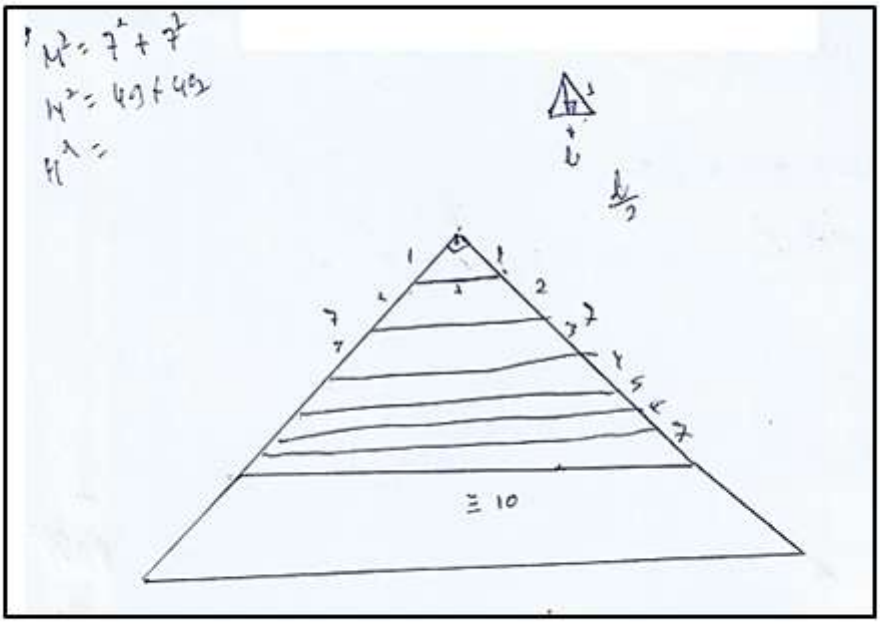


Figura 138: Representação figural inicial proposta pela dupla F.
Fonte: Protocolo dos participantes

> *F1: Cara, esse negócio de ficar riscando não dá certo! Vamos ler de novo!*
>
> *F2: Ele "tá" falando que a figura é dobrada. Oh, tem que lembrar que esses dois lados são "iguais". O triângulo é equilátero. Não é isso?*
>
> *F1: Que equilátero doido, o "bicho" é isósceles. Mas acho que temos que recortar isso. Pega o papel aí.*
>
> ...
>
> *F2: Desenhar eu desenhei, mas não "tô" vendo a área ainda*
>
> *F1:Pô cara, temos que dobrar. Vamos dobrando! Mas vamos fazer uma figura grande.*

A partir desse momento, os alunos optaram por trabalhar com a figura recortada em papel.

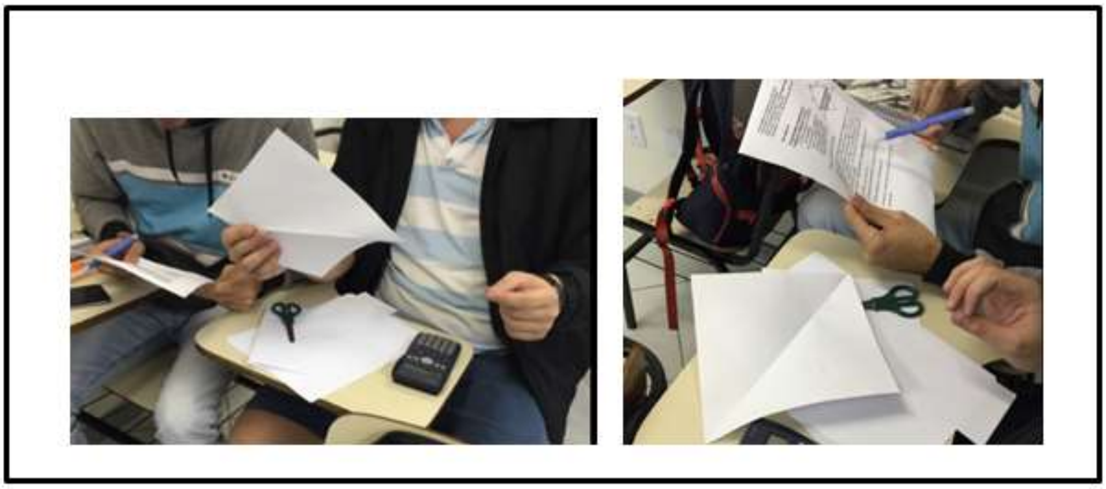


Figura 139: Esboço inicial da dupla F

Feito o recorte, começaram a pensar sobre o primeiro item proposto que seria calcular f(2). (Figura 140)

> *F2: Oh, já recortamos. Ele quer a área. De eu dobrar 1 cm a área dobrada é a f(1). Certo?*
>
> *F1: Certo! Então a f(2) é a área quando a gente dobrar 2 cm para baixo, não é isso? É isso sim. Mas o meu problema é identificar a função.*
>
> *Pesquisador: Será que nesse momento vocês precisam conhecer a função? Vocês sabem calcular a área de um quadrado? De um triângulo?*
>
> *F1 e F2: Sabemos*
>
> *Pesquisador: Então vamos pensar! Vocês já tem papel e tesoura agora, mãos a obra !*
>
> *F2: Oh, se é pra fazer f(2) ele vai dobrar dois aqui e dois aqui. Qual a área que vai aparecer?*
>
> *F1: Ah, tá!*
>
> *F2: Oh, quando for f(5), ele vai ter cinco aqui e cinco ali.*
>
> *F1: Ah, manjei!*
>
> *F2: Tem que ter cuidado pois na f(7) vai passar.*
>
> *F1: Calma p(...) , vamos calcular a f(2) e a f(5)*

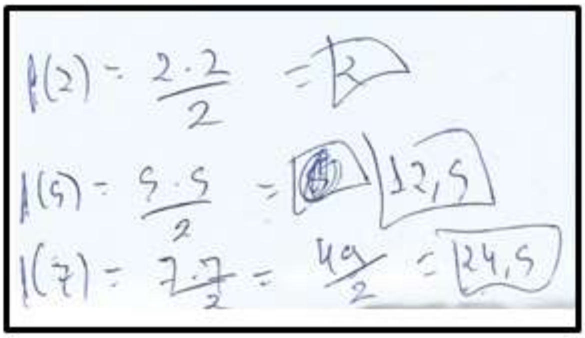


Figura 140: Resolução item (a), dupla F.
Fonte: Protocolo dos participantes

Observamos que inicialmente, o fato dos participantes estarem tentando encontrar a forma explicita da função, foi um dos fatores que estavam impedindo a resolução da questão. A partir do momento em que começaram a pensar sobre a representação figural, ao invés de se preocuparem com a lei de formação da função, o resultado foi encontrado.

De acordo com Almeida (2010), a representação e a visualização estão no núcleo de sua compreensão e o papel de ambas é fundamental no pensar e aprender matemática.

A partir do momento em que as outras duplas perceberam que a dupla F havia respondido o primeiro item da atividade proposta, pediram ajuda ao grupo. O pesquisador apenas pediu que a dupla não desse o resultado, mas que poderiam mostrar como desencadearam o pensamento. Durante as suas ponderações frente aos colegas, os participantes da dupla F, enfatizaram a utilização da figura, bem como a manipulação sobre essa representação, justificando que foi só a partir do trabalho sobre a o material concreto que eles conseguiram resolver a questão. Observamos que desse momento em diante outras duas duplas também resolveram construir a figura e recortá-la.

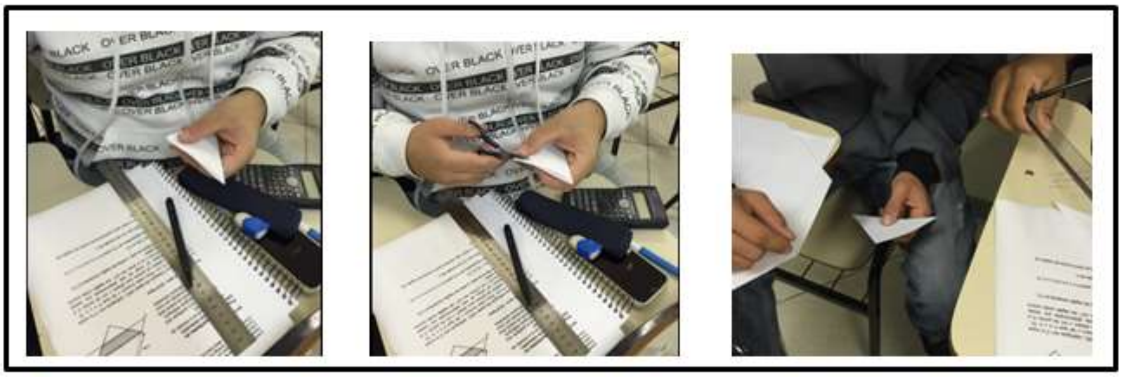


Figura 141: Outras duplas manipulando material concreto

Duval (2000) salienta que o pensamento humano requer a mobilização de um heterogêneo sistema produtivo de representações e sua coordenação. De modo peculiar, encontramos uma diversidade de sistemas de representações que condicionam a operacionalidade, os 'modelos mentais' que necessitamos adquirir e, posteriormente, possibilitam a mobilização destes para uma evolução conceitual consistente. No caso da atividade, percebemos uma articulação, ou seja, uma conversão entre os variados tipos de representação, como veremos ao longo da análise da atividade.

No momento da resolução, do primeiro item, observamos duas estratégias de resolução. Observemos:

> *F1: Já sabemos que o triângulo tem 2 cm de base. Mas e a altura? A área não é base "vezes" altura?*
>
> *F2: É isso sim, temos que descobrir a altura. Mas como vamos fazer isso?*
>
> *F1: Usar aquela "parada" de Pitágoras.*
>
> *F2: Não dá. Só temos um lado*
>
> ...
>
> *F2: Cara, lembra como começamos. Isso aqui é um quadrado. Como acho a área do quadrado? Não é lado vezes lado? Então dois "vezes" dois dá quatro. Como cortou no meio fica quatro dividido por dois que dá dois.*
>
> *F1: Entendi. Então f(2) é igual a dois vezes dois dividido por dois.*

A primeira estratégia de resolução adotada pelos participantes de dupla F, foi a de observar e inferir que estavam de frente para um triângulo que era retângulo. A seguir, como não conseguiram concluir qual seria a área da figura, por meio da representação do triângulo retângulo, elaboraram a segunda estratégia de pensamento, a de perceber que esse triângulo era na verdade a metade do quadrado inicial.
Observemos agora o desenvolvimento proposto pela dupla D:

> *D: Depois que recortou ficou mole. Os lados do triângulo tem o mesmo tamanho. E ele é reto. Agora basta calcular a área.*
>
> *R.: Mas a área é base vezes altura e só temos a base.*
>
> *D: Não! Ele é reto. É só girar o triângulo e fica lado vezes lado dividido por dois*
>
> *R: Então ficou fácil!*
>
> ...
>
> *R: Pronto, matamos a letra a*

Figura 142: Dupla D recortado: com o triângulo

A análise da continuação do diálogo dos participantes da dupla D, nos evidencia que esses participantes concluíram, por observação, que o triângulo, mais do que um triângulo retângulo, era um triângulo retângulo e isósceles. A parir dessa constatação e apoiados pela possibilidade de “girar” o triângulo, os participantes, obtiveram êxito na resolução o item proposto.

Ao observarmos as estratégias de resolução propostas pelas duplas, verificamos que um dos objetivos propostos pelos pesquisadores estava sendo atingido, ou seja, a exploração da situação, na busca da construção de uma alternativa de resolução baseada na reflexão em detrimento dos procedimentos algébricos puros.

Tall (1991) observa que os métodos de ensino de Cálculo na universidade tendem a apresentar aos alunos o produto final do pensamento matemático, ao invés dos processos do pensamento matemático. Com isto, há uma supervalorização de processos de abstração e métodos dedutivos, em detrimento do desenvolvimento de processos heurísticos. Ainda segundo o autor, essa linha metodológica acaba por não propiciar ao aluno experimentar o poder do pensamento matemático avançado.

Pudemos verificar que como nos afirma Tall (1991), foi por meio da articulação ente as representações motoras (processos físicos) e icônicas (processos visuais) além das três formas de representação simbólica: a verbal (descrição), a formal (as definições) e a proceitual (dualidade processo - objeto), que os participantes foram capazes de solucionar a questão proposta.

Quando em nossa sequência de atividades optamos por apresentar uma atividade onde os recursos de resolução extrapolam os algoritmos, convencionalmente usados, estamos propondo que se evitem os obstáculos cognitivos, uma vez que estamos partindo dos conhecimentos trazidos pelos estudantes.

Chamou-nos atenção a conversa entre os alunos da dupla D, quando precisavam responder o item que pedia a lei de formação da função f(x) no intervalo [0,5].

> *D: Agora temos que “achar” as expressões para “fx” com limites de 0 e 5*
>
> *R. 0 e 5 e 5 e 10, certo? A gente teria que fazer uma integral aí? È questão de área.*
>
> *D. Integral com limite?*
>
> *R. Seria uma integral dupla?*

D: Integral dupla não. Você só tem uma variável. O que nós temos são dois limites cara. Um de 0 a 5 e outro de 5 a 10.

D.: Cara eu "tô" viajando. Cara, existe algum gráfico que forma um triângulo?

D: Professor estou numa viagem.

Pesquisador: Se vocês já fizeram a letra a, a letra b será uma consequência.

D: Tem que achar as expressões de f(x). O cara, eu acho que é assim, quando x for igual a zero você vai ter uma área, quando x for igual a 5 você vai ter outra área, quando x for igual a 10 você vai ter outra área.

R. Sim

D. Professor, estamos com Dificuldade.

Pesquisador: Me mostra na figura e me explica como vocês resolveram a letra a

D: A gente considerou que os lados são iguais e fizemos lado vezes lado dividido por 2. Tanto para f(2) como para f(5).

Pesquisador: Hum! E então?

R. Mas cara, nós não sabemos o lado, basta chamar de x

D: Pronto! Achamos a função!

Segundo Tall (1991) muitas vezes, no ensino de matemática da graduação, é apresentada a forma final da teoria ao invés do aluno participar do ciclo de criação da mesma.

Ao pensarmos a construção da atividade 05 para a primeira intervenção, levamos em conta as ideias de Tall (1991) quando ele nos afirma que neste ciclo há a necessidade de começar com conjecturas e debate, para construir significado, para refletir sobre definições formais, construir o objeto abstrato cujas propriedades são aquelas e só aquelas que podem ser deduzidas da definição.

Quando os alunos interagiram sobre a figura recortada e foram instigados pelo pesquisador a explicar como calcularam os valores de $f(2)$ e de $f(5)$, para pensarem em como calcular a expressão da $f(x)$ em [0,5], os mesmos partiram de suas conjecturas para chegarem à generalização (Figura 143).

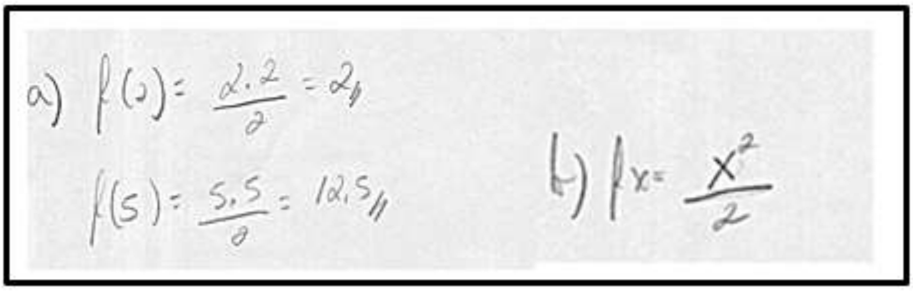


Figura 143: Generalização do exercício b. Dupla D.
Fonte: protocolo dos participantes

Assim como a dupla D, as duplas F e I concluíram a lei de formação da função $f(x)$ no intervalo [0,5], por generalização do cálculo de $f(2)$ e $f(5)$.

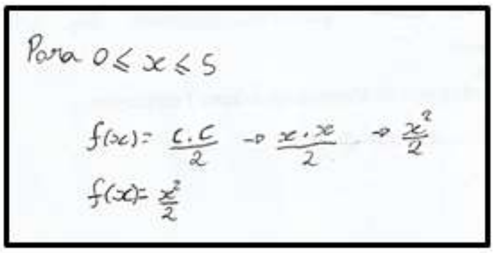


Figura 144: Resolução da dupla I.
Fonte: Protocolo dos participantes

O próximo item da questão 5 pedia para que os alunos determinassem a lei de formação da função $f(x)$ em [5,10].

Nesse item, os alunos da dupla D, não responderam e justificaram conforme reproduzido na Figura 150.

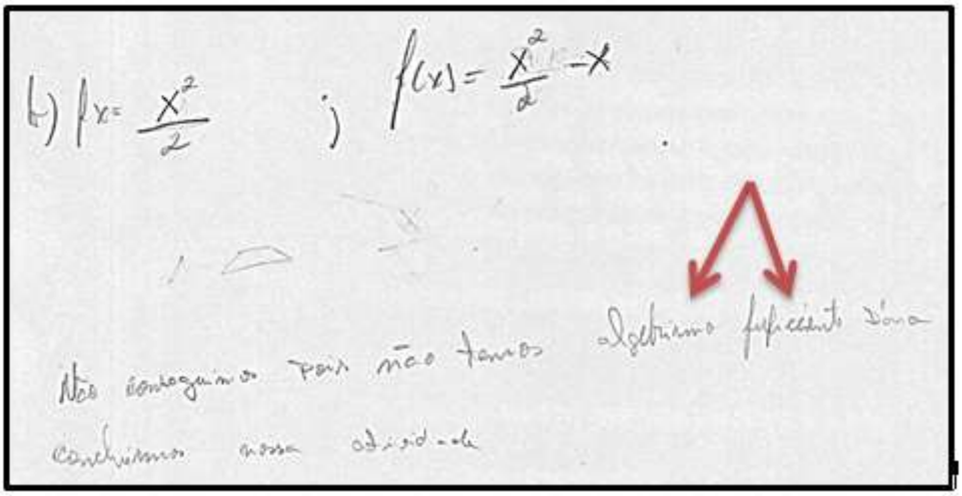


Figura 145: Protocolo da dupla D

A dupla I, a única que não havia desistido de terminar a resolução da questão, ao encontrar dificuldades em determinar a lei da função para os valores de x no intervalo [5,10], optou por voltar a pensar na área do trapézio, ou seja, determinar o valor de $f(7)$.

Observemos o diálogo:

> *F1: A f(5) foi 5 vezes 5 sobre 2, ou seja , 12,5.Certo?*
>
> *F2: Então f(7) seria 7 vezes 7 sobre 2, ou seja , 49 sobre dois que dá?*
>
> *F1: 24 e meio, ou seja 24,5*
>
> *F2: Só que tem que descontar isso daí.*
>
> *F1.: Descontar o que? Ah é, já sei, tem que descontar o que vai passar.*
>
> *F1.: Isso é a m..., vai passar quanto? Vamos ter que descontar quanto? Como é que a gente descobre quanto vai passar?*
>
> *F2: Vamos pensar.*
>
> *F1: Nem precisa pô, basta fazer " 7 menos 10" vai dar "3". Oh, eu tenho 10 vou dobrar 7, vai passar 3.*
>
> *F2: É, é isso.*
>
> *F1: É logico!*
>
> *F2: Quero fazer o teste!*
>
> *F1: Não precisa tem que dar!*
>
> *F1: Mas pode fazer, tem que dar 3. Se não der tá errado.*
>
> *F2: Cara, não deu 3, deu 4!*
>
> *F1: Deu 4 por conta do desenho. Não pode passar 4. Se somar 7 com 4 dá 11!*
>
> *F2: Olha aqui, eu fiz direitinho com régua! Fiz até colorido como na folha! Deu 3 nesse triângulo pequeno! Pergunta a ele se esses três triângulos são iguais.*
>
> *F1: Tá, deixa eu perguntar!*
>
> *F1: Professor, é, esses dois triângulos aqui "é" diferente desse daqui "né"?*
>
> *Pesquisador: Sim*
>
> *F2: Viu só! Então não é 3. Quando você pega 7 e dobra, esse valor que fica pra fora não é 3!*

> *F1: Professor, tá errado! Se o lado mede 10 e eu dobro 7 tem que sobrar 3.*
>
> *Pesquisador: risos*
>
> *F2: Não cara! Se você dobrar, aqui é que vai dar 3. Vai sobrar 4. Olha aqui!*
>
> *F1: Ah é isso mesmo.*
>
> *F1: Agora sim, a sombra vai ser f(7) – f(4)*

O desenho abaixo indica a representação feita pelo aluno F2.

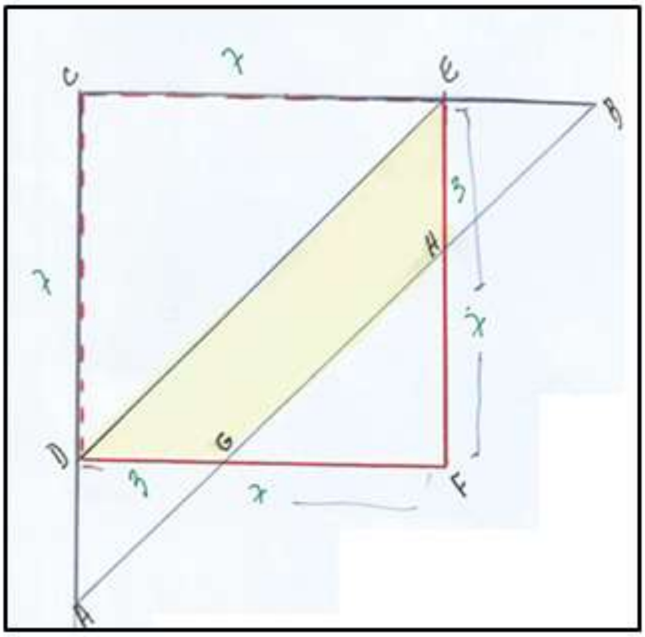


Figura 146: Representação figural feita pelo aluno F2.
Fonte: Protocolo dos participantes

Como já mencionamos anteriormente, foi a partir da manipulação das representações do objeto, que os estudantes conseguiram determinar de forma correta a área do trapézio. Vale destacar que até esse momento, nem no áudio nem nos protocolos escritos, a região colorida foi tratada pelos estudantes como trapézio. Todo o cálculo feito foi por meio de sobreposição de figuras.

Depois de determinarem a área dessa figura, os alunos voltaram sua atenção para a obtenção da lei de formação da função f.

Pela análise dos protocolos e do áudio, podemos verificar que a construção da função que modela a situação descrita só foi possível por conta da ação do participante sobre a figura, já recortada.

> *F1: Tá difícil rapaz !!!!*
>
> *Pesquisador: Vocês precisam esquecer o 10 e começar a pensar em um número qualquer no intervalo dado*
>
> *F1: Esquece a p ...do 10. Vai ser x.*
>
> *F1: Se o 10 é x, como é que chegamos no 4? Pega o triângulo cortadinho de novo!!*
>
> *F1: O lado é x, que vale 10.*
>
> *F2: Agora com a figura vai fluir*
>
> *F1: O lado é x, quando você dobra mais do que 5 ...*
>
> *F2: Calma aí. Você chamou o lado todo de x. O 10 é o x, e você tem que dobrar y.*
>
> *F1: Calma, respira! Pega outra folha.*
>
> *F1: Primeiro, como faz pra achar o quatro: é 10 menos o valor que eu quero, que é x mais o que? A sobra. Mas, qual é a sobra?*
>
> *F2: Já me perdi!*
>
> *F1: Pensa se x for 7? 10- 7 dá 3. Aí a gente fez 7 – 3 pra dar 4.*
>
> *F2: Até aí tudo bem!*
>
> *F1: Então! É isso aí que eu tenho ...*
>
> *F1: Rapaz como pode. A gente fez a conta certinha, mediu com a régua! O negócio é transformar isso em função!*
>
> *Pesquisador: Olha pro desenho!*
>
> *F1: Vamos de novo; $f(x) = x^2/ 2$ menos $2x +10$. Ih, não deu certo!*
>
> *Pesquisador: Gente, preste atenção! O que acontece quando a dobra é maior do que 5?*
>
> *F1 e F2: Aprece o trapézio!*
>
> *Pesquisador: Perfeito! Agora pensem! Como eu posso calcular a área desse trapézio?*
>
> *F1: A área que eu quero é a área toda, ou seja, $x^2/2$ menos a área menor. Mas como eu calculo a área menor?*
>
> *F1: Agora vai, eu acho! Risos*
>
> *F2: Você tem que pensar para umlado qualquer. Caraca que difícil !*

F1: Como eu faço aparecer o quatro aqui dentro?

F2: -2x + 10, mas como eu quero área tem que ser ao quadrado.

A partir da análise dos diálogos, ficou evidente para os pesquisadores a importância da manipulação do material concreto. Assim como nos afirma Tall (1995), “ a atividade humana, compreende três componentes: a percepção, o pensamento e a ação.” Durante a análise dos protocolos produzidos pelos participantes da pesquisa, ficou bastante nítido que os componentes retro mencionados, permitiram que os participantes, durante a atividade matemática percebessem os objetos, pensassem sobre eles e, então, atuassem sobre eles ou com eles.

Outra característica que chamou bastante a atenção dos pesquisadores foi o forte indício da presença do Mundo Conceitual Corporificado nas atividades dos participantes. O mundo conceitual corporificado coordena percepções e ações relacionadas a objetos físicos ou mentais. Tal mundo está relacionado ao processo de representar, visualizar, a partir destes processos estruturamos o objeto em nossa mente e capturamos as propriedades que são observáveis no objeto, procedimentos esses, presentes em todas as etapas da resolução dessa atividade por parte dos participantes.

Constatamos também, por meio dos protocolos e áudios que, por meio da visualização e da intuição, foi possível que eles validassem as ações no mundo conceitual corporificado. Por exemplo, puderam visualizar o triângulo e mais a seguir o trapézio, identificaram as propriedades desses polígonos e relacionaram a outros conceitos e propriedades – neste caso, o “mundo matemático” evidenciado foio mundo conceitual corporificado.

Durante a análise dessa tarefa, observamos também de maneira bastante “forte” a articulação entre o Mundo Corporificado e o Mundo Simbólico, sendo esse segundo, contemplado nas atividades, a partir da imersão dos participantes no Mundo Corporificado. O mundo simbólico proceitual evidenciou-se na utilização, pelos participantes, dos símbolos da álgebra e cálculo. Tais símbolos representaram as percepções e ações que estavam presentes no mundo conceitual corporificado. Cada símbolo “carregou” consigo a particularidade de conter características do conceito que o símbolo representa e da ação que efetuamos sobre eles.

A análise dos protocolos, também permitiu que os pesquisadores constatassem a presença, mesmo que menos acentuada inicialmente, do Mundo Axiomático Formal. Essa presença evidenciou-se a partir do uso de corporificações e proceitos, pois fez-se necessário formalizar o objeto matemático. Tal formalização indica a passagem para o mundo axiomático formal, no qual, a partir de um conjunto de definições, propriedades e teoremas, os participantes puderam concluir a prova matemática.

A Figura 152 mostra o passo a passo do trajeto desenvolvido pela dupla “F” e a articulação entre os Três Mundos da Matemática.

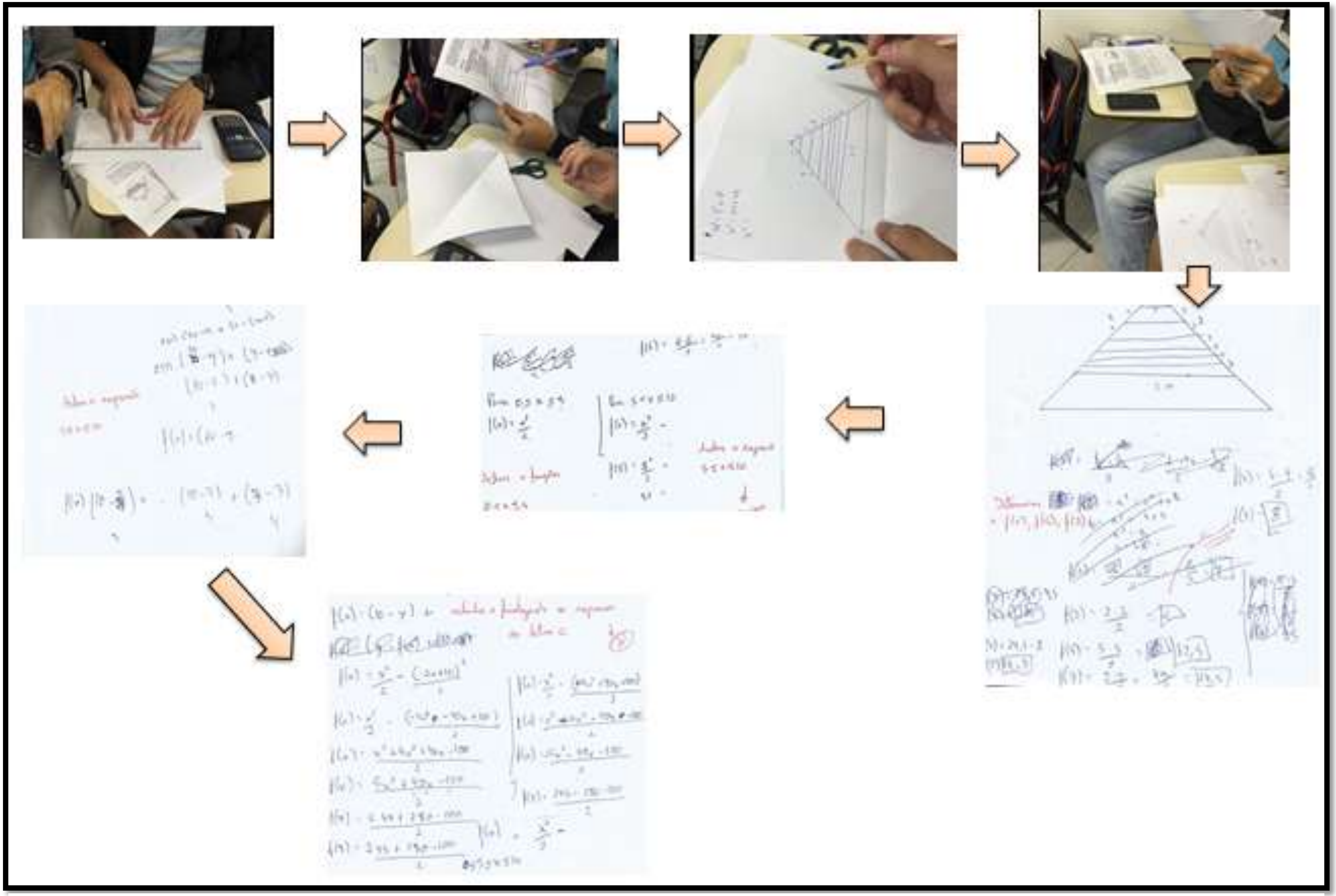


Figura 147: Etapas percorridas pela dupla F

Nesse contexto podemos entender que a utilização das representações figurais e do material concreto(figura 148) se constituíram elementos indispensáveis na resolução da situação proposta pela intervenção.

Tall (1986) considera a utilização de organizadores genéricos como parte do desenvolvimento de materiais de ensino, pois por meio deles é possível fornecer “ao aprendiz experiências apropriadas de modo que ele esteja cognitivamente pronto para novos conceitos matemáticos quando eles são introduzidos”.

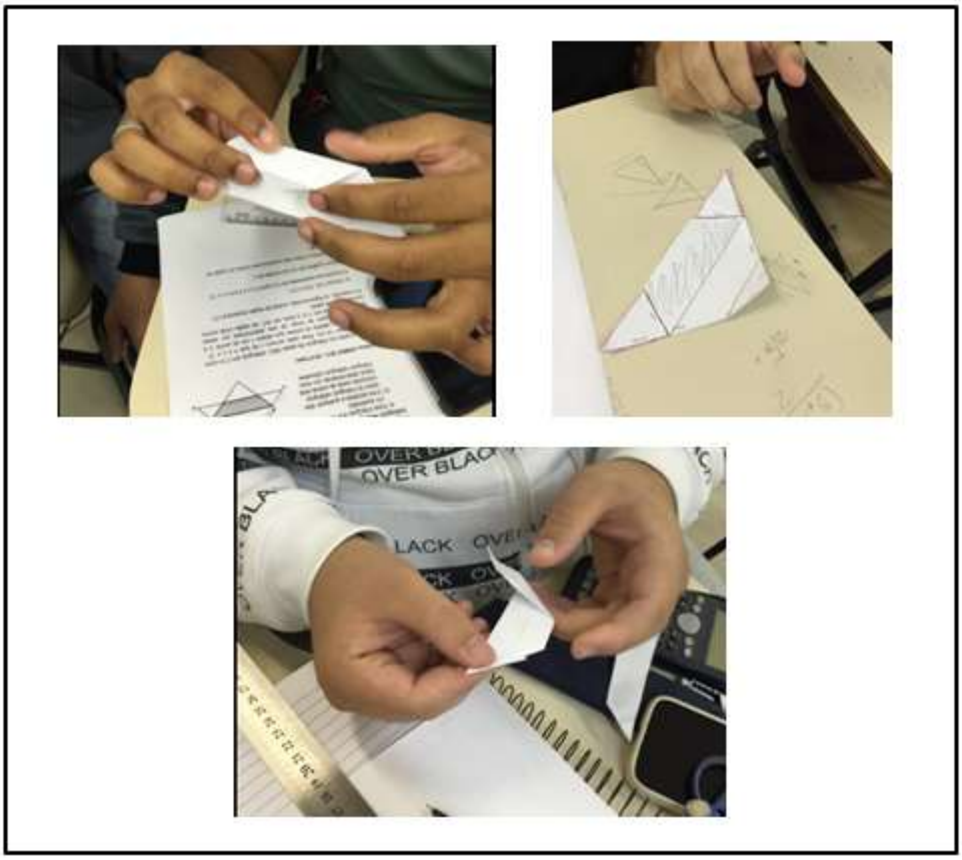


Figura 148: Alunos manipulando o modelo criado para representar a situação.

Ao analisarmos os alunos em ação durante a resolução da situação proposta, podemos observar que os registros por eles criados e utilizados cumpriram as funções cognitivas de comunicação, tratamento, objetivação e função de identificação.

Ainda na atividade 05 foi pedido aos alunos que esboçassem o gráfico da função f. Nenhuma das duplas conseguiu fazer o esboço. Esse fato já era uma hipótese considerada pelos pesquisadores.

A construção do gráfico foi solicitada aos alunos, já com a intenção de identificar as dificuldades no traçado do mesmo e o ponto de máximo da função

Para encerrar a atividade era pedido aos alunos que determinassem o maior valor possível para a área da região de sobreposição. Por conta da hora em que já nos encontrávamos, a única dupla que ainda não havia entregado a resolução questão alegou precisar ir embora, sendo assim, não responderam integralmente a questão.

Em seguida, segundo o cronograma, relatamos a discussão das atividades com os participantes.

Encontro realizado no dia 18/06/2016

- Realização do primeiro feedback com os participantes da intervenção

Iniciamos o encontro propondo uma discussão sobre cada uma das questões propostas na primeira intervenção bem como das respostas que foram dadas para cada uma delas.

A análise das questões referentes aos conceitos relativos ao comportamento das funções, bem como as questões relacionadas aos pontos de máximo e mínimo de uma função de uma variável real, nos levaram à constatação de que esses conceitos deveriam ser retomados e rediscutidos.

Essa certeza foi proveniente dos seguintes dados, retirados dos protocolos dos alunos e já apresentados nesse trabalho:

- ✓ Os alunos associaram o crescimento e o decrescimento de uma função a concavidade da parábola, mesmo num cenário onde a função estudada não era uma função polinomial do segundo grau;
- ✓ A tentativa de determinar o ponto de máximo e mínimo de uma função por meio das coordenadas do vértice da parábola, mesmo estando de frente para uma função polinomial de grau 3;
- ✓ Associação de ponto máximo ao “valor” mais alto do gráfico;
- ✓ A necessidade de se comprovar algebricamente informações já determinadas por meio da representação gráfica da função.

Sabemos que a construção de um conceito matemático é feito ao longo de uma trajetória, e que não se dá de uma maneira linear além de que esses conceitos a todo o momento são revisitados e modificados a partir de novas interações do sujeito sobre o objeto matemático em questão, tomando como ponto de apoio o nível de desenvolvimento em que se encontra o sujeito.

Desta forma, justificamos nossa escolha por retomar a ideia de compreender o comportamento de uma função, termo esse desconhecido pelos participantes. Estes só "entenderam" o termo comportamento quando o pesquisador informou que estudar o comportamento de uma determinada função significava estudar, se, e como essa função cresce e/ou decresce num intervalo conveniente. Nesse momento chamou-nos atenção o comentário de um dos participantes

> *Participante1: Professor, saber se ela é crescente ou decrescente basta olhar se o gráfico está subindo ou descendo*.

Como as atividades 1 e 2 da primeira intervenção tinham por objetivo analisar o comportamento de uma função por meio de sua representação gráfica, as imagens de conceito dos participantes foram suficientes para responder as questões propostas.

Como nosso estudo fundamenta-se também na teoria do Pensamento Matemático Avançado, nos valeremos nesse momento, de um dos pressupostos de Dreyfus (2002), que nos afirma que esse tipo de pensamento consiste na interação de vários outros, dentre os quais destacamos nesse momento a visualização e generalização. Sendo assim, aproveitamos para discutir com os participantes o conceito de função crescente e função decrescente a partir da análise da representação gráfica de algumas funções para então generalizarmos e definirmos o objeto matemático em questão.

Uma vez discutido com os participantes o conceito de comportamento de uma função, e rediscutida a questão de número 1 da intervenção, fomos abordados por um dos participantes que identificamos nos protocolos como sendo o participante 1, conforme reproduzido abaixo:

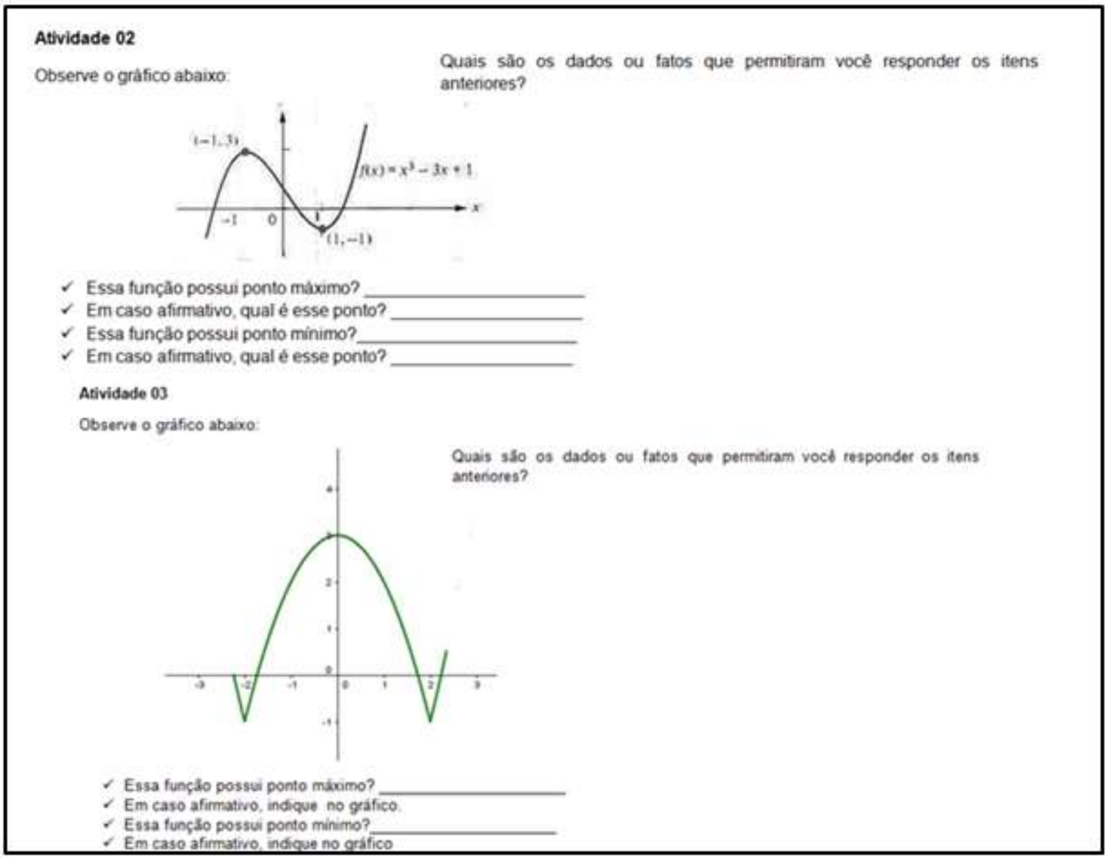
> *Participante I: Professor foi isso que eu fiz. Eu só não soube explicar desse jeito certinho que o senhor está fazendo.*

Pesquisador: Certo! Então me explica como você pensou?

Participante 1: Eu ia olhando os pontos anteriores e ia vendo se os que vinham depois aumentavam de valor. Se isso acontecesse a função "tava" crescendo

Partindo dos pressupostos de Dreyfus (2002), que afirma que embora as pessoas se valham de esquemas internos para construção de esquemas mentais, as representações simbólicas tornam-se necessárias para a comunicação compreensível do conceito, ou seja, para sua "exteriorização", trabalhamos a "exteriorização" de forma coletiva de forma a chegar à definição formal de função crescente e/ou decrescente.

Quando começamos a discutir a questão 02 (figura 149) com os alunos, aproveitamos para mostrar que era basicamente a mesma ideia da questão 03, com uma diferença marcante que seria o fato de na questão 02 a lei de formação da função ser explicita e na questão 03, tal fato não ocorrer.


Atividade 02

Observe o gráfico abaixo:

Quais são os dados ou fatos que permitiram você responder os itens anteriores?

- ✓ Essa função possui ponto máximo? ____________________
- ✓ Em caso afirmativo, qual é esse ponto? ____________________
- ✓ Essa função possui ponto mínimo? ____________________
- ✓ Em caso afirmativo, qual é esse ponto? ____________________

Atividade 03

Observe o gráfico abaixo:

Quais são os dados ou fatos que permitiram você responder os itens anteriores?

- ✓ Essa função possui ponto máximo? ____________________
- ✓ Em caso afirmativo, indique no gráfico.
- ✓ Essa função possui ponto mínimo? ____________________
- ✓ Em caso afirmativo, indique no gráfico

Figura 149: Atividades 2 e 3 Intervenção 01

Embora para (Domingos, 2003), a visualização seja um processo mental, responsável pela formação de imagens utilizando-as na descoberta e compreensão de conceitos matemáticos, a partir das análises dos protocolos das resoluções, nos ficou bastante evidente a "insegurança" dos participantes em responderem as questões valendo-se apenas da visualização. Essa insegurança ficou bastante nítida dos depoimentos dos alunos L, F além da dupla L & L, encontradas nas páginas 232 e 234respectivamente. O trabalho frente a essa resistência consistiu em confrontar os dados obtidos algebricamente com as informações obtidas por análise das representações gráficas das funções.

A atividade 04, presente na intervenção 01 era uma questão bastante similar à questão presente na atividade diagnóstica (tese p.235) e nessa questão todos os alunos resolveram de forma satisfatória.

A última atividade presente na primeira intervenção foi a que mais provocou o interesse do grupo, seja na aplicação da atividade seja no momento do *feedback.*

Inicialmente os participantes mostraram-se resistentes à utilização do material concreto (papel, régua, tesoura, lápis, lápis de cor) levado pelo pesquisador para a sala de aula. Esse comportamento ficou evidente no comentário de um dos alunos da dupla F, dupla que conseguiu resolver a questão proposta.

> *Aluno 1 da dupla F: Aí, professor, quando vimos aquele monte de coisa que o senhor trouxe, achei uma "parada" estranha. Brinquei com o F....dizendo que o senhor estava pensando que estamos no jardim.*

Nesse momento o participante foi questionado pelo pesquisador sobre a utilização do material concreto.

> *Pesquisador: Mas se vocês estavam resistentes a usar o material que eu trouxe por qual motivo vocês usaram?*

> *Aluno1 da dupla F: Simples, a gente, desenhava, desenhava, desenhava e não conseguia ver a área. Aí o F..., falou pra gente tentar recortar e dobrar a figura pra ver se enxergávamos a "parada".*
>
> *Aluno 2 da dupla F: Na verdade professor, só saímos do lugar depois de dobrar e recortar a figura.*
>
> *Pesquisador: Outras duplas usaram o material. Por que, vocês optaram por essa alternativa?*
>
> *Aluno da dupla D: Estávamos presos, sem saída, quando vimos que o F, estava conseguindo sair do lugar, resolvemos ir pelo mesmo*

Ao analisar os protocolos dos alunos, verificamos que uma das duplas associou a resolução da questão ao uso de integrais, fato esse que resolvemos investigar durante esse encontro. Já que pretendíamos descobrir o motivo da tentativa de utilização das integrais por uma das duplas, resolvemos instigar os participantes. Para tanto, esperamos que o encontro acabasse, para conversarmos com a dupla D (alunos D1 e D2)

> *Pesquisador: Pessoal, na verdade, do que esse problema estava tratando?*
>
> *Participante D1: Era um problema "sinistro" de área.*
>
> *Pesquisador: Lendo as resoluções de vocês percebi que vocês, tentaram resolver o problema por integração. Me digam por que pensaram nisso?*
>
> *Participante D1: Professor, a questão era de área, tinha função, pensei em integral.*
>
> *Participante D2: Professor, também pensei em integral, só que pensei em integral dupla. Na verdade por que estava estudando isso nas aulas de Cálculo.*
>
> *Pesquisador: Mas então, por que motivo vocês não usaram as integrais na resolução. Onde ocorreu o problema?*
>
> *Participante D 2: Nós não encontramos a função. Como "ia" fazer a integral?*

Quando analisamos o depoimento dos alunos fomos levados a perceber que embora "o indivíduo tenha várias representações ligadas a um conceito" (Dreyfus

2002), é indispensável que essas representações estejam articuladas entre si de maneira correta, para que possamos obter sucesso em sua manipulação.

Outro fator que ficou bastante evidente nas análises dos protocolos foi o fato da maior parte dos grupos não ter conseguido modelar a função área. Nesse contexto, somos levados a observar um outro processo presente na representação, a modelação.

Para Dreyfus (2002) este processo associa uma representação matemática a um objeto não matemático, mas, no caso do Pensamento Matemático Avançado, modelação "significa a construção de uma estrutura matemática ou teoria que [...] pode ser usada para estudar o comportamento do objeto ou o processo a ser modelado" (DREYFUS, 2002, p.34).

Como os alunos não conseguiram modelar, isso foi um entrave na resolução do exercício além de ser uma competência necessária no pensamento matemático avançado que ainda não estava plenamente desenvolvida nos participantes.

6.3. A segunda Intervenção.

Como o objetivo do presente estudo é apontar quais são os aspectos cognitivos e conceituais que são mobilizados por estudantes de engenhariano momento em que trabalham com valores de Máximo e Mínimo de funções de uma variável real, por meio dos problemas de otimização, entendemos ser importante que o trabalho fosse desenvolvido também com funções que não fossem polinomiais, além de não abandonarmos, obviamente, a ideia inicial da utilização dos problemas de otimização e de outras alternativas de resolução que não fossem o papel e o lápis.

Como parte da segunda intervenção seria desenvolvida com um software de geometria dinâmica, entendemos ser necessário um encontro prévio com os participantes para que pudéssemos fazer uma ambientação dos mesmos com alguns dos recursos do software escolhido, a saber: traçado de gráficos de funções e cálculo das derivadas de primeira e segunda ordem. O encontro aconteceu na quarta-feira, dia 22/06 pois nesse dia a turma só teria aula a partir das 21h, sendo assim, combinamos esse encontro de ambientação com o software para as 18h30min.

A segunda intervenção aconteceu no dia 25/06, às 8h30min numa sala próxima ao laboratório de informática, para que os participantes pudessem optar por qual ferramenta iriam utilizar para resolver cada uma das atividades propostas. Foi composta de um conjunto de três atividades que foram desenvolvidas em dois ambientes: a sala de aula e o laboratório de informática, partindo de uma função polinomial e a seguir, levando os participantes a trabalharem com situações que envolvessem funções não polinomiais.

Como na atividade 04 da primeira intervenção os alunos resolveram por meio de tentativas, optamos por apresentar uma nova questão, com raciocínio semelhante, onde a estratégia utilizada pelos alunos não fosse aplicável.

Apresentamos a seguir (figuras 150 e 151) a questão 04 da primeira intervenção e a seguir a atividade 01 da segunda intervenção.

Atividade 04

Resolva o problema abaixo, da maneira que achar mais conveniente. Não se esqueça de deixar indicada a maneira como você chegou ao resultado.

Considere dois números naturais cuja soma seja 8. Quais deles tem produto máximo?

Figura 150: Atividade 04. Intervenção 01

Atividade 01:

Construa um retângulo com 8cm de perímetro. Agora construa novos retângulos conservando o perímetro. Anote as novas áreas. Em que caso a área foi máxima?

Figura 151: Atividade 01, Intervenção 02

Ao observarmos os protocolos de resolução, percebemos que nenhum dos alunos participantes tentou resolver a questão por tentativa.

De forma geral, os alunos elaboraram uma representação geométrica da situação proposta, para só a partir dessa representação, modelar a função área.

Dentre os protocolos analisados, inicialmente o da Figura 158 nos chamou a atenção:

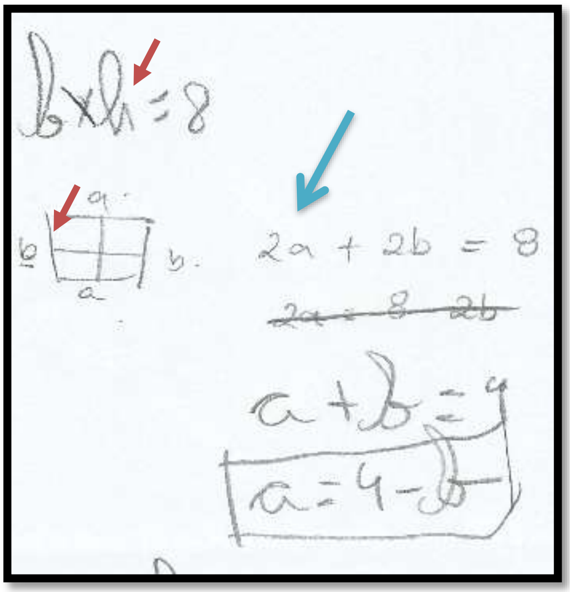


Figura 152: Resolução da questão 1, intervenção 2.
Fonte: protocolo dos participantes

Embora os participantes tenham cometido um equívoco em relação ao perímetro e a área, a questão foi resolvida de forma satisfatória.

Justificamos que a dupla concluiu a questão pelo fato do outro participante da dupla ter percebido o equívoco cometido pelo parceiro e ter feito a correção. Detectamos que houve uma correção ao observarmos as letras utilizadas durante a resolução. Desta forma, depois de contornado o equívoco entre área e perímetro, os alunos resolveram acertadamente a questão.

O segundo protocolo analisado nos evidenciou o fato de que a simples visualização de uma das representações de um objeto matemático pode não ser suficiente para garantir a apreensão de um conceito relacionado ao objeto.

Observemos o relato abaixo:

> *Participante 1: Oh, primeiro a gente tem que achar o perímetro pra depois achar a área.*
>
> *Participante 2: "Tá" já temos o perímetro. "Tá" escrito aqui. E a área?*

> *Participante 1: Basta fazer a base vezes a altura. Mas não temos base nem altura. Vamos ter duas letras. Temos que fazer ficar com uma letra e fazer "virar" função.*
>
> *Participante 2: Mas por que temos que achar a função?*
>
> *Participante 1: Oh, como vamos fazer o gráfico no programa sem a função? Professor, tem duas funções aqui? Qual devo usar?*
>
> *Pesquisador: Qual função você quer otimizar?*
>
> *Participante 1: A f(x)*
>
> *Pesquisador: Mas o que é a f(x)?*
>
> *Participante 1: A função área. Tá no problema, área máxima.*
>
> *Pesquisador: Então vocês já sabem com qual função vão trabalhar.*
>
> *Participante 2: Vamos jogar no programa. Muito rápido! Olha o gráfico pronto! Mole, Mole! Agora a gente tem que olhar onde bateu os pontos.*
>
> *Participante 1: Gente, o gráfico não acaba. Quanto mais eu puxo o gráfico mais ele continua! E agora? Como vamos analisar ponto por ponto? Ai meu Deus! O gráfico não para de descer! Olha pro gráfico. Um ponto é o mínimo e o outro o máximo.*

Entendemos melhor, a frase "o gráfico" não para de crescer quando examinamos os "*prints"* das telas do computador usado pela dupla para resolver a questão

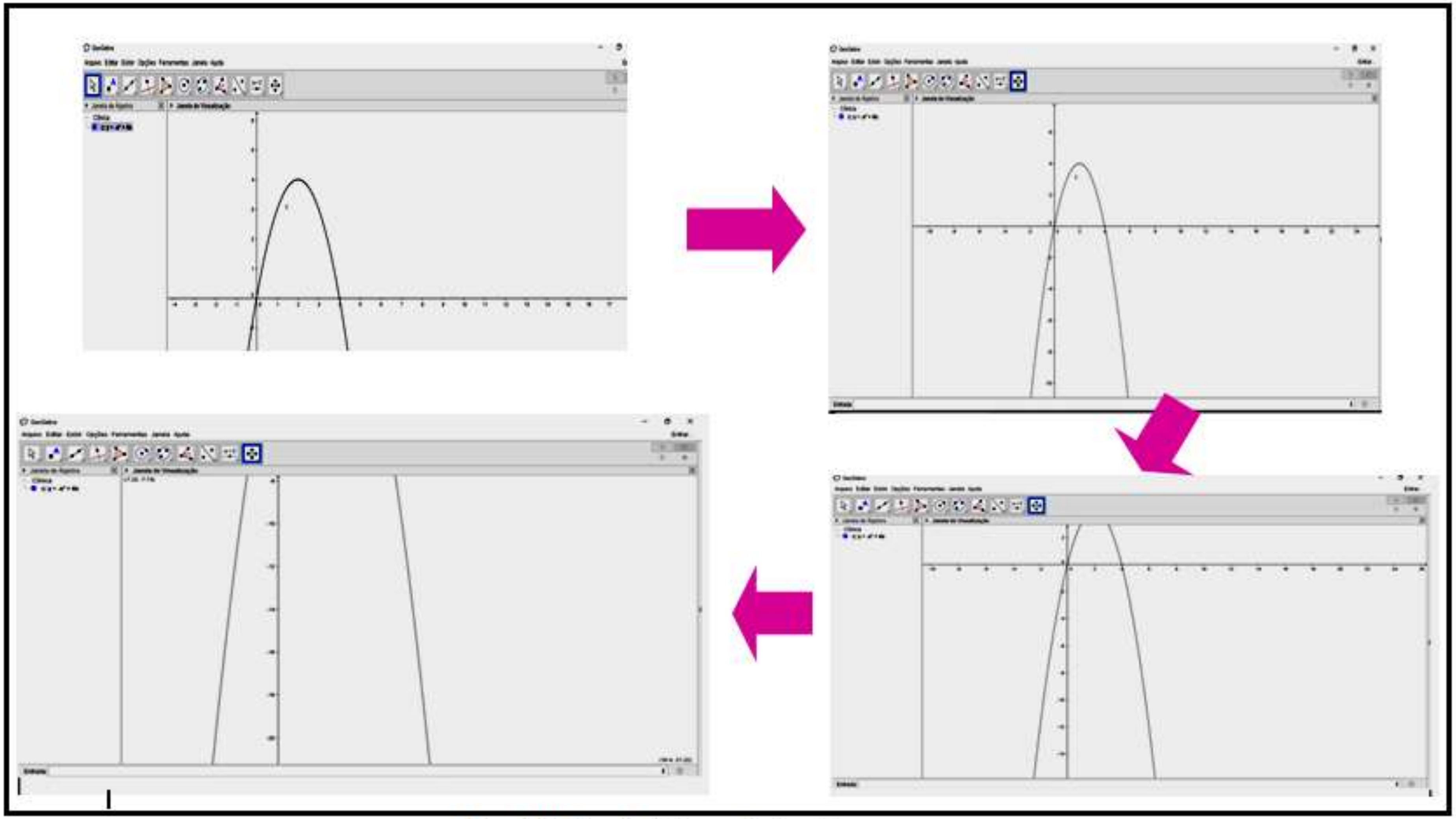


Figura 153:Print das telas de uma das duplas participantes

Concordamos com (FRANCHI, 2007) que afirma que o ambiente informatizado é um possível local para o desenvolvimento de atividades que visam passar pelo ciclo do pensamento matemático avançado, mas alertamos para o fato de que o ambiente informatizado fornecer um vasto conjunto de representações visuais de um objeto não é condição suficiente para o uso dessas imagens. Coadunamos à essa ideia o pressuposto de Domingos (2003) quando ele aponta em seus estudos que as várias representações devem estar relacionadas entre si para a efetiva construção do conceito.

Tal afirmativa se confirma quando observamos o diálogo da dupla, os *prints* das telas e os protocolos escritos como o da figura 154.

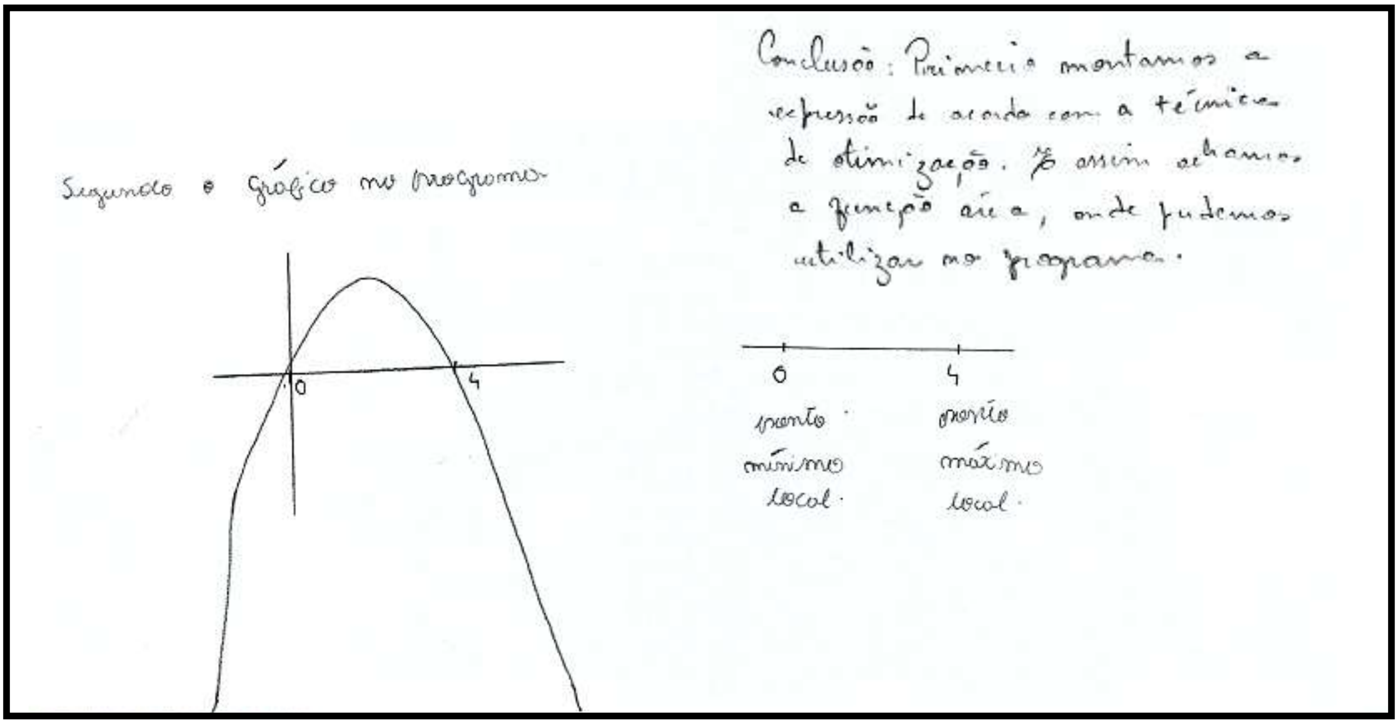


Figura 154: Protocolo de resolução da atividade 1, intervenção 02

Um fato recorrente em todos os protocolos analisados foi a trajetória adotada por todos os grupos para a resolução da primeira atividade: representar geometricamente a situação proposta, modelar a função e representar graficamente essa função no software de geometria dinâmica. O que nos causou surpresa foi o fato de que todos os grupos embora tenham determinado a expressão algébrica da função de forma correta, bem como sua representação gráfica, recorreram ao teste da primeira derivada para determinar o ponto de máximo, em detrimento de se pautarem apenas na visualização. Tal fato fica “ilustrado” com as imagens reproduzidas nas Figuras 155 e 156.

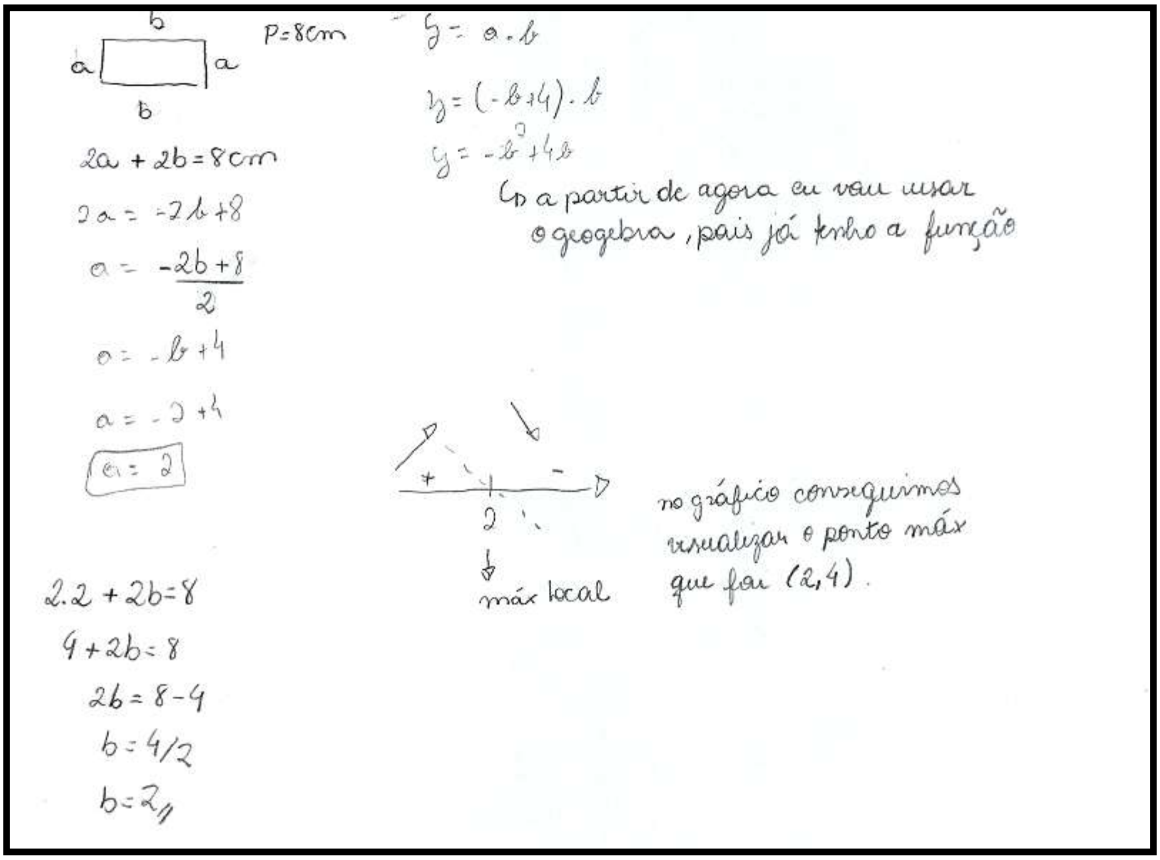


Figura 155: Protocolo de resolução, atividade 1, intervenção 2
Fonte: protocolo dos participante

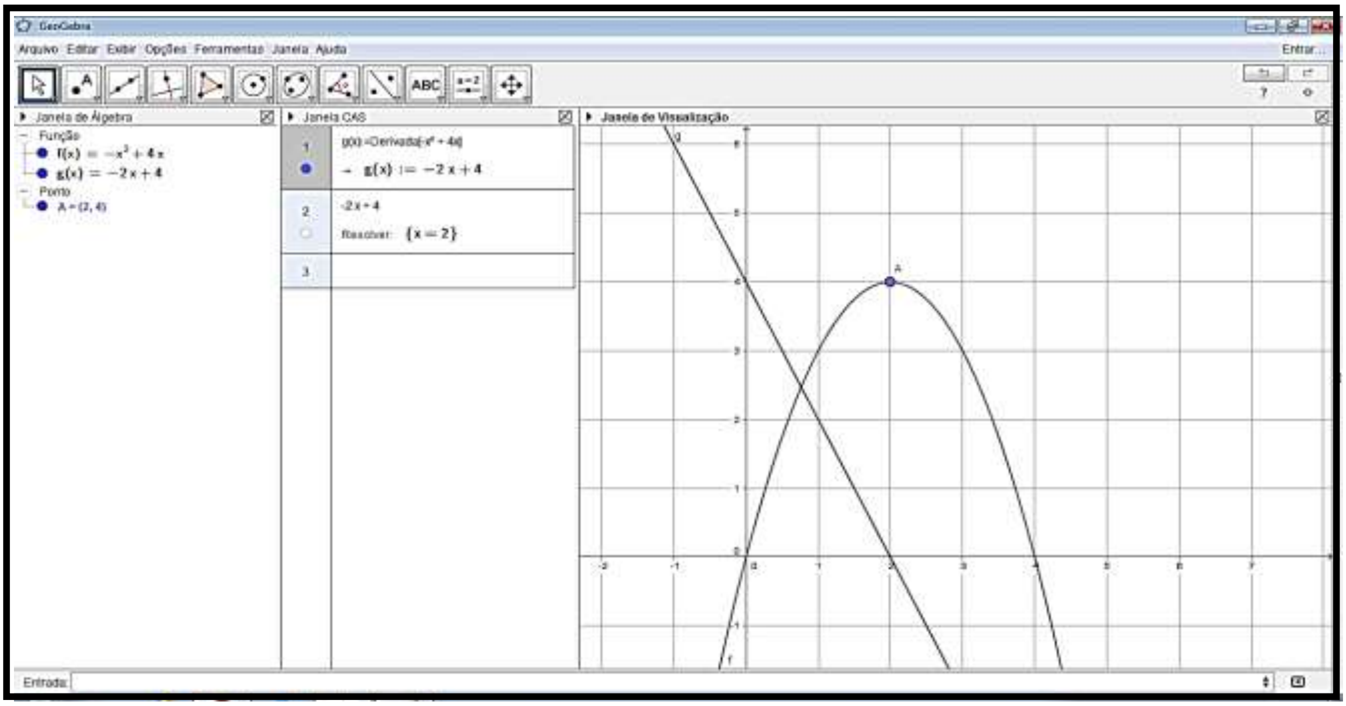


Figura 156: print da tela, questão 01, intervenção 2

Como supunhamos, a forma como os participantes da pesquisa foram apresentados aos problemas de otimização durante toda a sua trajetória escolar nos assuntos relacionados a matemática, sempre priorizando os procedimentos algébricos e as técnicas operatórias, foi um fator determinante para os mesmos optassem pela utilização desses procedimentos em detrimento da utilização dos recursos tecnológicos.

Como estávamos interessados num trabalho que não se restrigisse ao cenário das funções polinomiais optamos por apresentar a segunta atividade da intervenção 02.(Figura 163)

Atividade 02

Esboce e encontre, quando existirem, os extremos das funções abaixo, bem como os pontos onde eles ocorrem. Justifiquem seus procedimentos e escolhas.

a) $f(x) = x^2 - x + 5,\ 0 \le x \le 10$ b) $f(x)\ x^3 + x,\ -1 \le x \le 5$ c) $f(x) = xe^{-x},\ 0 \le x \le 7$

Figura 157: Atividade 2, intervenção 02

Vale ainda salientar que nessa atividade buscávamos investigar que estratégias os participantes usariam para responder a cada item , bem como o porquê de cada uma dessas escolhas, além de tentar verificar se essa escolha foi ou não determinante para o sucesso ou insucesso na resolução da questão.

Analisamos os protocolos escritos, os áudios gravados, e também os *prints* das telas dos computadores das duplas e em alguns casos, uma entrevista com as duplas, na busca de dirimir possíveis dúvidas existentes por parte do pesquisador.

Em relação ao primeiro item da segunda questão, todas as duplas optaram por representar graficamente a função no software, mas nenhuma das duplas respondeu a questão apenas com as informações do gráfico. Uma das duplas justificou a utilização dos cálculos como uma forma de conferir se tinham utilizado de forma correta o software. (Figura 158)

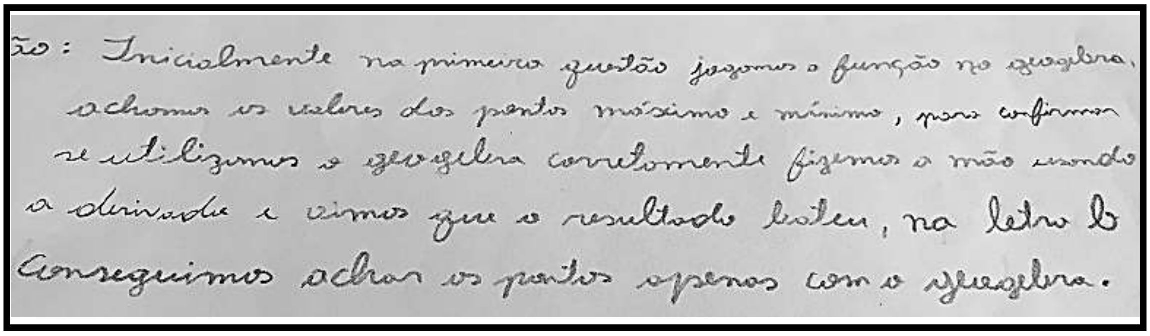


Figura 158: Comentário de uma dupla de participantes a respeito da utilização do software

Essa necessidade de conferir os resultados valendo-se dos procedimentos algébricos, foi também explicitada por outra dupla cujos protocolos apresentamos na Figura 159.

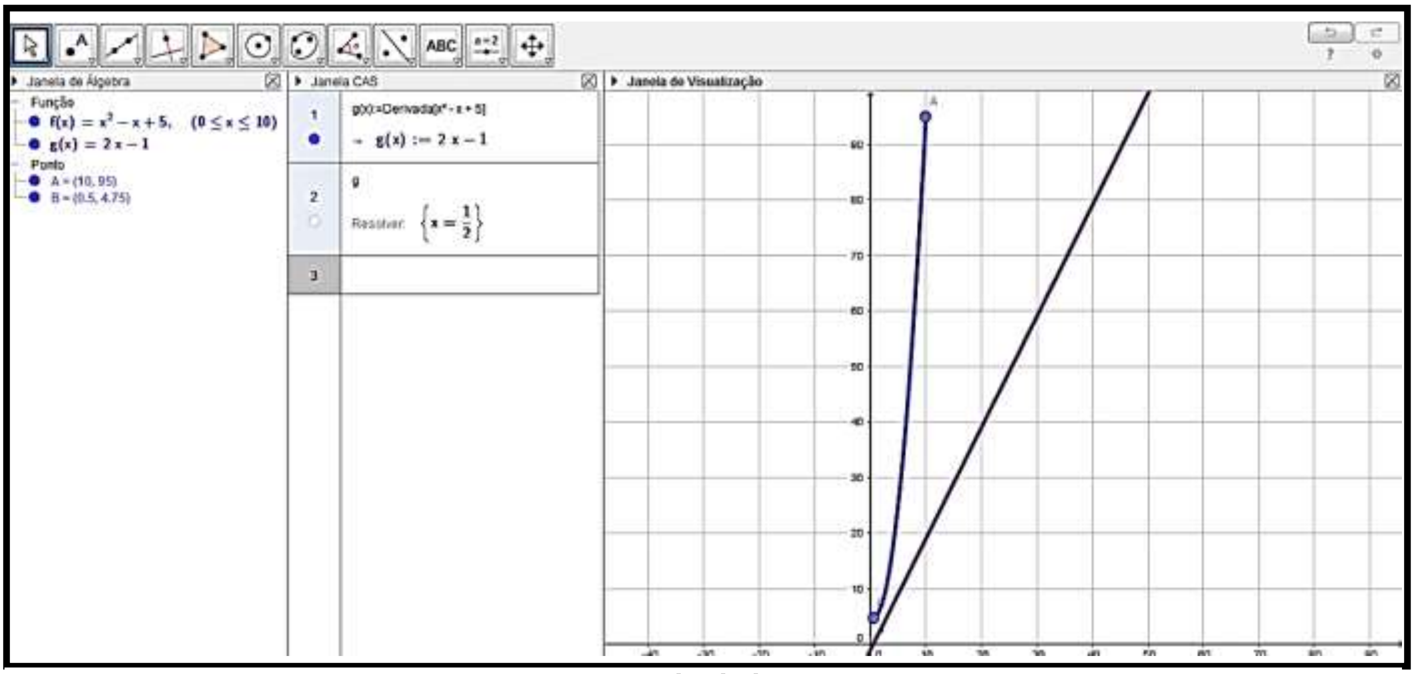


Figura 159: Print da tela dos participantes

Essa dupla utilizou os recursos do software tanto para obter a representação gráfica da função como para obter a derivada de primeira ordem e o gráfico da derivada.

Destacamos também a facilidade e economia de tempo no momento em que os participantes precisaram trabalhar com as conversões. Sabemos que um dos componentes da aprendizagem de um conceito em matemática, é segundo Duval, a capacidade de converter determinadas representações. Além de permitir a conversão, o programa escolhido permitiu a visualização de diferentes representações da função, desenvolvendo também uma das competências do pensamento matemático avançado: a visualização.

Observamos que o recurso do software também foi utilizado para a obtenção da raiz da derivada de primeira ordem. Ao analisarmos o próximo print da dupla, verificamos que os extremos também foram determinados com o auxílio do programa (Figura 160).

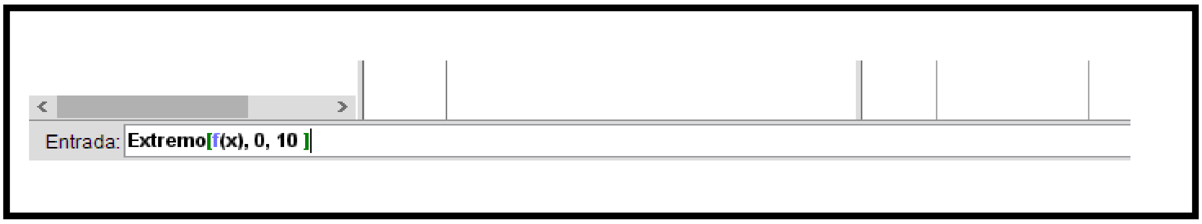


Figura 160: Utilização dos recursos do software na resolução da questão proposta

Mesmo valendo-se dos recursos computacionais, a dupla refaz a questão no ambiente do papel e lápis e se justificou conforme os protocolos da Figura 161.

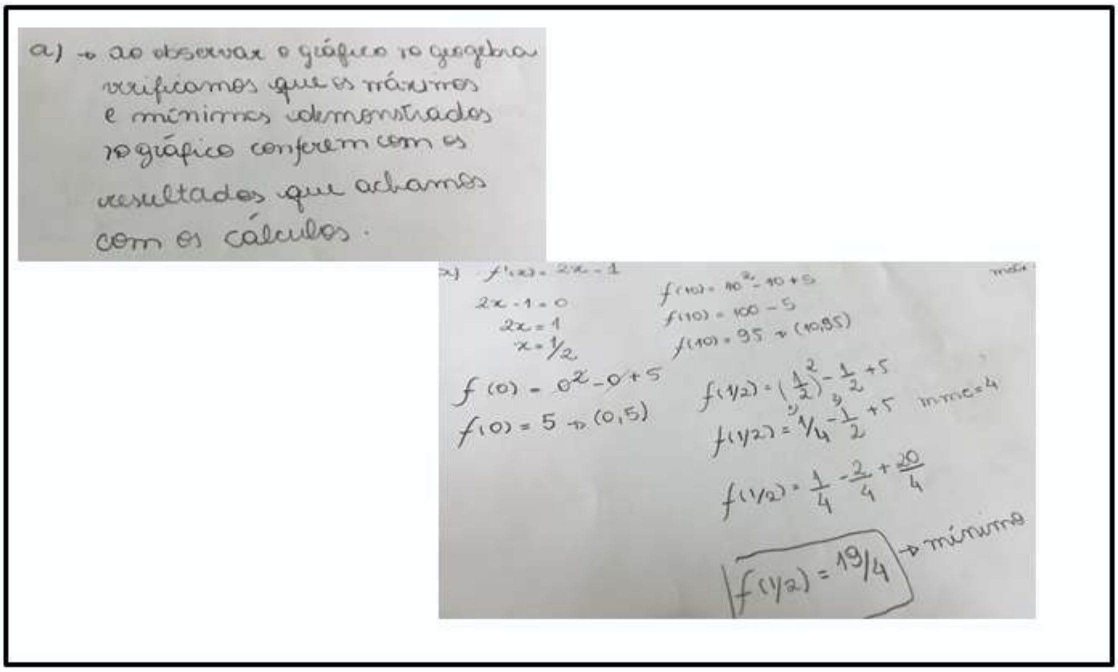


Figura 161: Articulação entre o cenário papel e lápis e o software de geometria dinâmica

O segundo item proposto foi elaborado de forma a conduzir os participantes que optassem por trabalhar exclusivamente com os procedimentos algébricos a um desafio, uma vez que a derivada de primeira ordem da função $f(x) = x^3 + x$ não possui raízes reais.

Nessa questão, observamos que uma das duplas não utilizou o recurso computacional, preferindo o cenário do papel e lápis e por conta de equívocos na manipulação algébrica, não resolveu de forma correta a questão.

Percebemos que o procedimento a ser aplicado pela dupla estava correto: eles obtiveram a função derivada e "tentaram" obter a raiz.

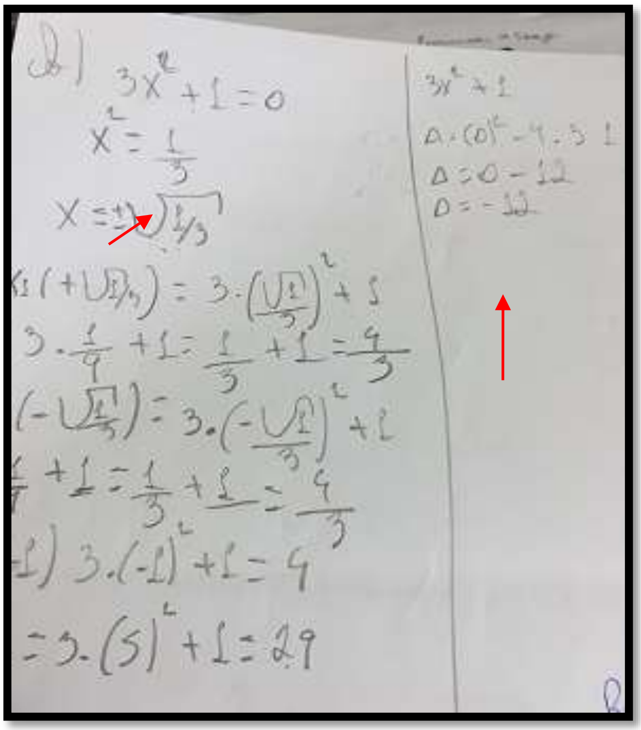


Figura 162: Protocolo de resolução do item a, atividade 2, intervenção 2

Como a função derivada era uma função de segundo grau incompleta, inicialmente a dupla optou por determinar as raízes por meio da fórmula de Bhaskara, e como o discriminante era negativo, eles finalizaram a resolução. O fato de os participantes terem tentado novamente resolver a equação, ainda que de forma errônea chamou a nossa atenção. Nesse momento nos questionamos se eles estavam convencidos de que o discriminante negativo confirmaria a inexistência das raízes da derivada ou se refizeram a questão por não acreditarem no resultado encontrado.

Quando questionados pelo pesquisador a respeito das duas formas de resolução, os alunos disseram achar estranho o discriminante ser negativo e optaram por fazer de outra forma e que ficaram "aliviados" por encontrarem uma resposta. Segundo narrativa deles, nem perceberam que o sinal estava errado.

Dentre as duplas apenas 1 conseguiu acertar a questão. As análises dos protocolos da dupla mostraram que os mesmos a resolveram baseando-se na visualização da representação gráfica da função, mas sentiram-se inseguros e recorreram a procedimentos algébricos para verificar os resultados.

O fato de os alunos terem testado apenas os extremos do intervalo, sem fazerem referência à derivada ou às suas raízes (figura 163) também nos causou curiosidade nesse momento.

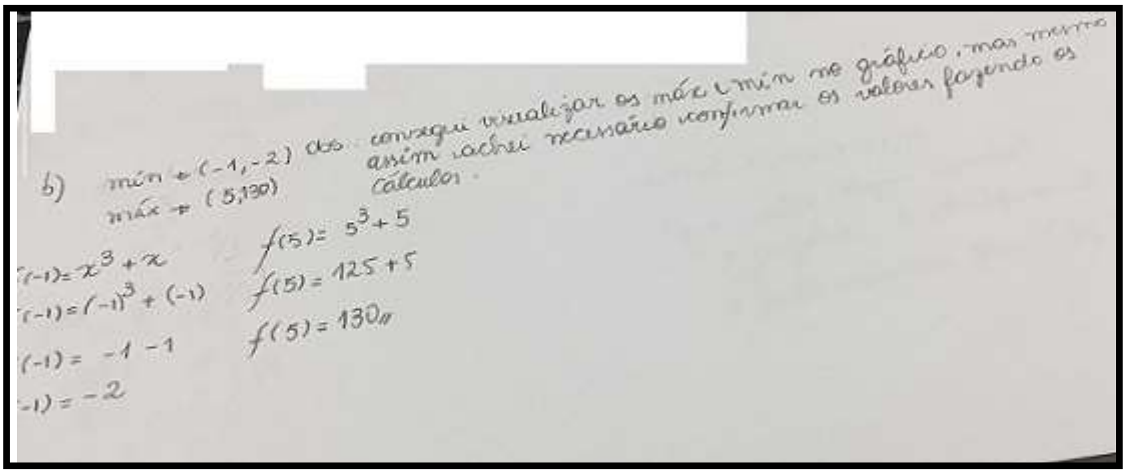
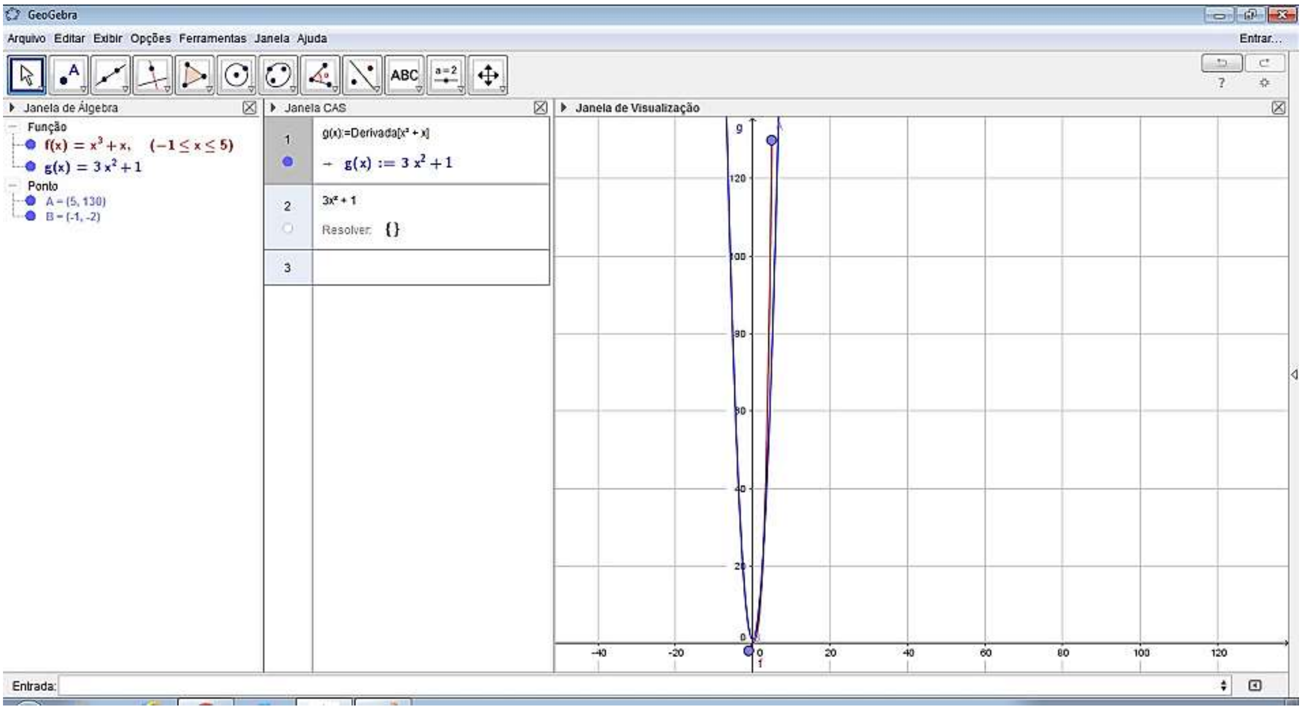


Figura 163: Justificativa do confronto entre as informações obtidas graficamente e o resultado de procedimentos algébricos

Para dirimir a dúvida, recorremos ao áudio e ao *print* da tela da dupla em questão.

Participante 1: Olha só o programa tá dizendo que a derivada não tem raiz

.



Participante 1: Vamos desenhar o gráfico de novo e aí “jogamos” pra cima e pra baixo com “ essa mãozinha aqui” e tentamos localizar o máximo e o mínimo.

Participante 1: Bem, sabemos que tem Máximo e Mínimo, então a gente usa os “números” que o programa deu e testa pra ver se vai dar certo mesmo. ....

Participante 1: Viu, “jogamos” na função e o valor bateu certinho com o programa! Até por que o desenho “tava” mostrando isso.

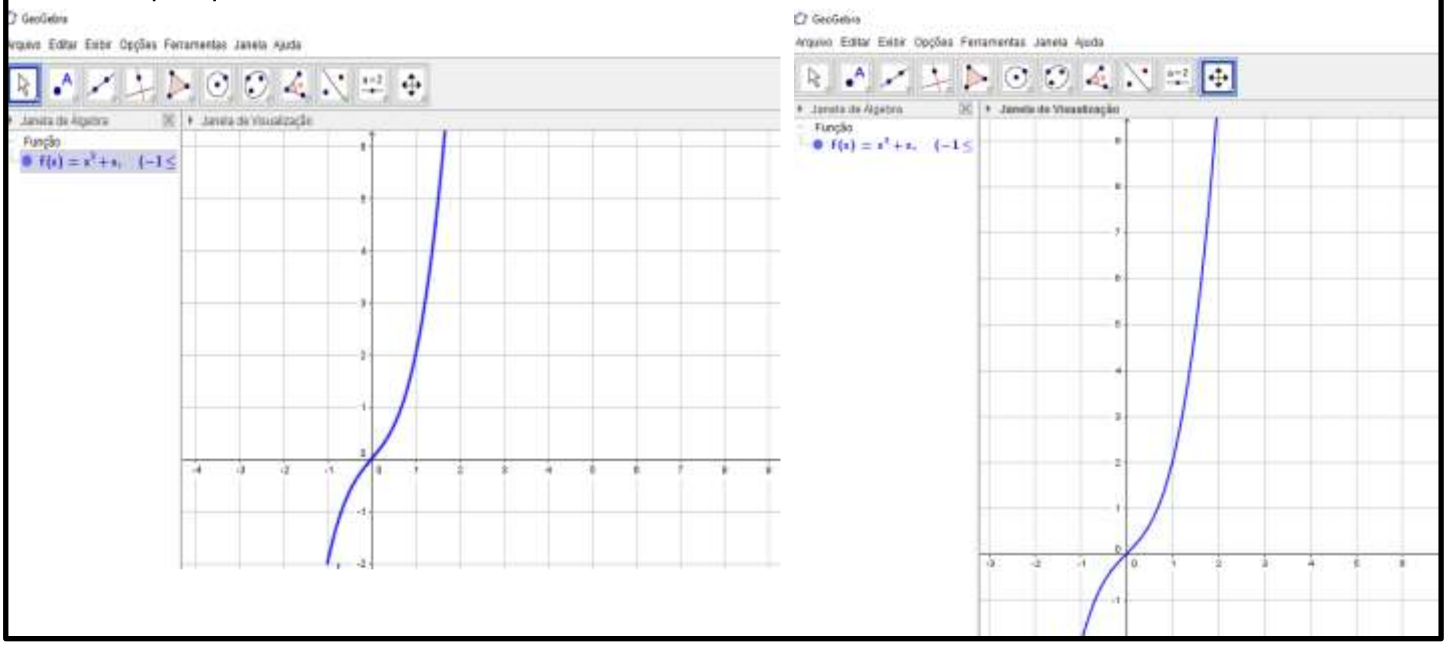


Figura 165: Diálogo e *print* da tela de uma das duplas durante a realização da atividade 1, item a intervenção 2. Parte 2

A análise desse material nos levou a perceber que inicialmente para esses alunos, o fato da função derivada não possuir raiz seria uma condição de impedimento da existência de extremos da função. Notamos ainda que os alunos estavam desconfortáveis com o fato de que o software indicava pontos extremos e função derivada não tem raiz.

Durante o feedback da segunda intervenção propusemos para todos os participantes uma discussão a respeito da situação descrita anteriormente.

Os alunos evidenciaram uma definição de conceito equivocada - considerando apenas aspectos locais - pois admitiram até naquele momento, que a existência do ponto extremo da função estava condicionada a existência da raiz da função derivada de primeira ordem, sem levar em conta que a questão tratava de pontos extremos em um intervalo fechado e limitado.

Aproveitamos o momento para provocar junto aos alunos uma análise a respeito das condições de existência dos valores extremos de uma função de variável real.

Tomando como ponto de partida um dos pressupostos de Dreyfus (2002) que nos afirma que os estudantes vêm sendo ensinados a partir do produto da atividade de matemáticos em sua forma final ao invés de serem conduzidos a processos que levaram os matemáticos a construírem esses produtos, resolvemos não partir da definição, mas sim da análise de alguns gráficos de funções, previamente selecionados para fomentar a construção do conceito que buscávamos.

Nossa ação metodológica justifica-se, pois segundo o autor, para um estudante atingir a compreensão de um objeto matemático não é suficiente apenas definir e exemplificar um conceito abstrato, mas sim construir as propriedades desse conceito.

A segunda questão ainda propunha análise dos pontos extremos de uma função mais sofisticada tanto do ponto de vista algébrico quanto do ponto de vista gráfico. A escolha dessa função- $f(x) = xe^{-x}, 0 \leq x \leq 7$, deu-se por conta de objetivarmos analisar as escolhas dos participantes quando estivessem de frente a função que não fosse uma função que eles cotidianamente trabalhassem.

A análise desse protocolo provocou nos pesquisadores uma quebra em suas hipóteses iniciais, ou seja, as que supúnhamos no momento da elaboração da intervenção, pois acreditávamos que todos os participantes resolveriam a questão proposta com o auxilio do software e que não teriam grandes dificuldades em registrar suas respostas.

Para a surpresa dos pesquisadores, apenas uma das duplas conseguiu responder o último item da segunda questão.

Dentre as duplas, verificamos que 02 delas não responderam a questão e justificaram ao pesquisador que o programa não conseguiu representar graficamente a função.

As análises dos *prints* das telas das duas duplas indicaram ao pesquisador que ambas as duplas cometeram o mesmo erro de digitação da expressão algébrica da

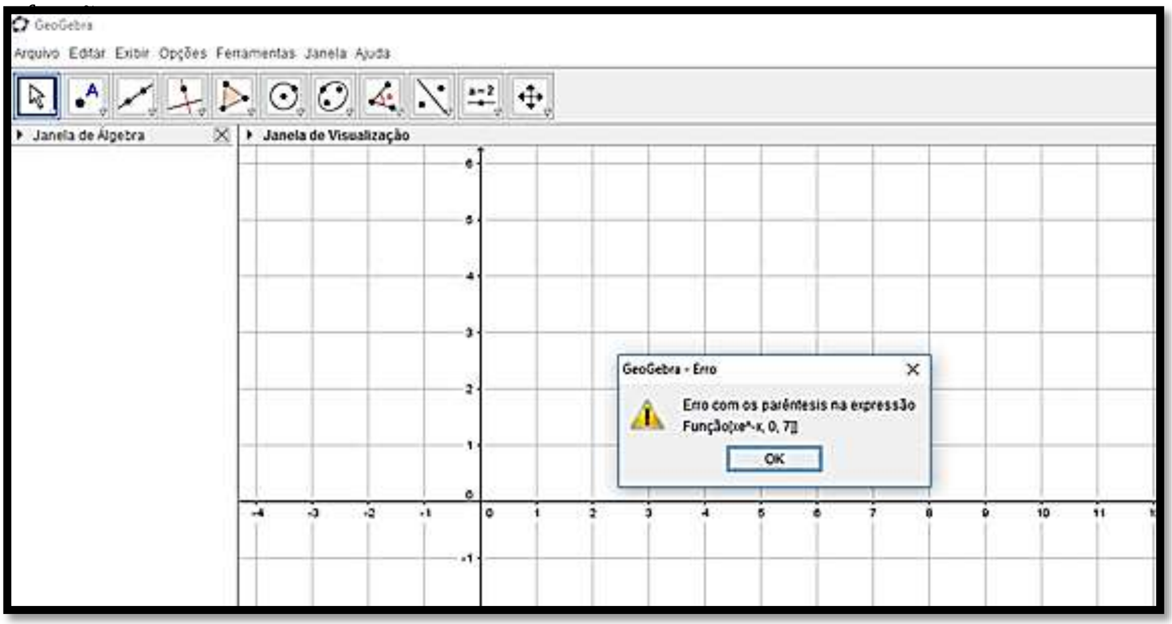


Figura 166: Erro de utilização do software

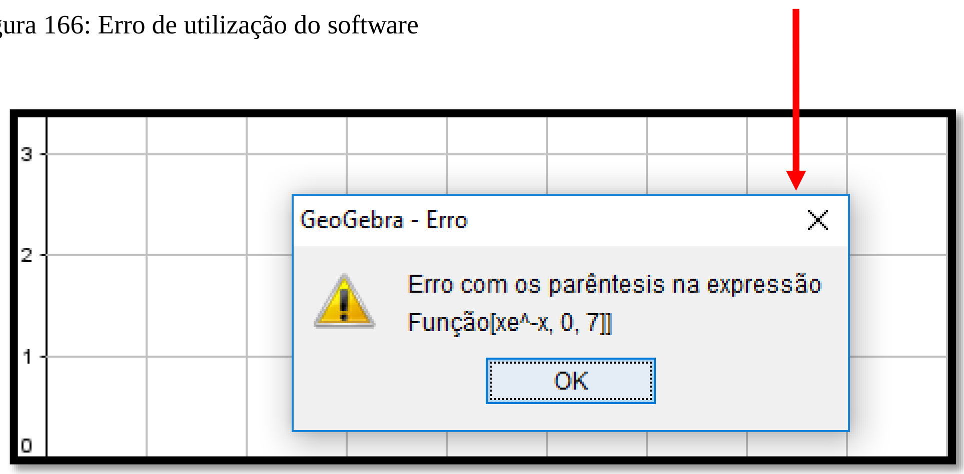


Figura 167: zoom da figura 166

O terceiro protocolo analisado não nos permitiu verificar se os participantes representaram graficamente a função, uma vez que eles não enviaram ao pesquisador, ao final da intervenção os prints da tela. Porém a análise do protocolo escrito é um indício de que eles trabalharam com a estratégias de resolução que priorizaram os procedimentos algébricos.

Do ponto de vista “técnico” os alunos obtiveram a função derivada de primeira ordem de maneira acertada, bem como a sua raiz. O que nos evidencia a não utilização do software foi o fato de que como os alunos não tinham uma imagem mental do gráfico da função derivada, não conseguiram identificar os pontos de máximo e mínimo da função dada, embora eles tenham optado por testar as raízes e os extremos na equação da função.

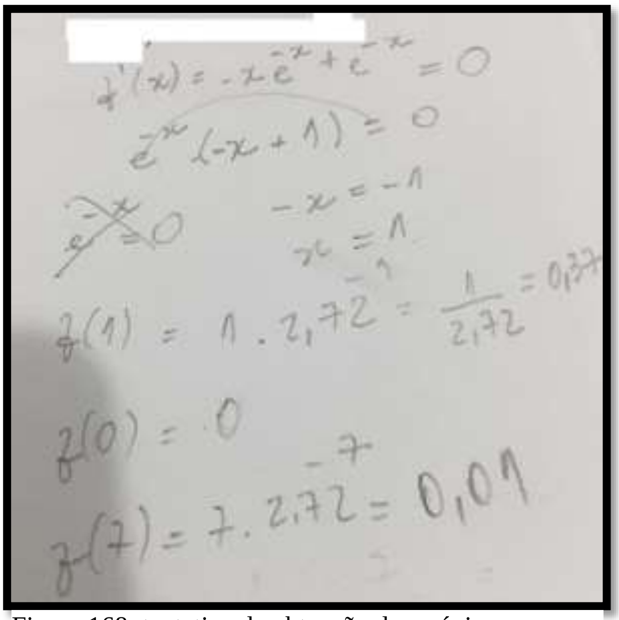


Figura 168: tentativa de obtenção dos máximo e mínimo da função

Dentre as duplas de participantes, apenas uma apresentou a resposta da questão. A análise dos protocolos dessa dupla apontou que, pelo fato do programa fornecer a representação gráfica da função, os participantes precisaram confrontar essa informação com a raiz da derivada e ainda com o recurso dos extremos da função, ambos recursos utilizados no cenário computacional. Tal sequência de procedimentos ficou evidenciada na análise do protocolo escrito, na análise das telas e do áudio.

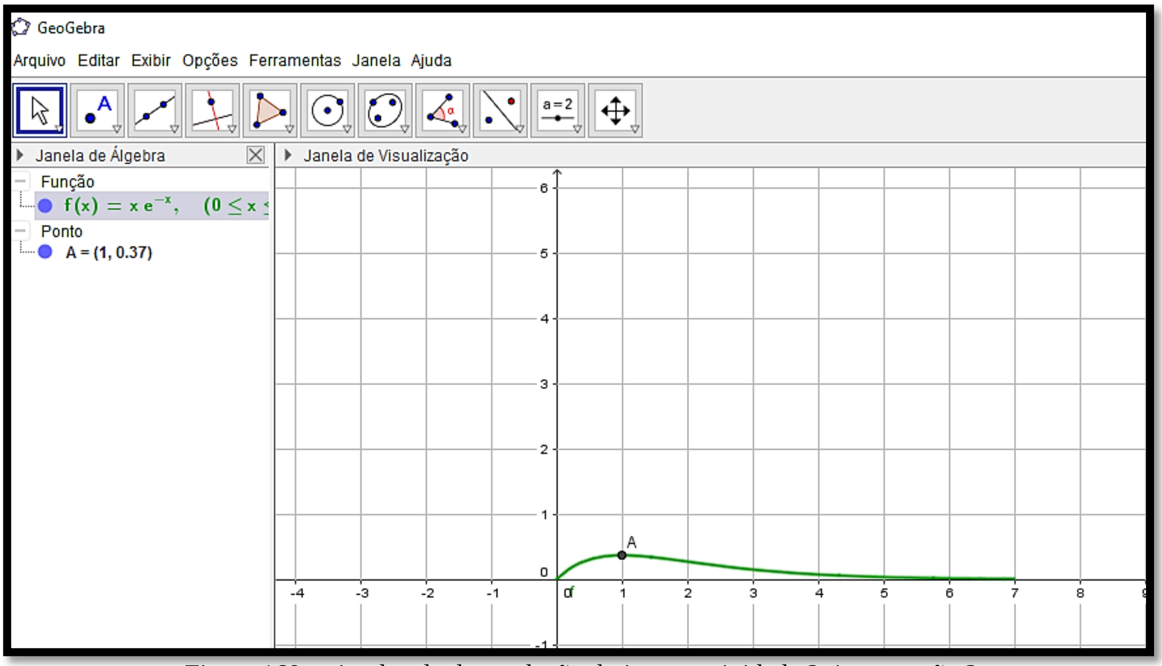


Figura 169: print da tela da resolução do item c, atividade 2, intervenção 2

Participante 1: Olha o gráfico ficou pronto. Já temos a resposta.

Participante 2: Será que "bate" com a derivada.

Participante 1: "Vamo" jogar no programa e ver se bate ué.

Participante2: Então tá

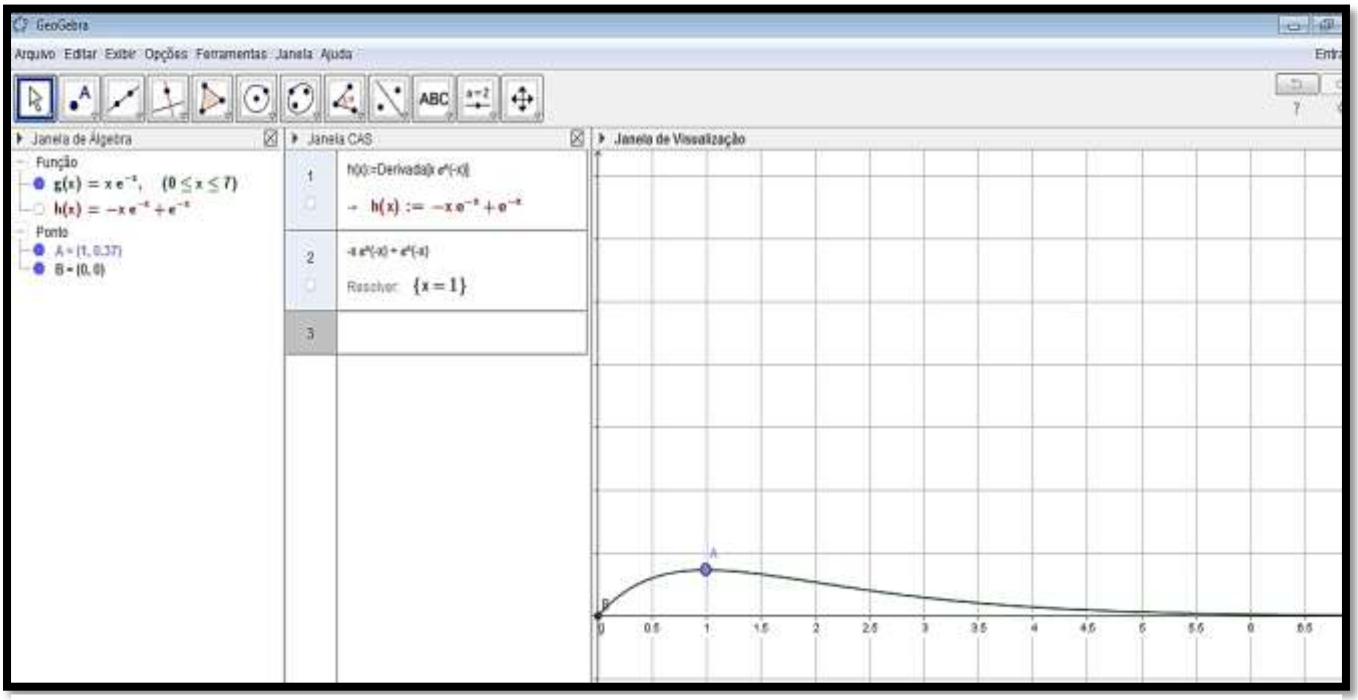


Figura 170: print da tela dos alunos durante diálogo e resolução do item c, atividade 2 , intervenção 2

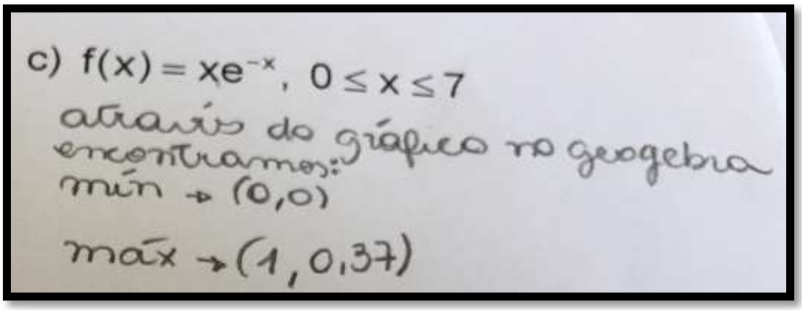


Figura 171: resultado final do item c, atividade 2, intervenção 2

Assim como apontam todos os estudos apresentados em nossa revisão de literatura, os ambientes computacionais, favorecem a apreensão de um conceito matemático, uma vez que permitem ao aluno uma maior "despreocupação" com procedimentos algébricos.

Os protocolos demostram, que nessa questão, mesmo sentindo a necessidade de confrontar as informações oriundas da visualização, os participantes não retornaram ao ambiente de papel e lápis, valeram-se dos recursos do software escolhido para realizar os procedimentos, economizando assim tempo para validar os resultados.

De acordo com Vinner(1983), os conceitos devem ser adquiridos por meio da construção de diferentes imagens e esta construção inclui diferentes representações-tarefa essa, que fica facilitada pela utilização do software que já trabalha com diferentes representações-como exemplos e contraexemplos, problemas matemáticos que sejam desafiadores aos alunos, esquemas gráficos, figuras, e qualquer outro objeto matemático de natureza visual ou não, relacionado com o conceito.

Nesse sentido, optamos por apresentar alguns problemas de otimização, problemas esses que, durante a resolução, o estudante necessitará trabalhar com representações variadas e que essas representações acabarão por corroborar com os conceitos em construção.

A última atividade proposta na segunda intervenção foi a reproduzida na Figura 172.

Atividade 03

Imagine que você tem 140 cm de barbante para construir um quadrado e um retângulo. No retângulo, a medida da base deve ser o triplo da largura. Se a soma das áreas das figuras deve ser a menor possível, qual deve ser a área do quadrado.

Figura 172: Atividade 3, intervenção 02

O primeiro protocolo analisado demonstra que embora os participantes dessa dupla tenham destacado as ideias centrais da questão, não foram capazes de promover uma conversão entre os registros escolhidos, ou seja, a linguagem natural, a representação geométrica e representação algébrica.

Observemos o protocolo da Figura 173.

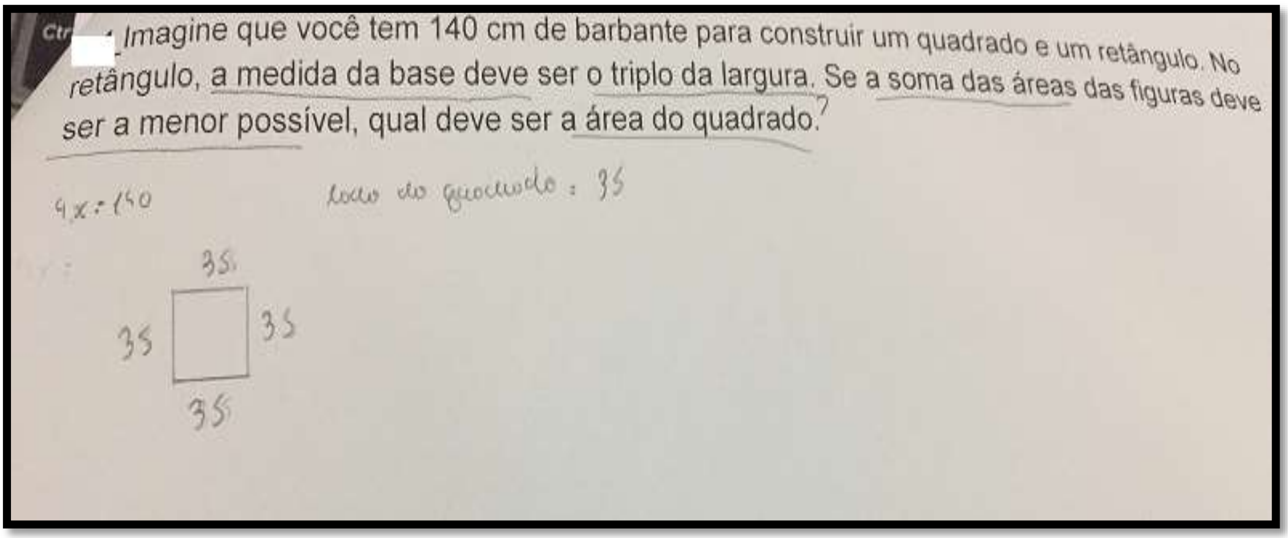


Figura 173: protocolo 1, atividade 3, intervenção 2

A análise do protocolo em questão nos aponta para o fato de que os participantes não foram capazes de promover a conversão das informações presentes no texto (Registro Monofuncional) para o registro algébrico e/ou geométrico.

Na busca por entendermos os motivos pelos quais os alunos não conseguiram resolver a questão, nos deparamos com as considerações de Duval (2003). Segundo o autor, a compreensão matemática está diretamente ligada a capacidade dos sujeitos de promoverem mudanças e articulações entre os registros, o que não foi observado no protocolo que acabamos de analisar.

Assim como ocorreu na primeira intervenção, o pesquisador dispunha de material concreto em sala e este material estava à disposição dos participantes. Motivados pelo sucesso em resolver a atividade anterior, dois grupos resolveram utilizar do material. Faremos a análise dos protocolos dessas duplas.

O segundo protocolo a ser analisado será o da dupla que chamaremos de **dupla 2**

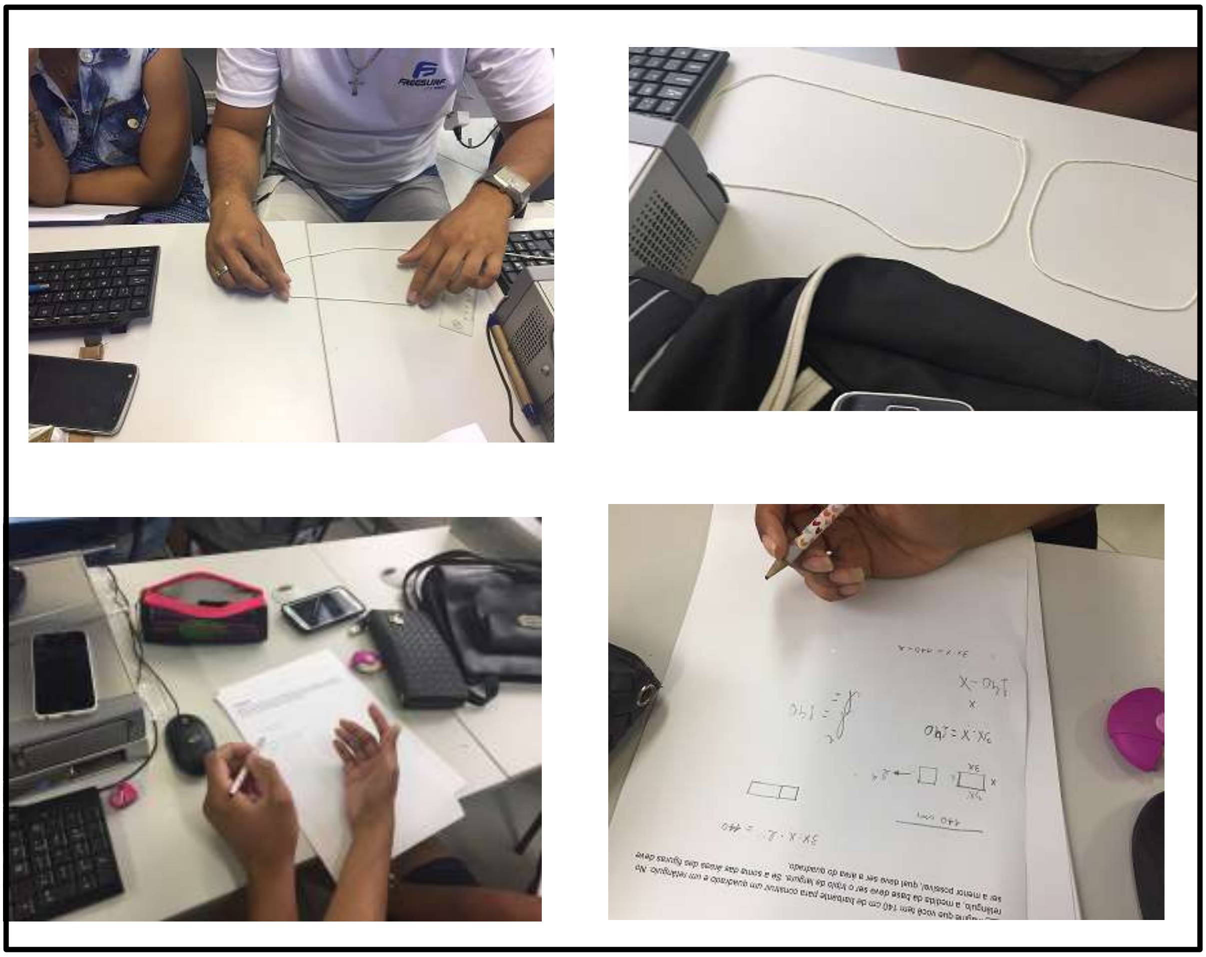


Figura 174: Alunos da dupla 2, desenvolvendo a atividade 3 da intervenção 2

Embora tenham usado o material concreto, os participantes dessa dupla também apresentaram dificuldades na conversão, porém detectamos que essa dificuldade se tornou evidente no momento de converter a representação em língua materna para a representação algébrica.

Quando perguntados sobre a razão da utilização o barbante, um dos participantes informou que "*usei o barbante pra enxergar as figuras. Não "tava" conseguindo ver, sem o barbante".* Tal afirmativa nos evidenciou que a conversão da representação em língua materna para representação geométrica foi possível mediante a utilização do material manipulativo, proposto pelo pesquisador.

Mas se ocorreu conversão da língua materna para a representação geométrica, onde foi que a resolução se perdeu?

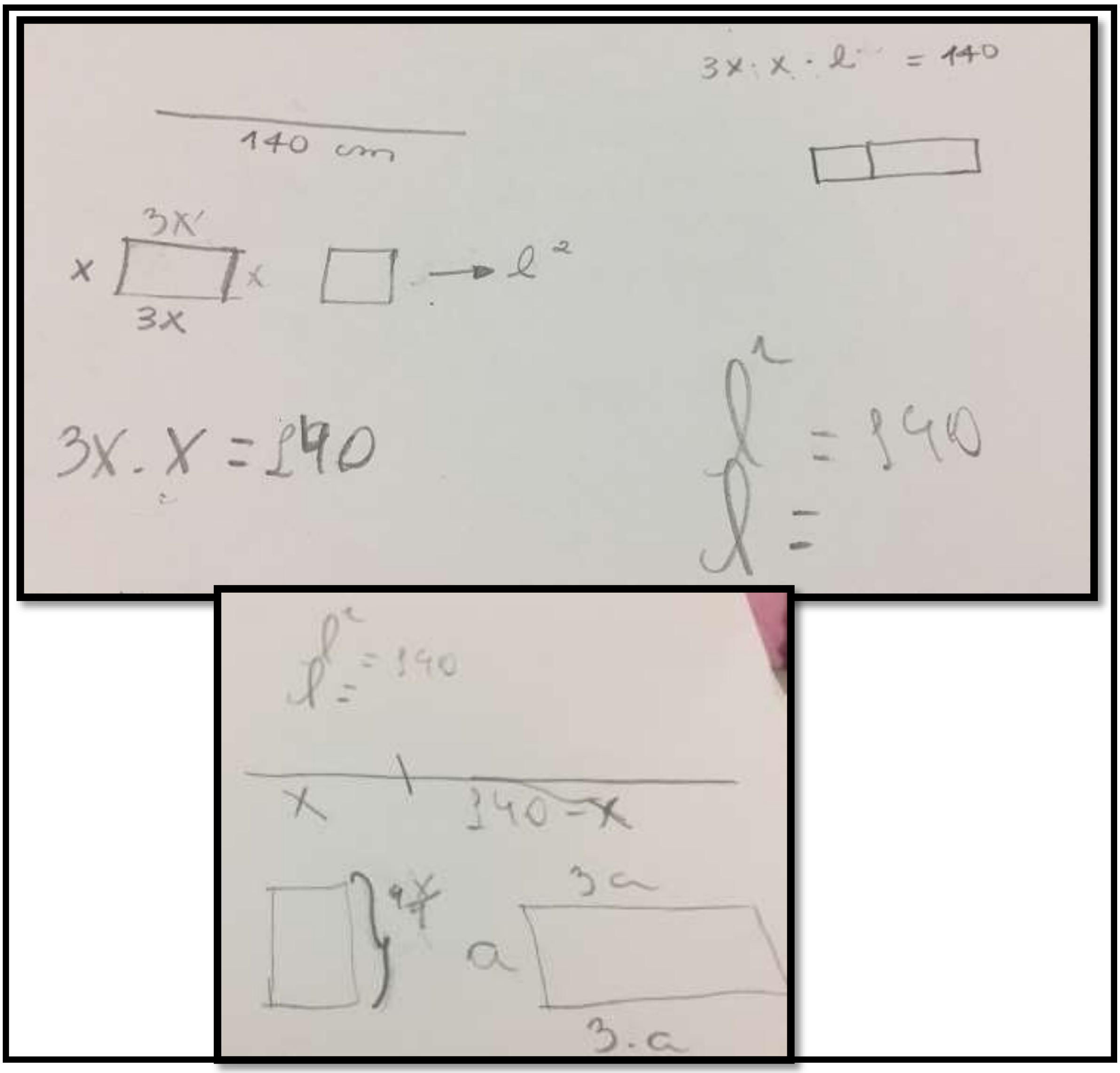
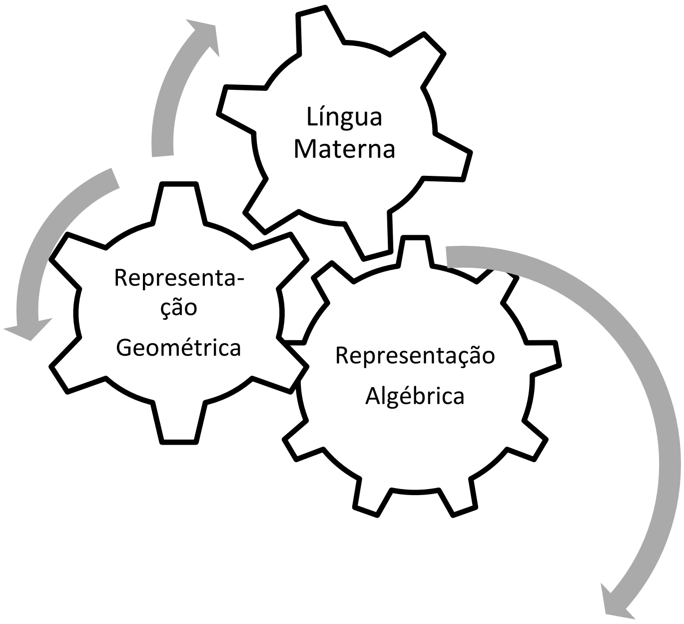


Figura 175: Continuação do protocolo de resolução. Dupla 2, atividade 3, intervenção 02

Estamos conscientes que a resolução dessa questão, só seria possível se os participantes fossem capazes de promover a conversão entre os seguintes registros:



A análise do protocolo nos mostra que essa articulação dos registros semióticos não aconteceu e isto colaborou para que a questão não fosse resolvida.

Analisemos agora os protocolos de resolução da dupla, que chamaremos de **dupla 03.**

Como essa foi a única dupla que resolveu a questão optamos por iniciar a análise ouvindo o áudio para entender como a dupla "pensou" a resolução da questão.

> *P1: Você tem 140 pra construir os dois*
>
> *P2: Sim. Mas temos que achar o mínimo. Tá escrito aqui!*
>
> *P1: Mas vamos começar pelo quadrado ou pelo retângulo? Eu não sei!*
>
> *P2: Oh, vamos pelo retângulo, pois só temos informação dele.*
>
> *P1: Ok, outra coisa, é área. Então a função vai ser base vezes altura*
>
> ...
>
> *P1: Vamos pensar com o barbante, como fizemos da outra vez.*
>
> *P2. Peguei o barbante. Vou cortar e montar o quadrado. Você vai escrevendo e eu montando*
>
> *P1: Nossa, esse quadrado seu tá uma beleza.*
>
> *P2: "Tá" bom, vou tentar melhorar.*

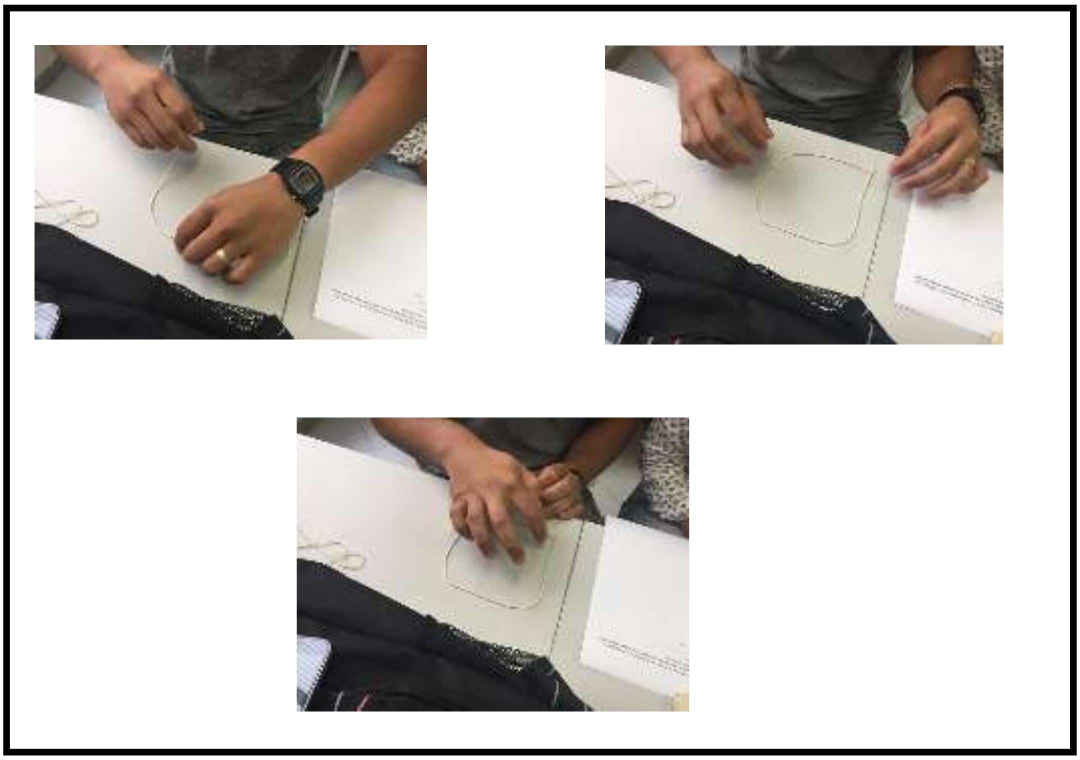


Figura 176: Participantes da dupla 3 e o problema do barbante

....

P1: Oh, tudo junto tem 140. Pensa que pra fazer o quadrado vamos usar um pedaço de barbante

P2: Tá bom, "pro" quadrado x . E o retângulo? E aí? Professor, estamos presos.

Pesquisador: Oi. O que houve?

P1. Professor, veja: temos 140 pra fazer tudo. Pensamos no seguinte: vamos usar um pedaço x para o quadrado. Mas e agora?

Pesquisador: Tá bom, mas e o retângulo?

P1: Não "tô" conseguindo. Posso cortar o barbante ?

Pesquisador: Claro que pode.

P1: "Vamo"lá. Oh, esse é o barbante, cortei x para o quadrado, entãoo retângulo fica com o barbante que sobra

Pesquisador: Exato. Agora escreve isso

P1. Isso é que é o problema, (risos)

P2: Vamos pensar. Se o barbante tem 140 e eu fiz um quadrado com x. Nossa, somos dois idiotas. Claro que sobrou x -140.

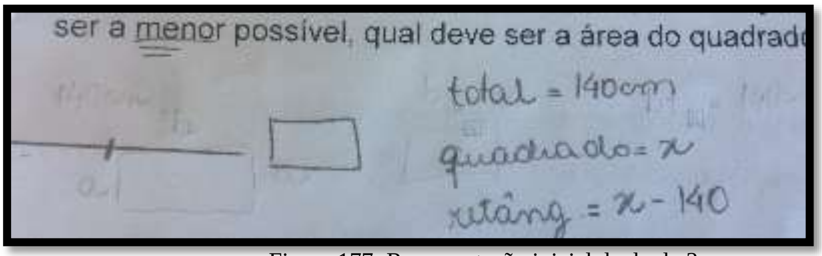


Figura 177: Representação inicial da dupla 3

P2: Mas ainda estamos com um monte de letra. Professor, estamos andando mas estamos com muitas letras ainda.

Pesquisador: Me expliquem a que conclusões já chegaram?

P1: Oh, se o barbante tem 140 e o quadrado tem x*, o retângulo tem o que sobra , ou seja,* $x - 140$*.*

Pesquisador: $x - 140$*?*

P1: Sim, o resto

P2: Não! Tem $140 - x$*. Mas tem muita letra ainda.*

Pesquisador: Agora vocês precisam pensar em como trabalhar com todas essas letras. Olhem para o pedaço de barbante que forma o retângulo e pensem. O que significa o barbante?

P1: Olhar para o pedaço do barbante. Tá!

P2: "Vamo" lá : Tá aqui o pedaço, ele tem que medir $140 - x$ *e com ele temos que fazer o retângulo todo.*

P1: Oh, já sei: a base mais a altura vale $140 - x$*. Escreve aí.*

P2: Agora f..., pois temos $b + a = 140 - x$*, "muita letra"*

...

P1: "Vamo" ver o que o exercício fala mais.

P2: Ele fala aqui que no retângulo a medida da base é o triplo da altura. Então podemos colocar que b *é igual a* $3a$ *. Matamos!*

P1: Matamos nada. Sumimos com o b *mas ainda temos o* a *e o* x*. Professor, estamos presos de novo.*

Pesquisador: O que aconteceu?

P1: Professor, ainda temos duas letras e temos que sumir com uma.

Pesquisador: Olha para o barbante. O que ele representa? Pensem!

P2: Gente, tem alguma coisa que não estamos vendo. O pedaço é $140 - x$*, certo?*

P1: Certo. Ele tem que medir 140-x. P... como não pensei nisso. 140-x é o pedaço pra fazer o contorno todo, basta somar os lados que tem que dar 140-x.

P2: Isso, mandou bem!

A análise dos diálogos nos deixa claro que foi a partir da manipulação direta dos objetos que a situação proposta conseguiu ser modelada. Nesse sentido, novamente, evidenciamos as características do Mundo Corporificado. Observemos um recorte do protocolo de resolução, identificado na figura 178 e outro fragmento do diálogo entre os participantes.

.

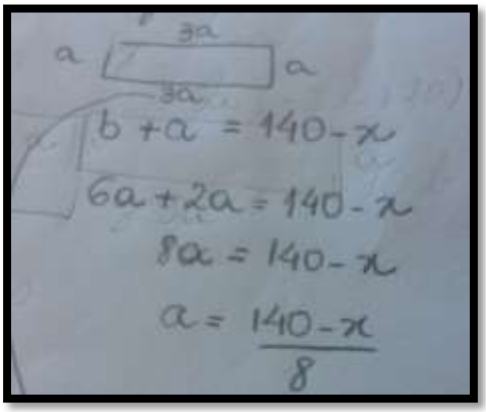


Figura 178: Nova representação da questão do barbante. Dupla 3

P2: Agora calculamos a área de cada um e depois juntamos pra achar a função.

P1: O retângulo já matamos e o quadrado?

P2: Basta pensar do mesmo jeito. O pedaço x é o pedaço pra fazer o quadrado todo. A área é base vezes altura , então basta achar um porque o outro é igual.

P1. Entendi. O pedaço é x, então o lado tem que ser x divido por 4

P2: Agora sim, matamos!

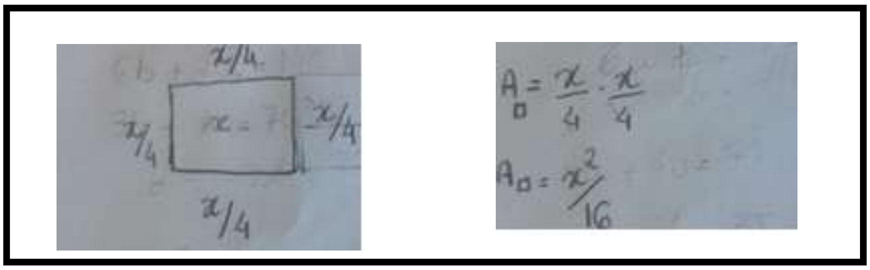


Figura 179: Representação feita durante o diálogo. Problema do Barbante. Dupla 3

Com a análise do diálogo, observamos uma outra característica importante do Mundo Corporificado, que seria o fato de que a expansão desse Mundo, não se dá exclusivamente, mas também a partir da utilização das imagens. Por exemplo, na situação proposta, os participantes corporificaram mentalmente uma vez que ao pensarem sobre o quadrado, esse foi ‘trabalhado” apenas na “cabeça” dos participantes.

Destacamos ainda que nesse momento encontramos indícios de articulação entre o Mundo Corporificado e o Mundo Simbólico.

Uma vez que os participantes da dupla conseguiram modelar a situação proposta, eles valeram-se do programa para chegarem a resposta final da questão proposta.

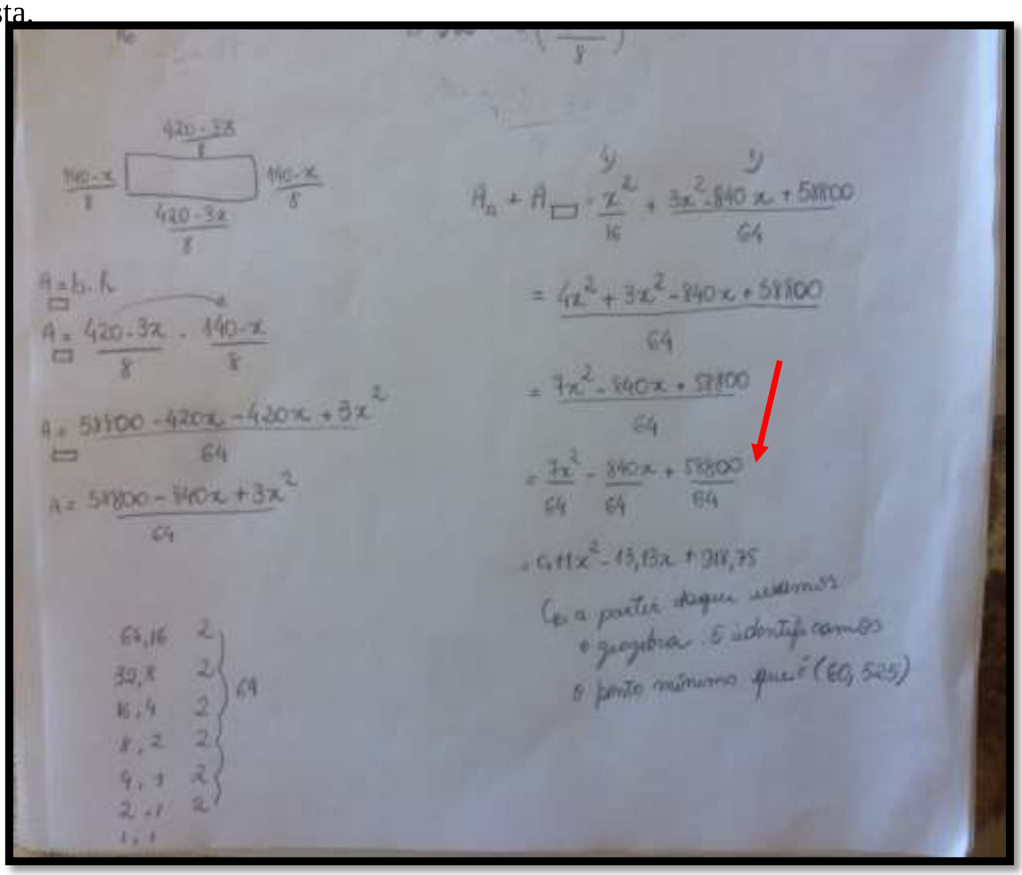


Figura 180: Protocolo de resolução. Dupla 2. Problema do barbante

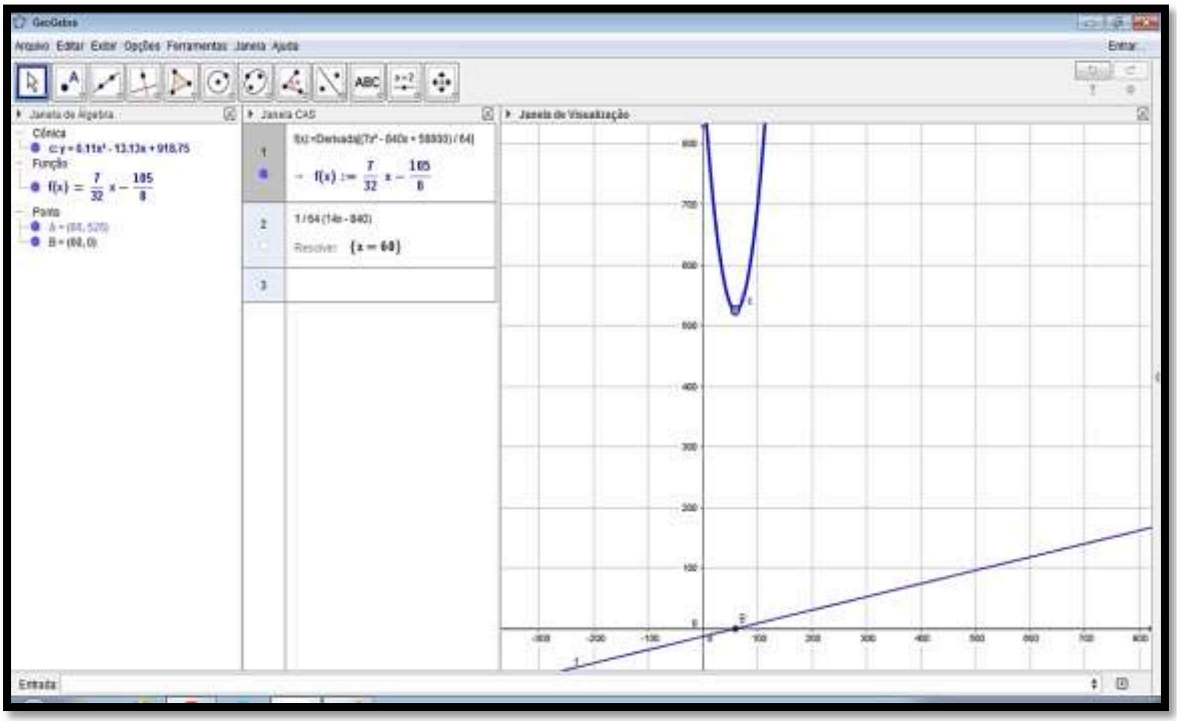


Figura 181: Print da Tela da resolução do problema do barbante. Dupla 3

A análise das informações nos levou a corroborar as ideias de Tall e de Duval pois nos ficou bastante latente o fato de que a capacidade de transitar por diversas representações de um conceito/objeto matemático demanda habilidade para interligá-las de maneira coerente sempre que necessário.

Para que os alunos resolvessem essa questão, foi necessário um dos processos mentais que compõem o pensamento matemático avançado, a modelação e para que essa modelação se efetivasse de forma eficaz, foi necessário que os participantes, “traduzissem” essas representações, ou seja, fossem capazes de promover a passagem de informações de um enunciado/propriedade matemático(a) para outro(a), assim como a tradução entre linguagens (matemática e verbal).

Tomando como pressuposto as ideias defendidas por Tall (2002), em relação ao ensino da matemática no Ensino Superior, que na maioria das vezes, inicia-se com a forma final da teoria deduzida, ou seja, o produto do Pensamento Matemático Avançado ao invés de propiciar ao estudante a participação em um ciclo criativo (no qual considera o contexto de um problema em investigação que o conduz à formulação de conjecturas a fim de levá-lo ao refinamento e à prova do processo de construção de um objeto matemático), optamos por apresentar na terceira e última intervenção um conjunto de três atividades com problemas envolvendo otimização em contextos que primassem pela necessidade de reflexão e ação sobre os conceitos matemáticos, além de uma possível utilização de materiais manipulativos.

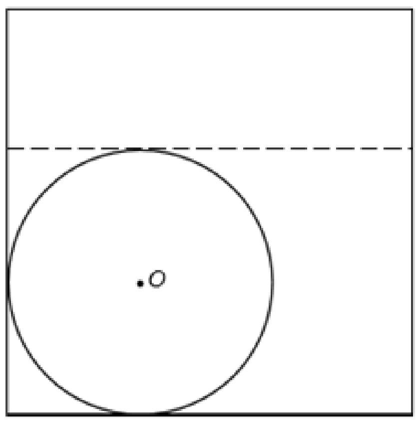
Antes de realizarmos a terceira intervenção achamos por bem realizarmos uma oficina para relembrar conceitos matemáticos que seriam necessários ao trabalho desenvolvido na terceira intervenção. Para a realização da oficina utilizamos uma noite de quarta- feira, 29/06/2016, no horário de 19 as, 21h. Nesse encontro, revisitamos tópicos da geometria plana, como as propriedades de tangência e áreas além de razões trigonométricas no triângulo retângulo e redução ao primeiro quadrante.

6.5 A terceira intervenção

A terceira intervenção aconteceu no dia 02/07 às 8 horas e 30 minutos no campus da Faculdade. Nesse dia, os alunos levaram o software instalado em seus notebooks ou em seus telefones celulares. Apenas 06 dos participantes compareceram, ou seja, trabalhamos apenas com 3 duplas.

Na Figura 182 temos reproduzida a primeira atividade.

Um quadrado de 4 cm de lado é dividido em dois retângulos. Em um dos retângulos, coloca-se um círculo, de raio R, tangenciando dois de seus lados opostos, conforme a figura a seguir.



a) Escreva uma expressão que represente a soma das áreas do círculo e do retângulo, que não contém o círculo, em função de R.

b) Qual deve ser o raio do círculo, para que a área pedida no item anterior seja a menor possível?

Figura 182: Atividade 1, Intervenção 03

Embora a função a ser modelada fosse uma função de segundo grau, essa função possuía um detalhe que ainda não havia aparecido em nenhuma das questões propostas até esse momento número irracional π como coeficiente.

As duplas resolveram a questão proposta de forma correta. Dentre as duplas, uma resolveu a questão algebricamente e as demais justificaram a utilização do software pela presença do número irracional.

De acordo com (Tall, 2004), o caminhar dos indivíduos ao longo dos Três Mundos da Matemática, produzem situações que para serem resolvidas vão exigir de cada sujeito um retorno às suas experiências anteriores. Segundo o pesquisador, a retomada de conhecimentos anteriores motivados por situações ou por dificuldades novas, acabam por modificar o novo aprendizado. Tal fato ficou bastante evidente ao observarmos os protocolos atividade em questão.

Vale destacar que as duplas que usaram o software para representar graficamente a função e obter a função derivada, recorreram ao cenário do papel e lápis para determinar o ponto de mínimo como ilustrado na figura 183.

Merece destaque o fato de não saberem resolver uma equação do segundo grau onde um dos coeficientes era o número π, o que foi um problema superado pela utilização do recurso computacional. Esse fato fez emergir o que (Lima, 2007) chamou de " a – encontrar" e que a pesquisadora afirma ser "uma experiência que se tem no presente e que afeta a memória de conhecimentos prévios".

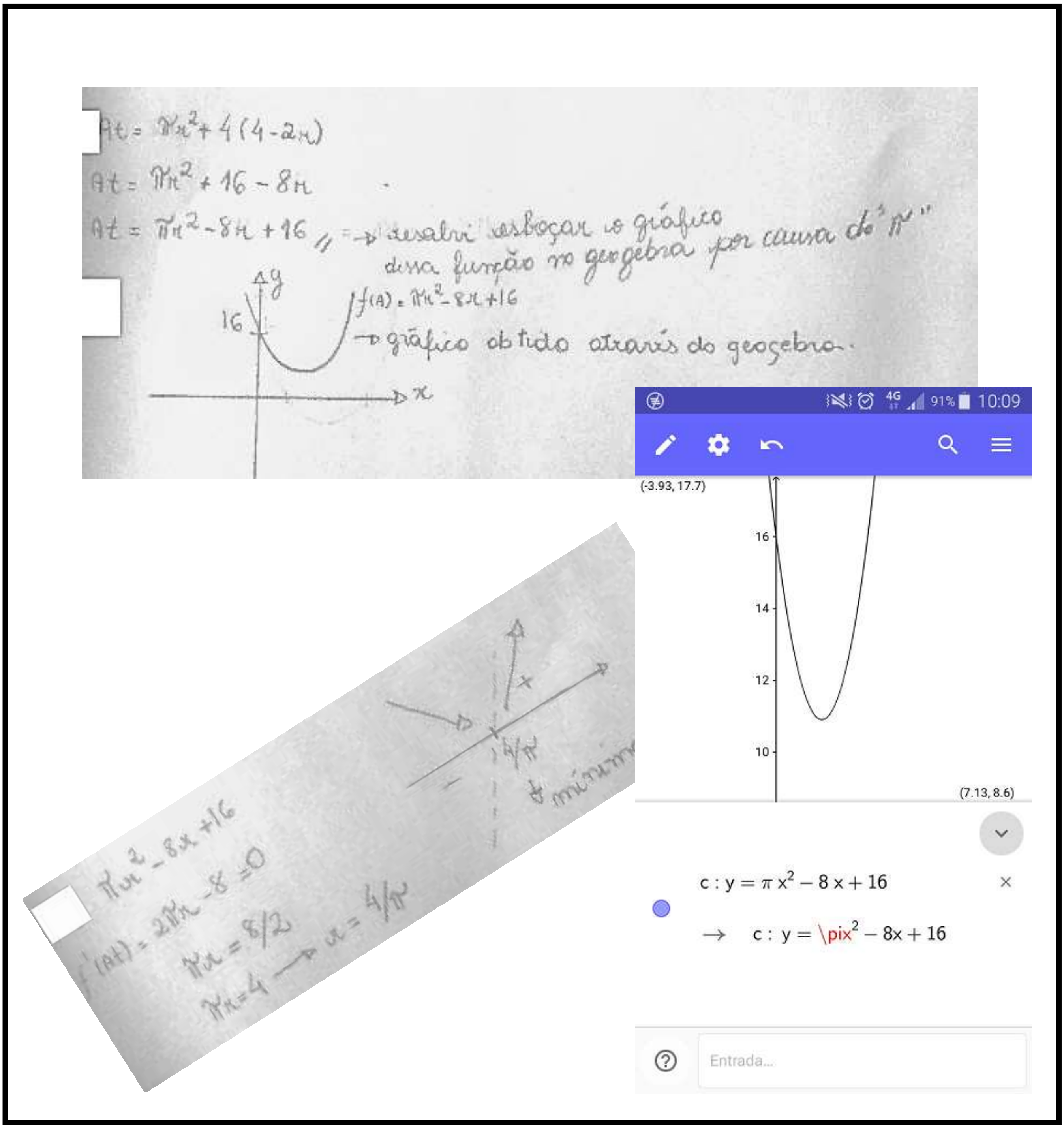


Figura 183: Protocolo de resolução e foto da tela do celular da dupla 1. Atividade 1. Intervenção 3

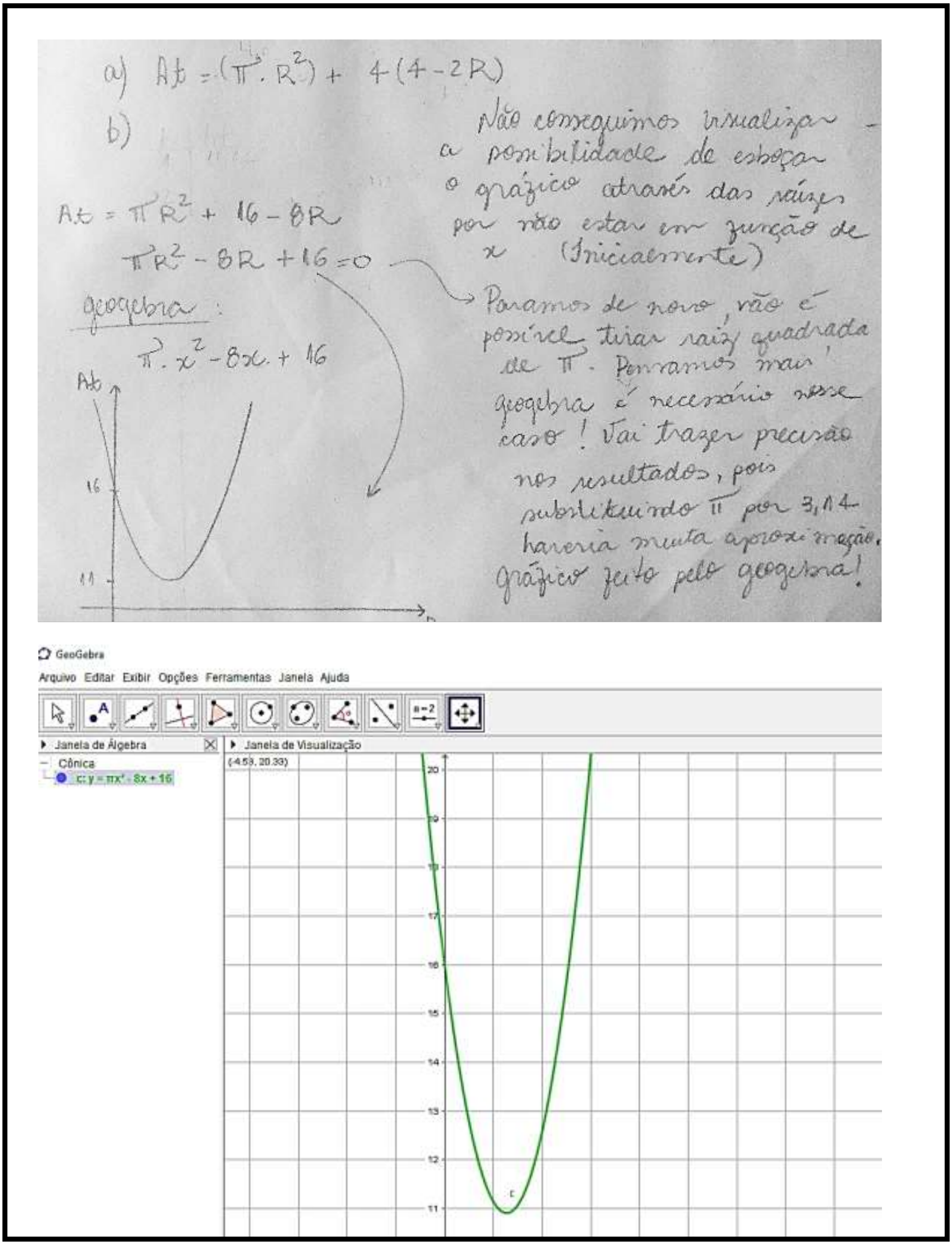


Figura 184: Protocolos de resolução e print da tela do computador. Dupla 2 . Atividade 1. Intervenção 3

A segunda questão proposta na intervenção foi:

INTERVENÇÃO 03

2. Um fabricante de caixas de papelão pretende fazer caixas sem tampas a partir de folhas quadradas de cartão com área igual a $576cm^2$, cortando quadrados iguais nos quatro cantos e dobrando os lados para cima.

a) Escreva a função volume da caixa;
b) Represente graficamente a função volume;
c) Determinar o lado do quadrado que deve ser cortado para se obter uma caixa com o maior volume possível.

Figura 185: Atividade 2. Intervenção 03

O primeiro protocolo da terceira intervenção, (figura 184) analisado deixou bem evidente a dificuldade encontrada pela dupla em inicialmente modelar a função volume, por não conseguirem “visualizar” o sólido.

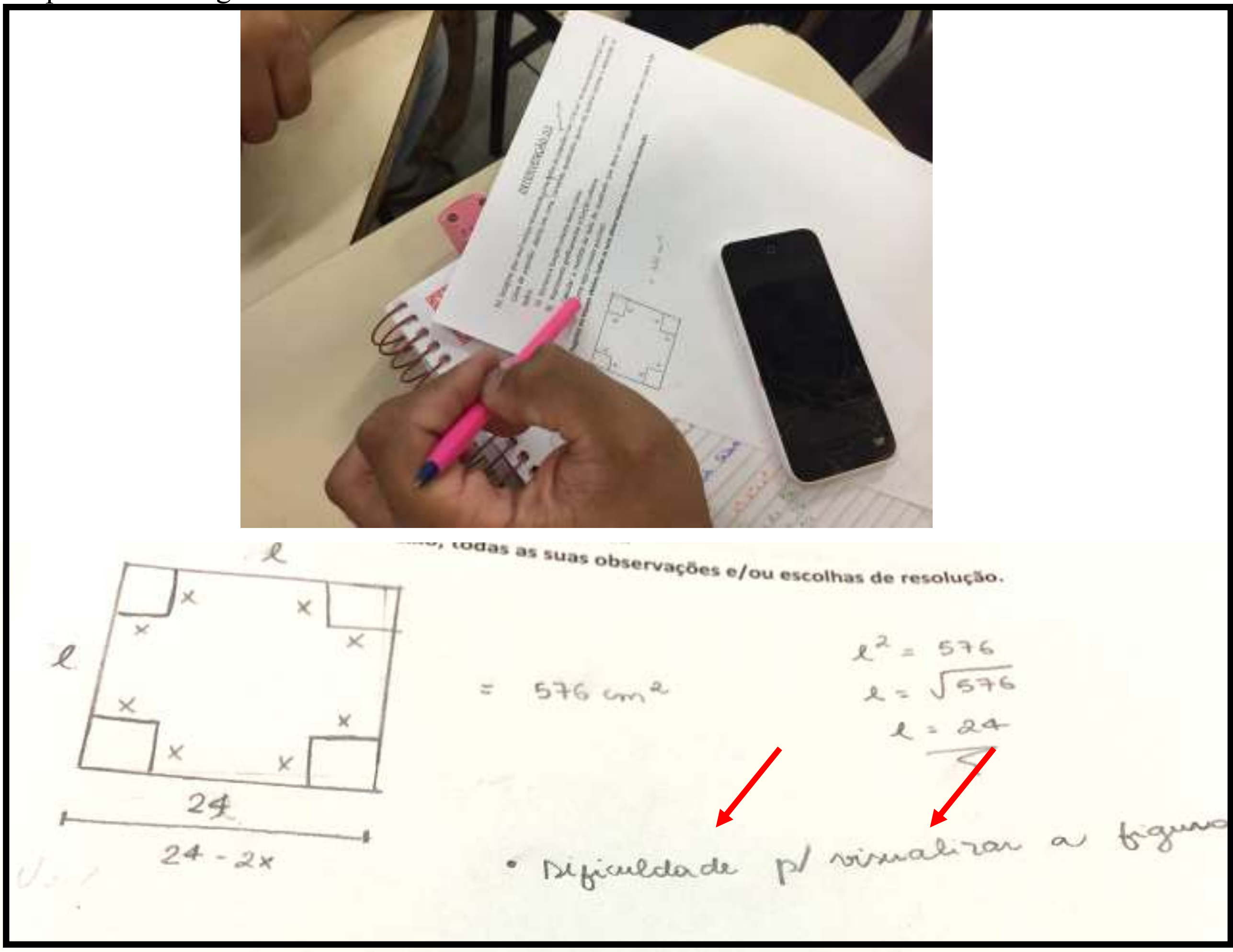


Figura 186: Protocolo dupla 2. Atividade 2. Intervenção 3

O fato dos alunos não conseguirem modelar a função e consequentemente não conseguirem resolver o problema é justificada teoricamente considerando Dreyfus (1991) que afirma que a visualização é um processo pelo qual as representações mentais ganham existência. Nesse mesmo sentido, encontramos Duval (2004), que nos afirma que não há como um sujeito mobilizar qualquer conhecimento, em Matemática, sem realizar uma atividade de representação. Para Duval, a noção de representação torna-se fundamental para qualquer estudo que investigue como e quando ocorre a aquisição de conhecimento no sujeito.

As análises dos protocolos comprovam que os participantes dessa dupla somente foram capazes de modelar a situação mediante a manipulação de materiais, criando uma espécie de representação física do objeto (figura 187)

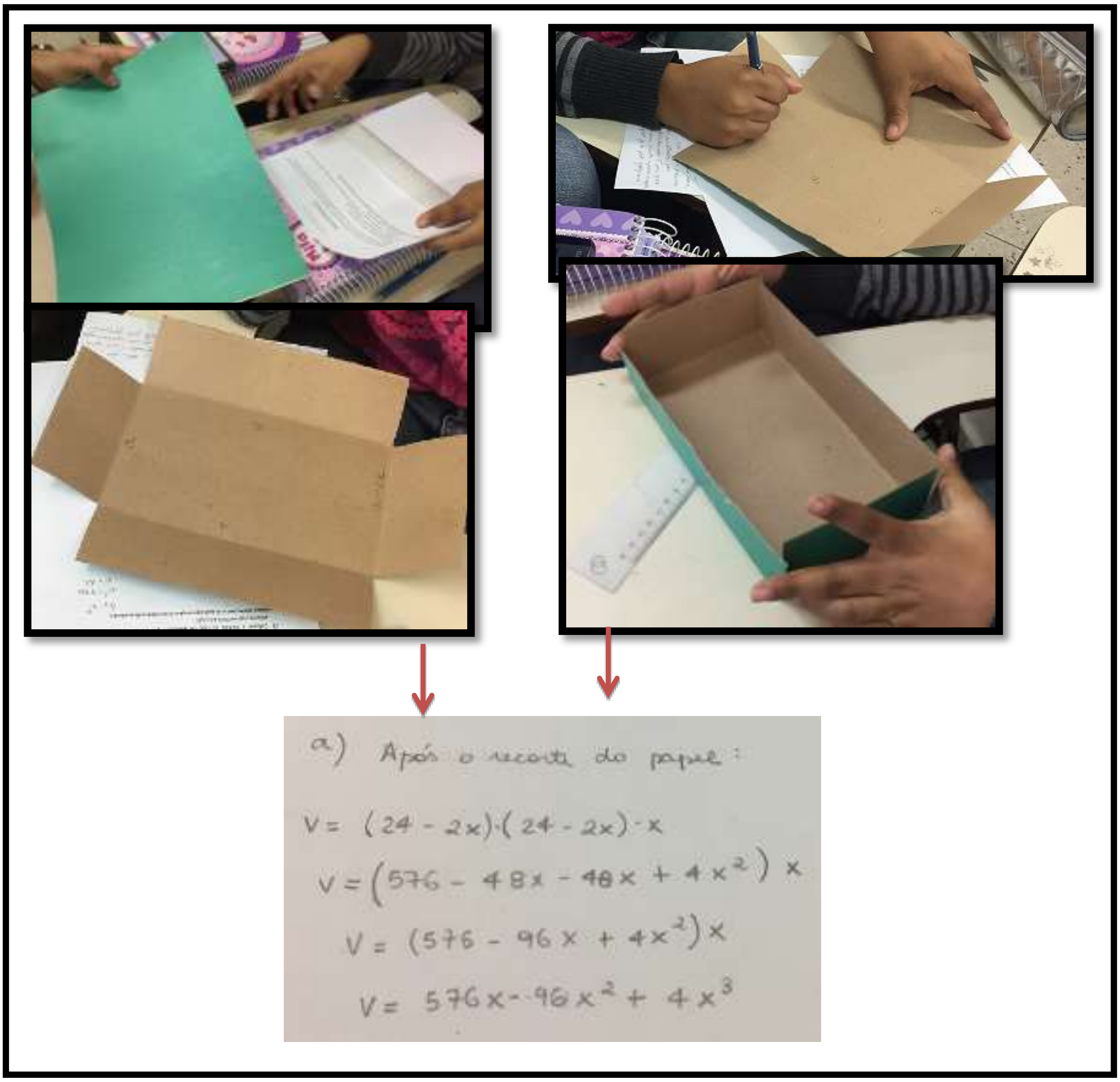


Figura 187: Alunos da dupla 2 "montando" a caixa proposta na atividade 02. Intervenção 03

Observamos que uma vez criada uma representação física do objeto em questão, o modelo matemático também foi criado. Quando perguntados sobre a não utilização do software para a resolução da questão, um dos elementos da dupla nos justificou da seguinte maneira:

> *Participante: Professor, como a derivada era uma função do segundo grau, achamos melhor fazer as contas mesmo. Também não conseguimos enxergar o gráfico, o senhor pode até olhar nossa imagem, nós mandamos para o seu e-mail.*

A análise do *print* da tela do computador da dupla, acrescido do depoimento supracitado, fez-nos entender que a escolha pela resolução algébrica da questão deu-se pela impossibilidade encontrada pela dupla em visualizar a representação gráfica da função em questão, como demostra a figura (188) abaixo:

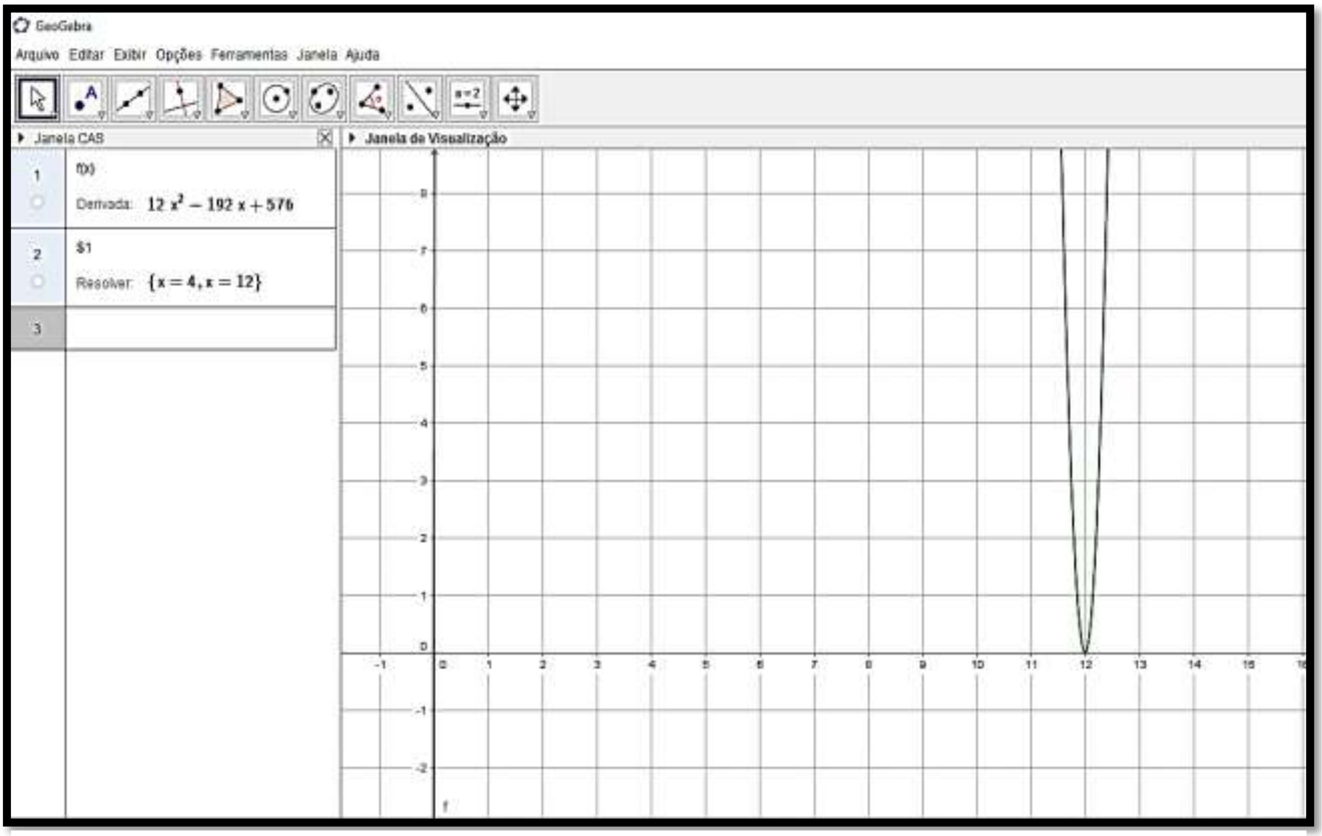


Figura 188: Print da tela do computador da dupla 2

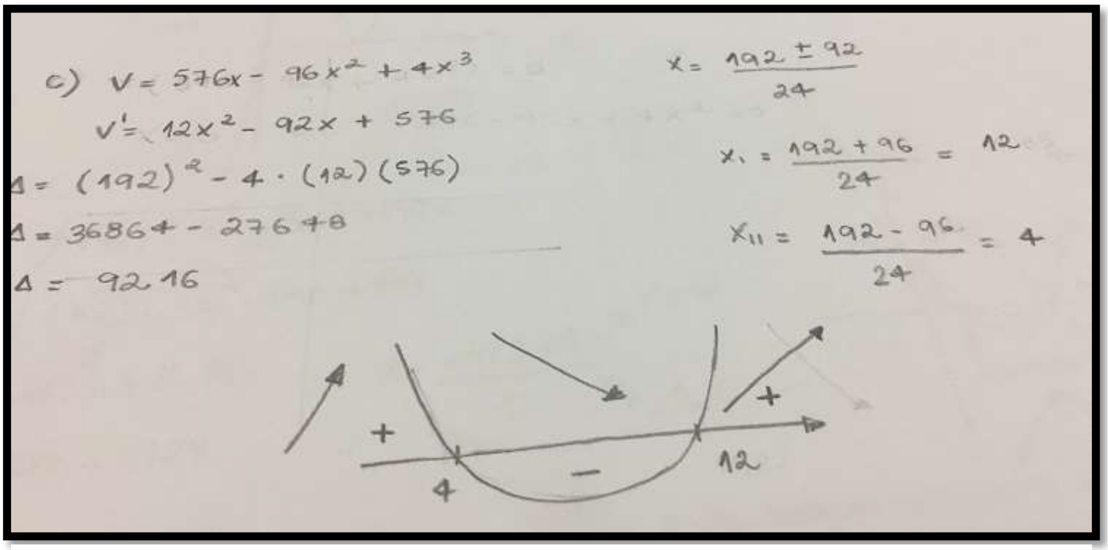


Figura 189: Protocolo de resolução da dupla 02. Atividade 03. Intervenção 03

O segundo protocolo analisado apresentava um esboço da resolução, mas este esboço não evidenciava a forma como os participantes pensaram a questão.

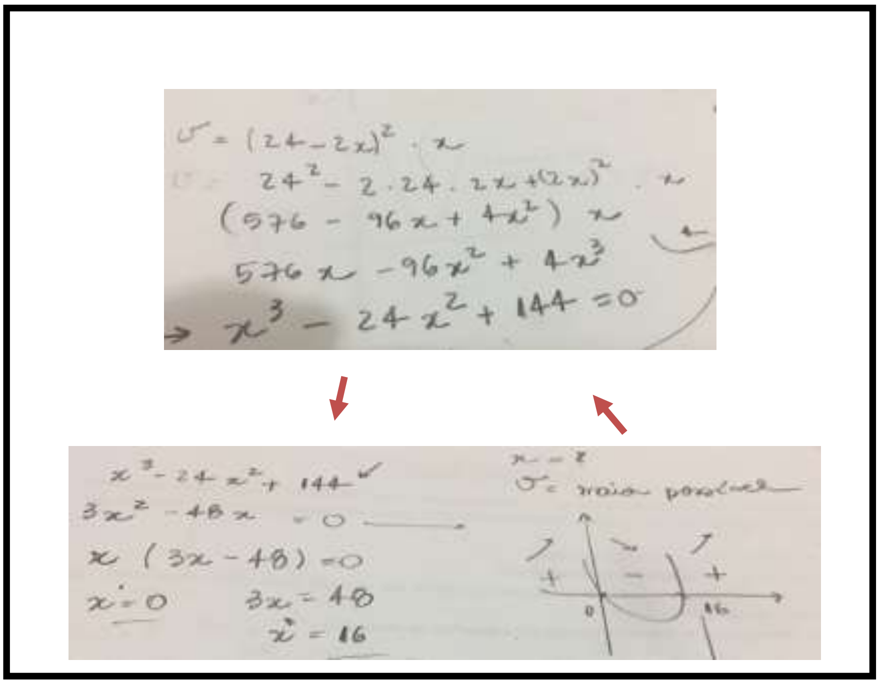


Figura 190: Protocolos de resolução dupla 03. Atividade 02. Intervenção 03

Como durante a intervenção percebemos que essa foi a única dupla que não usou o material concreto, optamos por verificar se os áudios possuíam algum indício que respondesse a essa dúvida dos pesquisadores.

> *P1: Cara essa questão caiu igualzinha na minha prova final. Ela caiu na P2 e depois caiu igualzinha na P3. Eu praticamente sei ela "de cor".*
>
> *P2. Eu nem lembro dessa (...) . Mas se você lembra, vamos fazer.*

Chamou-nos atenção o fato de que o participante embora tenha afirmado que já conhecida a questão e já havia se deparado com ela mais de uma vez, ainda assim não atenha resolvido de forma correta.

Observamos que o fato de já ter trabalhado com essa questão em outras situações não foi um motivo que despertasse na dupla uma "preocupação" com os procedimentos algébricos, ou não sabemos ainda de esses procedimentos estavam construídos de forma sólida nos participantes.

O protocolo escrito da terceira dupla a ser analisada - a dupla 01- também já continha a resolução pronta, sem nenhum indicativo de como eles pensaram. A análise dos áudios nos forneceram algumas informações relevantes.

> *P1: Bem tá no problema que a função é volume. Eu sei que volume é a área da base vezes a altura.*
> *P2: Mas temos que fazer a "f(x)", que é o volume aparecer. Pensar em quem vai ser a base e a altura.*
> *P1: Pensa comigo: a área da base a gente já tem que é 576. Só preciso da altura agora.*
> *P2: Chama de x. Mas ai vai mudar o tamanho da base. O problema fala que vai cortar o lado da caixa. Então "quem" é a base agora? Então eu tenho que achar o lado antes. Pega aí a calculadora. A " minha" área eu já sei que é 576. Ou seja, a base vezes a altura tem que dar 576. Mais vai dar ruim, pois tem muita letra.*
> *P1: Chama a base de x e a altura de x também pois a folha é um quadrado.*
> *P2: Isso. Mas não vou chamar de x pois a altura eu já chamei de x . Vou chamar de L.*
> *P1: Eu vou recortar a caixa, se não nós não vamos conseguir. A gente recorta e desenha vai ser mais fácil pra achar a função volume.*

Figura 191: Alunos da dupla 01, construindo a caixa da atividade 02

Observemos agora, a continuação do diálogo entre os participantes de dupla:

> *P2: O que vai ser a altura da caixa mesmo? Ah, já sei é esse ladinho x que nós levantamos aqui ó ! Agora, ó, se a gente olhar aqui na caixa, já tem a largura, o comprimento e a altura, basta fazer um vezes o outro e temos o volume.*
> *P1. Isso, tá saindo o "negócio"! rsrsrs É isso aí. Agora agente consegue escrever. Vou desenhar aqui.*
> *P2: Então o volume vai ser fazer o 24 – 2x vezes ele mesmo e vezes x.*
> *P1: E esse negócio vai dar cúbico. Como vamos fazer o gráfico disso?*
> *P2: Faz no programa no celular e copia. Depois que tiver a função o programa faz tudo. A gente só confere os resultados pra ver se "tá" tudo certinho. Vou fazer as contas aqui "pra" achar o volume. Tem que fazer a distributiva.*
> *P1: Agora eu faço aqui no celular e você escreve aí na folha de respostas*

A partir da manipulação do material (figura 191) os participantes conseguiram produzir uma imagem mental que permitiu que eles identificassem a ferramenta algébrica que deveriam utilizar na busca por uma resolução para a questão proposta. A figura 192 ilustra o procedimento algébrico, decorrente dos diálogos e manipulações executados.

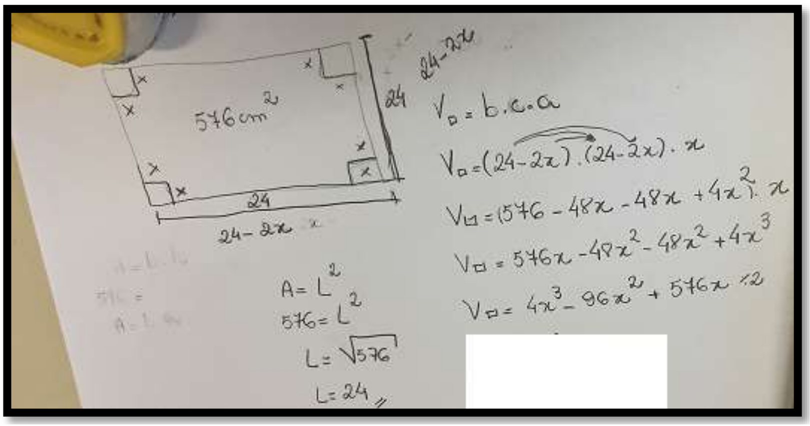


Figura 192: Protocolo de resolução. Dupla 01 .Atividade 02. Intervenção 03

Nesse momento o pesquisador também pode observar que os participantes já se sentiam mais seguros em utilizar o software e que já trabalhavam com ele, como sendo uma ferramenta que contribuiria na resolução da atividade.

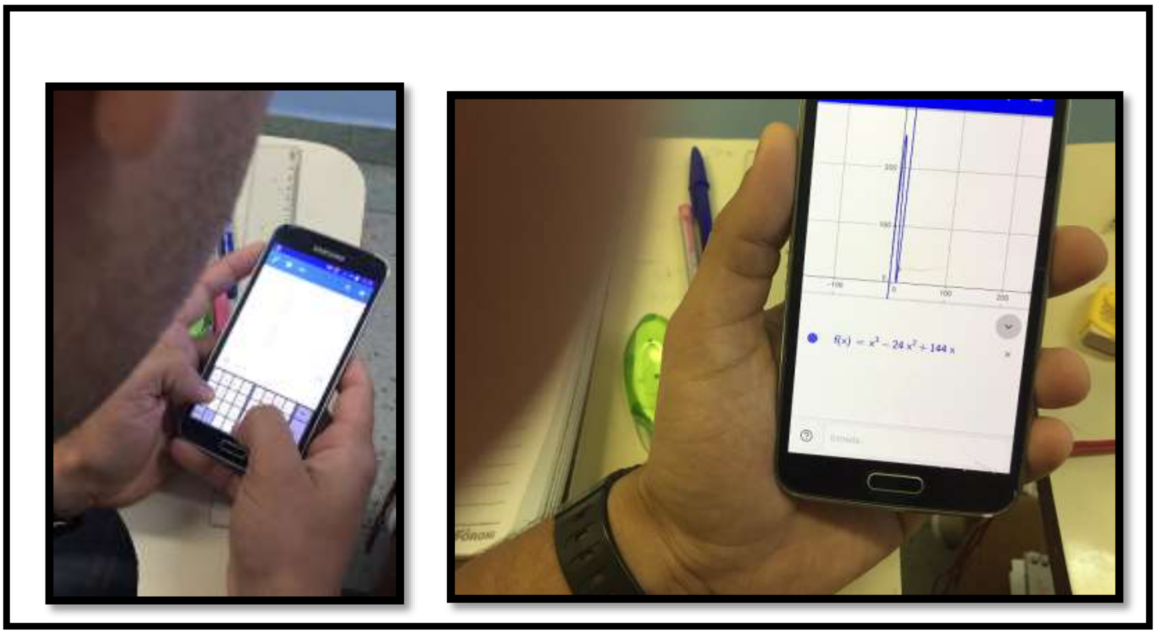


Figura 193: Alunos da dupla 01, utilizando o software para resolução da questão 02. Intervenção 03

Durante a execução da atividade, o pesquisador percebeu que os participantes voltaram ao trabalho com papel e lápis, como ilustra a figura 194.

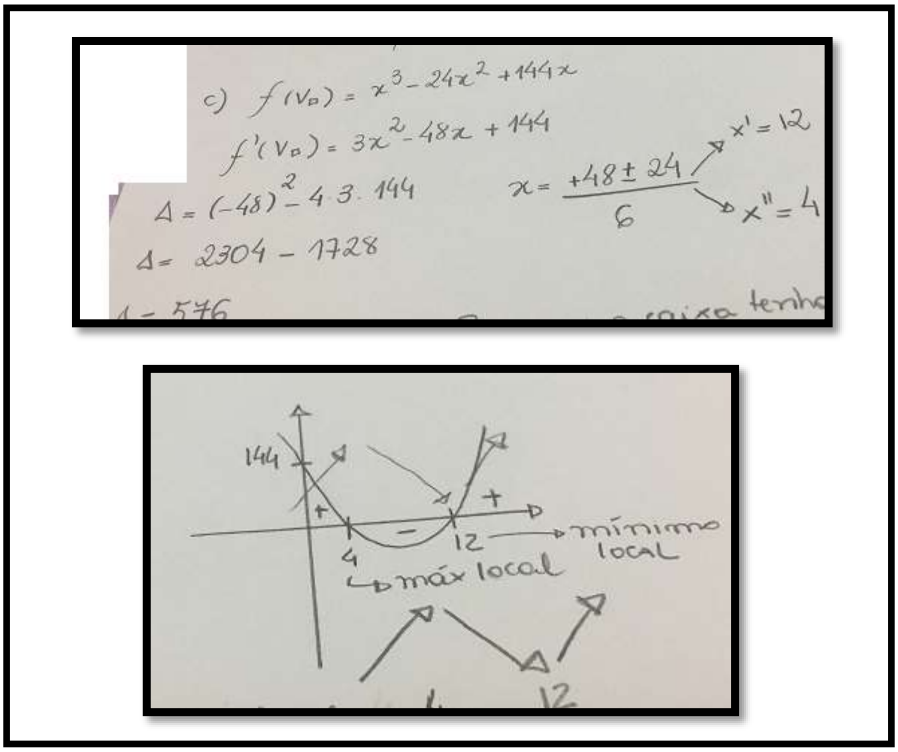


Figura 194: Continuação do protocolo de resolução. Dupla 01

Quando perguntados sobre o motivo de tal procedimento, um dos participantes, afirmou que *"a imagem do gráfico não me ajudou a encontrar a resposta, aí não teve jeito, tive que voltar e fazer tudo no braço."*

Um *zoom* feito na imagem da tela do celular do participante corrobora sua fala e justifica sua escolha, como mostra a figura 195.

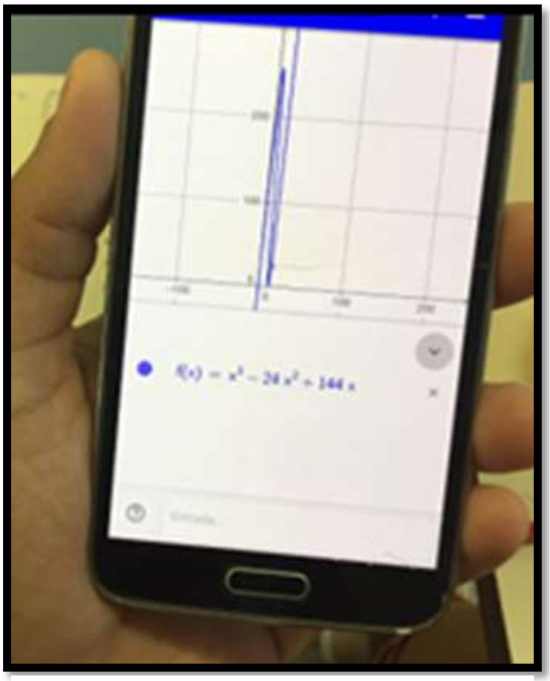


Figura 195: zoom aplicado sobre a imagem 202

Optamos por um trabalho com otimização e com a utilização de recursos que vão desde o recorte de material concreto ao uso da tecnologia por acreditamos que esse tipo de situação propicia aos alunos a mobilização de conhecimento por meio de descoberta, experimentação e argumentação.

Partimos das observações de Tall e Dreyfus a respeito das condições que o professor deve criar para potencializar a transição do Pensamento Matemático Elementar para o Avançado e ponderamos que as aulas de Cálculo devem favorecer além da compreensão dos conceitos, a relação com a realidade, o uso de computadores e os trabalhos em equipe.

Nesse sentido, elaboramos a terceira atividade da terceira intervenção, apresentada na figura 196.

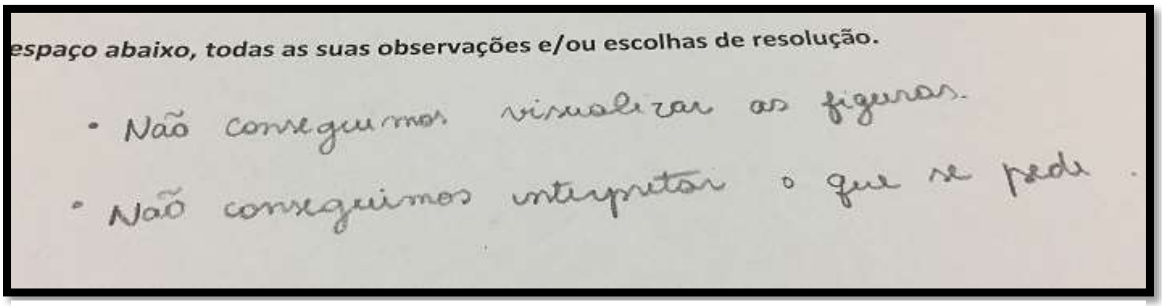
INTERVENÇÃO 03

3) Você está recebendo um pedaço de barbante de comprimento L. Você deve dividir esse barbante em duas partes. Com o primeiro pedaço você deverá construir um quadrado. Com o pedaço restante um círculo. Determinar o ponto em que se deve cortar o arame para que a soma das áreas geradas pelo quadrado e do círculo seja mínima.

Figura 196: Atividade 03. Intervenção 03

Com essa questão, tínhamos como objetivo apresentar uma situação onde a função a ser otimizada não fosse uma função corriqueira. Também pretendíamos verificar as estratégias utilizadas, ou seja, quais dos cenários oferecidos os participantes iriam optar.

Das três duplas participantes, uma não respondeu à questão, como ilustra a figura 197.


espaço abaixo, todas as suas observações e/ou escolhas de resolução.

- Não conseguimos visualizar as figuras.
- Não conseguimos interpretar o que se pede.

Figura 197: Protocolo da dupla que não conseguiu responder a atividade 03. Intervenção 03

Quando questionados pelo pesquisador, um deles respondeu que “*esse negócio de círculo complicou muito a nossa cabeça professor*. *Nunca estudei essa parte de círculo e o meu parceiro de dupla também não lembrava direito”*.

O segundo protocolo a ser analisado - protocolo da dupla 01- possuía muitos rabiscos, o que nos levou a concluir que os participantes começaram a resolução com um tipo de pensamento e durante o percurso, optaram por mudar a estratégia de resolução. Para entendermos o motivo, fomos ouvir os áudios dessa dupla e apresentamos agora, recortes dos diálogos, que entendemos ser importantes para entendermos o pensar da dupla.

> *P1: “Vamo” lá: Tenho um pedaço de barbante. Meu comprimento é “L”.*
>
> *P2: Faz o seguinte, pega o barbante na mesa do professor de uma vez. Já sabemos que vai ser mais rápido.*
>
> *P1: Você deve dividir esse barbante em dois pedaços. Corta aí. Divide em dois pedaços.*
>
> *P2: Tá! Já cortei!*
>
> *P1: Você cortou no meio. Mas ele não disse que tem que ser igual. Pega outro pedaço de barbante e começa tudo de novo!*
>
> *P2: Tá !*
>
> *P2: Pronto!*
>
> *P1: Oh, com o primeiro vamos construir um quadrado. Tem que fazer um quadrado desse “troço” aqui.*
>
> *P2: Tá bom! Não precisa ser perfeito! É pra gente “vê” a figura. Agora faz o círculo com o que sobrou do barbante.*
>
> *P1: Já fiz o meu quadrado e o meu círculo. Tá parecendo um bola! (risos)*

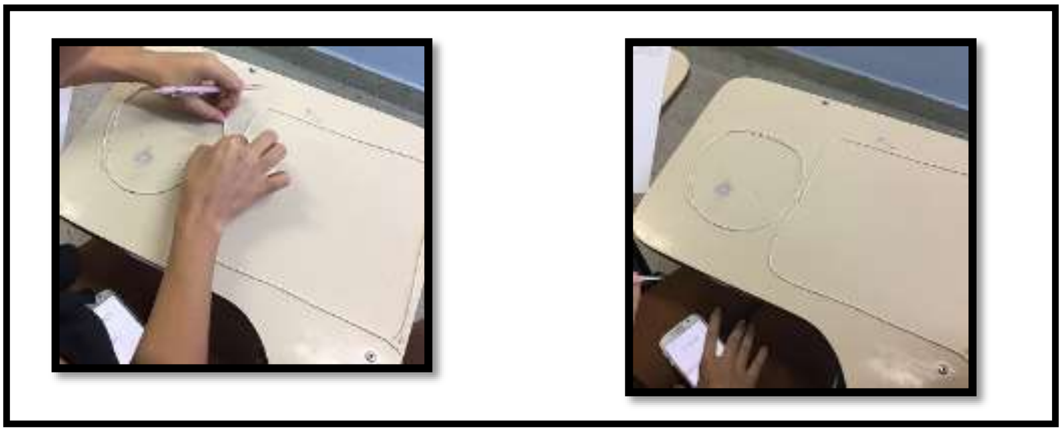


Figura 198: Participante da dupla 01, manipulando material para representar dados da questão 03. Intervenção 03

Observemos a continuação do diálogo.

> *P1: Bem, ele tá falando que a área do quadrado, mais a área do círculo tem que "dá" máximo. Como que é a fórmula do quadrado? É "L" ao quadrado né? E a minha área do círculo é πr^2.*
>
> *P2: O problema não deu número nenhum. Vamos ter problema!*
>
> *P1: Ele não deu numero nenhum mas disse o comprimento total é "L".*
>
> *P2: Vamos dar um valor pra "L"*
>
> *P1: Não ! Qual vai ser o comprimento do círculo? Oh, o que acontece de eu desmontar o círculo aqui?*
>
> *P2: Vai ser $2\pi r$. Então você vai sair do comprimento do círculo pra depois ir pra área? No quadrado também.*
>
> *P1: Sim ! Vou tentar! (risos)*
>
> *P2: O comprimento desse aqui é x por quatro, x por quarto, x por quatro e x por quatro. E no círculo $2\pi r$.*

Sabemos que quando um estudante estabelece várias representações para abstrair um conceito, ele precisa propor uma articulação entre elas de modo a estabelecer relações e interações "fortes", sempre que necessário, fazendo a mudança entre as representações, o que tanto para Dreyfus como para Duval, são componentes indispensáveis para a construção de um conceito matemático. A análise dos diálogos mostrou como essa dupla articulou as modificações entre as representações e as imagens mentais e como essa articulação foi indispensável para o desenvolvimento da atividade.

P1: Mais pera aí. O meu “L” é isso tudo. O contorno das duas figuras.
P2: Sim! “ L” vai ser $2\pi r + x$, que é o pedaço do barbante que vale o quadrado.
P1: Mas o comprimento do quadrado não seria a soma de todos os lados dele?
P2: Sim! Daria 4x por 4 , ou seja: x
P1: Não entendi isso não!
P2: Olha aqui! Vou desmontar tudo! Vê: O barbante todo tinha “L”. Voce usou x para o quadrado certo?
P1: Sim.
P2: Então pronto, o contorno do quadrado vai ter x e o contorno do círculo vai ter “L” menos x. Igual ao que já fizemos da outra vez.
P1: Ah, sim, entendi! Então o x por quatro é o lado do quadrado e o “L” =x vai ser o $2\pi r$. p.. como não “tava” vendo isso
P2: risos
P1: Então agora eu tenho que descobrir o “r”.
P1: Nossa, tá muito feio! Imagina fazer a conta com esse “r”.
P2: Ué vamos começar pelo círculo então.

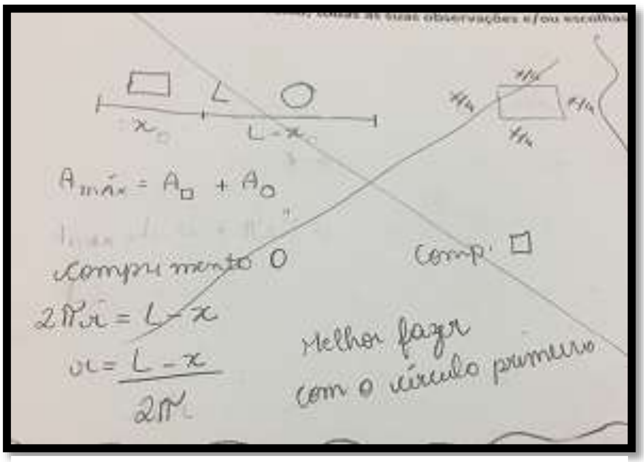


Figura 199: Representações iniciais do problema do barbante

P1: Será que faz diferença? Acho que vai dar no mesmo!
P2: Estamos “presos” mesmo! “Vamo” tentar.
P1: Tá bom, lá “vô” eu! O x vai ser o comprimento do círculo e o L – x vai ser o comprimento do quadrado. É vai ficar menor mesmo!

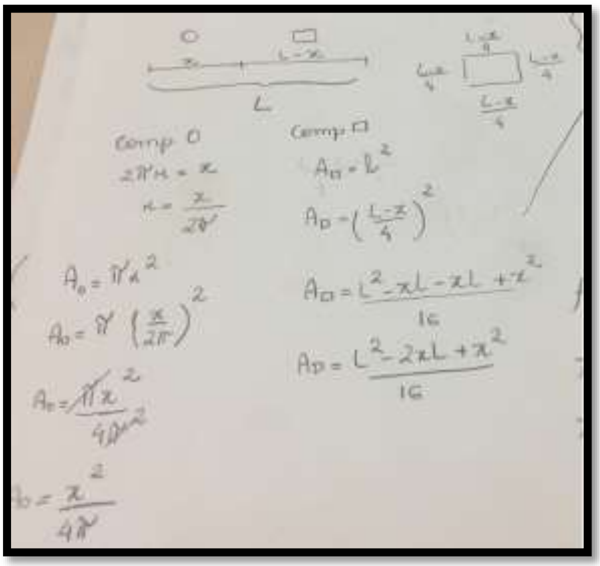


Figura 200: Protocolo da resolução parcial apresentada pelos participantes da dupla 1

Verificamos até aqui que a articulação entre as imagens mentais, as imagens de conceito e as definições de conceito foram capazes de promover a modelagem da situação proposta.

> *P1: Já temos as duas funções, somando tudo vai ter a área total. Agora é só derivar.*
> *P2: Não é melhor usar o Geogebra?*
> *P1: Tá doido! Com esse monte de x, de L e de π. "Vamo" fazer no braço mesmo.*
> *P2: "Pera" aí! Vou tentar!*
> *P1: Então tenta! Eu não vou tentar ! Espero você !*
> *P2: Não sei nem como digitar isso tudo lá .*
> *P1: Então vamos lá! Vou derivar separado! O quadrado e depois o círculo.*

Embora alguns dos livros analisados em nosso estudo, livros estes, presentes nas ementas dos cursos e nos planos de ensino dos professores entrevistados, apresentassem como alternativa metodológica a utilização desses recursos computacionais, o que percebemos como a análise desse protocolo e de outros que já apresentamos e que ainda iremos mostrar é que esse recurso embora tenha sido usado em alguns momentos pelos participantes da pesquisa, ainda precisa ser mais explorado no cotidiano das aulas de Cálculo.

Afirmamos isso, pois como já foram mostrados em outros protocolos, os alunos ainda não confiam no poder dos softwares, tanto que recorrem ao cenário do papel e lápis na busca de validar os resultados ou, como o trecho transcrito acima, eles não trabalharam o suficiente para utilizar a ferramenta, o que acaba direcionando-os ao trabalho com técnicas operatórias.

Ficou bastante explícito que a animação proporcionada pelos recursos computacionais constitui um elemento fundamental na visualização, pois o caráter dinâmico do software escolhido permitiu uma interação entre os participantes e a representação gráfica da função, permitindo levantamento e testagem de hipóteses, construindo-se assim de uma nova forma de se produzir conhecimento a respeito das características dos gráficos de funções de uma variável real.

Não estamos, nesse momento, condenando o uso das técnicas operatórias, mas sim, alertando de que a familiarização dos estudantes com esse tipo de tecnologia pode ajudar significativamente na transição entre o pensamento matemático elementar e o avançado.

Chamou-nos a atenção o fato de que os alunos, em determinado momento, valerem-se de alguns proceitos para colocarem em "cheque" o procedimento algébrico que estavam usando:

> *P1: Vou fazer depois você confere comigo. Se fizer junto com você eu me perco.*
> *P2: Tá bom!*
> *P1: Já fiz! Eu comecei pelo círculo e fiz quociente.*
> *P2: Quociente por que? "pi" não é variável é número. Lembra a derivada é zero!*
> *P1: P.... Você tá certo!*

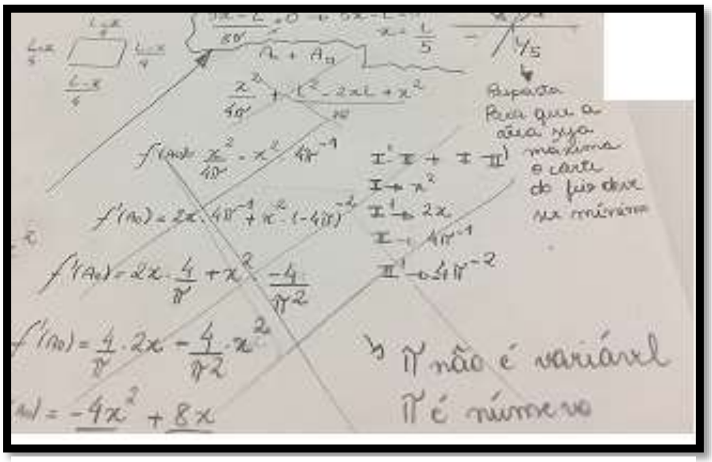


Figura 201: Proceitos evidenciados no protocolo da dupla 1

A análise do protocolo abaixo, figura (202), demonstrou que embora os alunos tenham conseguido articular de forma coerente suas representações e processos mentais, a questão não foi plenamente resolvida por conta de um engano relativamente elementar, cometido pela dupla.

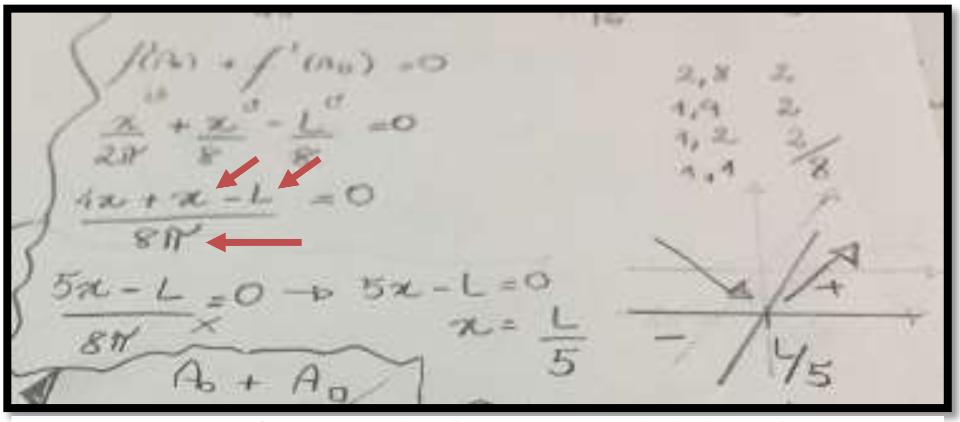


Figura 202: Equívoco cometido pelos participantes da dupla 01, durante o desenvolvimento da atividade.

O último protocolo analisado apresentou características bastante semelhantes ao que acabamos de narrar.

Os participantes também se valeram do barbante para construção de uma representação inicial e a partir dessa representação, elaboraram um modelo algébrico e optaram por resolver a questão no cenário do papel e lápis. Quando questionados a respeito da não utilização do software, justificaram sua escolha por não saberem digitar a equação.

Na análise do protocolo da Figura 211 chamou-nos atenção o equívoco cometido pela dupla no que se refere ao procedimento algébrico utilizado, o que desencadeou um resultado final equivocado.

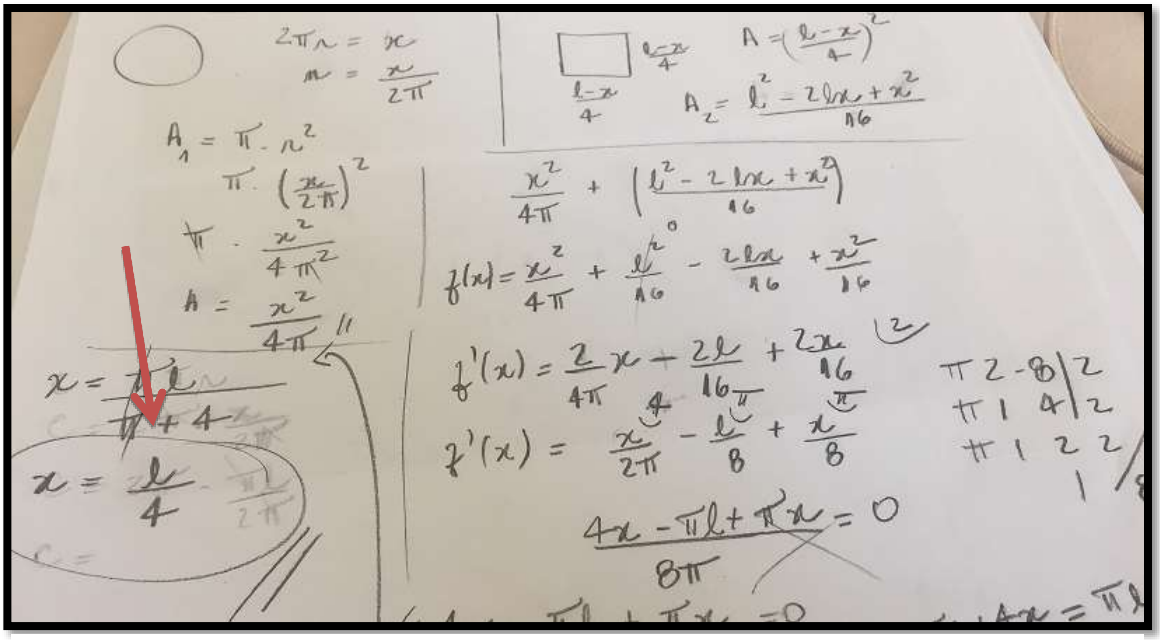
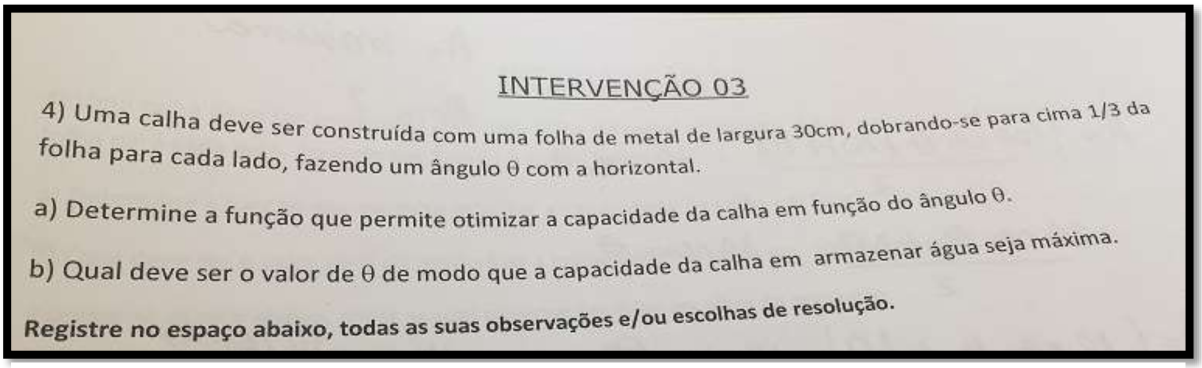


Figura 203: Equívoco algébrico cometido pelos participantes do último protocolo analisado

A última atividade proposta na terceira intervenção foi a seguinte:



INTERVENÇÃO 03

4) Uma calha deve ser construída com uma folha de metal de largura 30cm, dobrando-se para cima 1/3 da folha para cada lado, fazendo um ângulo θ com a horizontal.

a) Determine a função que permite otimizar a capacidade da calha em função do ângulo θ.

b) Qual deve ser o valor de θ de modo que a capacidade da calha em armazenar água seja máxima.

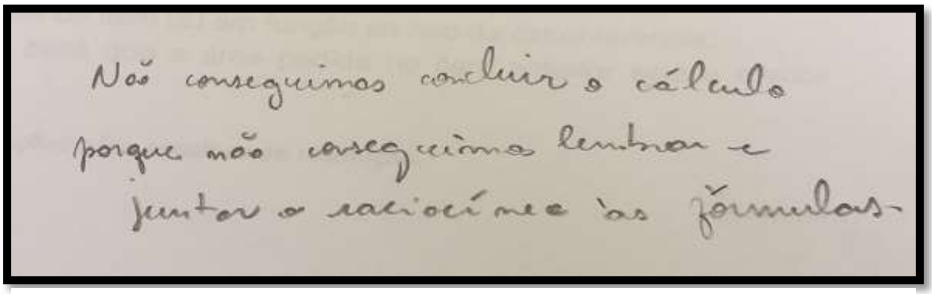
Registre no espaço abaixo, todas as suas observações e/ou escolhas de resolução.

Figura 204: Atividade 04 , Intervenção 03

Quando estávamos selecionando as questões que comporiam a intervenção, chegamos a pensar que não deveríamos usar essa questão, pois acreditávamos que os participantes teriam grandes dificuldades em entendê-la, além das dificuldades decorrentes da utilização da trigonometria para modelar a função.

Como já dissemos anteriormente, já havíamos feito uma preparação com os alunos, retomando alguns conceitos básicos de matemática, dentre eles, as ideias de trigonometria.

Das três duplas participantes dessa intervenção, apenas uma não realizou a tarefa completamente e justificou-se pelo não entendimento da questão (Figura 205).



Não conseguimos concluir o cálculo
porque não conseguimos lembrar e
juntar o raciocínio às fórmulas.

Figura 205: Justificativa dada pelos participantes da dupla 03

As outras duas duplas resolveram de forma acertada a questão e seus protocolos apresentaram uma mesma linha de pensamento. Ambas as duplas utilizaram o material manipulativo para elaborarem uma primeira representação da situação proposta.

Para destacar a importância do material manipulativo para a resolução da questão, observemos a transcrição do diálogo entre os participantes de uma das duplas que conseguiu resolver a questão:

> *P1: Esse não tem nem desenho nem nada. Temos que fazer o desenho.*
>
> *P2: Vamos fazer primeiro um modelo com o papel que o professor trouxe e depois agente desenha. Vai ser mais fácil.*
>
> *P1: Tem que dividir a folha , aqui ó , em três partes iguais.*

Ao observarmos o diálogo entre os participantes, destacamos a importância dada pelos mesmos à representação figural da situação. Tal fato evidencia-se quando o participante afirma não ter o desenho e apontar a necessidade da construção de um "esboço" inicial da situação. Fica também bastante perceptível a importância dada ao material manipulativo no momento em que, no diálogo, os participantes optam por iniciar a resolução construindo um modelo em papel. As figuras 206e 207 ilustram o momento inicial de construção e o "protótipo" já minimamente construído.

Figura 206: Participante da dupla 1, iniciando a manipulação no papel

Figura 207: Participantes da dupla 01: Primeira construção da situação proposta

Mais uma vez, nos deparamos com características do Mundo Corporificado na prática dos participantes. Observemos a continuidade do diálogo abaixo:

> *P1.Ô papelzinho ruim de dobrar! Tem que fazer um ângulo com a horizontal.*
> *P2: Mas que ângulo?*
> *P1: Faz um ângulo qualquer ué! Mas no desenho o ângulo tá onde?*
> *P2: Dentro ou fora?*
> *P1: "Tá" fora, olha aqui! A gente dobrou e" subiu", meu ângulo tá aqui entre a mesa e a lateral da folha .O espaço que eu desloquei.*
> *P1. Determine a função para otimizar a capacidade!*
> *P2. C.. Isso vai ser difícil.*
> *P1. "Vamo" lá! Qual vai ser a função?*
> *P2:O problema tá falando em capacidade máxima. Quer dizer encher o máximo possível!*
> *P1: Professor ajuda aqui*
> *Pesquisador: Oi. O que está havendo?*
> *P2: Professor, não sabemos a função qual é?*
> *Pesquisador: O que está acontecendo no problema?*
> *P1: Tem uma calha e você pode mudar o ângulo. Aumentar ou diminuir.*
> *Pesquisador: E mudando a inclinação o que mudaria na calha?*
> *P2: O volume*
> *Pesquisador: Volume seria função?*
> *P1: Não pois não "tô" mexendo com a altura da calha, e sim dessa figura aqui!*

Para além das características do Mundo Corporificado detectamos, no diálogo abaixo, processos mentais presentes no Pensamento Matemático Avançado, como por exemplo a visualização, a representação e a generalização. A busca pela função que modela a situação proposta pelo problema, teve seu inicio a partir da ação dos participantes sobre um objeto físico. Observemos a figuras 208 e o diálogo que se segue.

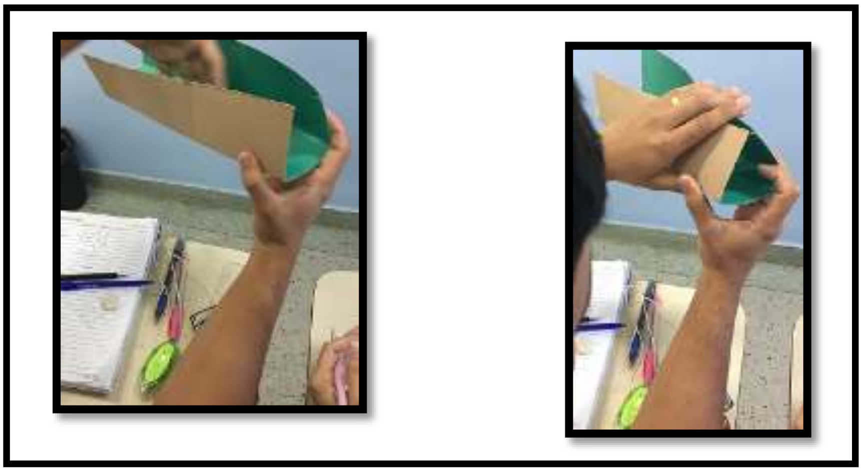


Figura 208: Participantes da dupla 01 observando a inclinação da calha

> *Pesquisador: Que figura?*
> *P1: O trapézio. É a calha vista de frente.*
> *Pesquisador: Ok, então a mudança no ângulo influência o que no trapézio?*
> *P1: A área. Essa vai ser a função, pois o ângulo vai influenciar na área da figura.*
> *P2: A área é "bezão " mais " bezinho" vezes altura sobre dois.*
> *P1: A base tem 10. A pequena, ou seja o "bezinho".*

A partir da construção de um "protótipo" da calha, os participantes da dupla começaram a produzir uma nova representação, que, agora, pode ser identificada como uma representação figural. O diálogo também evidencia a presença de imagens de conceitos no momento da ação sobre os objetos, o que poderíamos interpretar como os *met-befores*definidos por Tall (2004)como sendo " uma estrutura que temos em nosso cérebro agora como resultado de experiências que tivemos antes'.

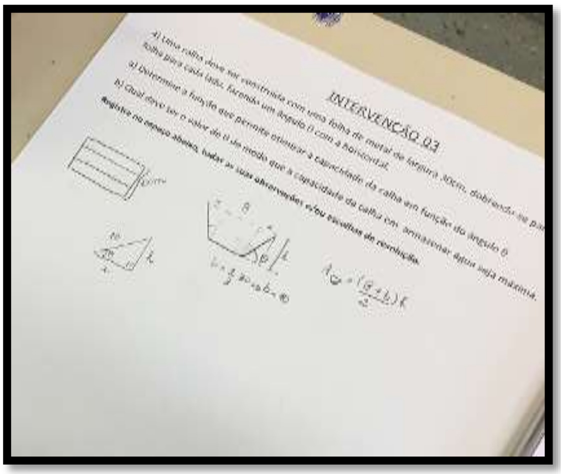


Figura 209: Início da representação escrita feita pelos participantes de dupla **1**

As definições de conceito também emergiram a partir da ação dos participantes sobre o objeto construído. Nesse sentido podemos perceber um conjunto de conversões: da língua materna para o protótipo e deste para a representação figural.

Tal articulação ratifica a afirmativa de Duval em relação a importância das representações na aprendizagem matemática e em especial as conversões entre elas.

> *P2: Mas não temos nem a altura nem a outra base, vamos desenhar isso. Agora ficar olhando só pra calha não está resolvendo.*
> *P1. Com o desenho agora eu entendi! "tem " que achar a altura e tem que achar o x. Com isso a área aparece, pois a base grande vai ser o 10 somado com esses dois x aqui. Vamos pensar agora. Vou olhar só pro triângulo daqui.*
> *P2: Vamos com calma. Vamos achar a altura primeiro. Podemos usar o teorema de Pitágoras?*
> *P1: Não, pois tem x e h. Agora f...*
> *P2: Como vamos sair dessa? Quem eu quero saber? Vamos pensar quem é x? Cateto!*
> *P1: Já sei! Ele é cateto adjacente. Usa cosseno.*
> *P2: Olha aqui, fiz, mas deu que x é 10 vezes o cosseno de θ. Vou fazer a altura.*
> *P2: Meu Deus, a altura deu 10 vezes o seno de θ. E a agora?*
> *P1: "Joga" tudo na fórmula da área.*

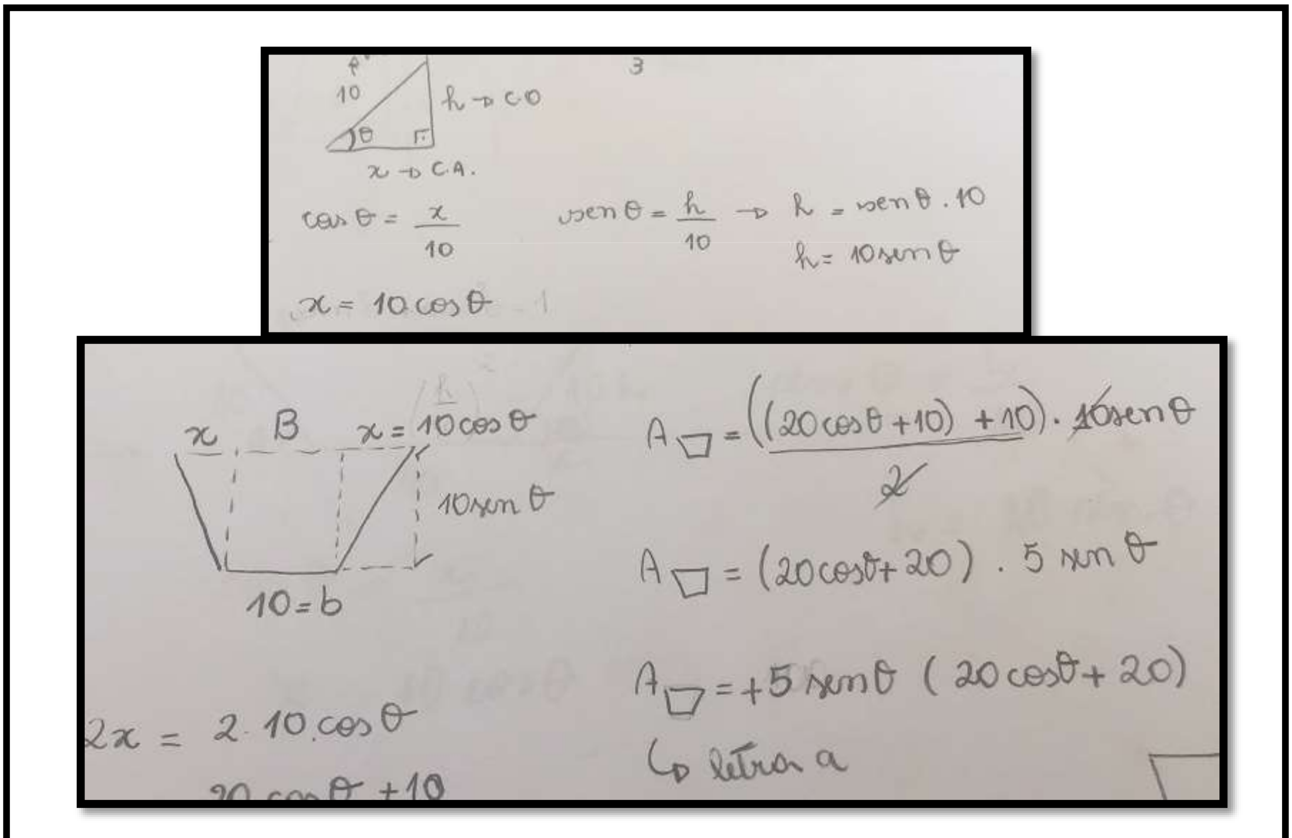


Figura 210: Recorte doprotocolo de resolução dos participantes da dupla 1.

Os áudios dessa dupla nos mostram que incialmente eles optaram por determinar uma solução gráfica para o problema. Também ficou bastante claro para os pesquisadores, que a representação oferecida pelo software não foi capaz de promover uma visão da solução do problema, o que os conduziram a uma resolução algébrica do problema proposto.

> *P2: Digitei no Geogebra. Mas acho que fiz algo errado. Tá dando uma "doidera".Olha o desenho na tela. Mesmo olhando a resolução não sei a resposta*
> *P1: Vamos fazer no papel e ver o que acontece.*

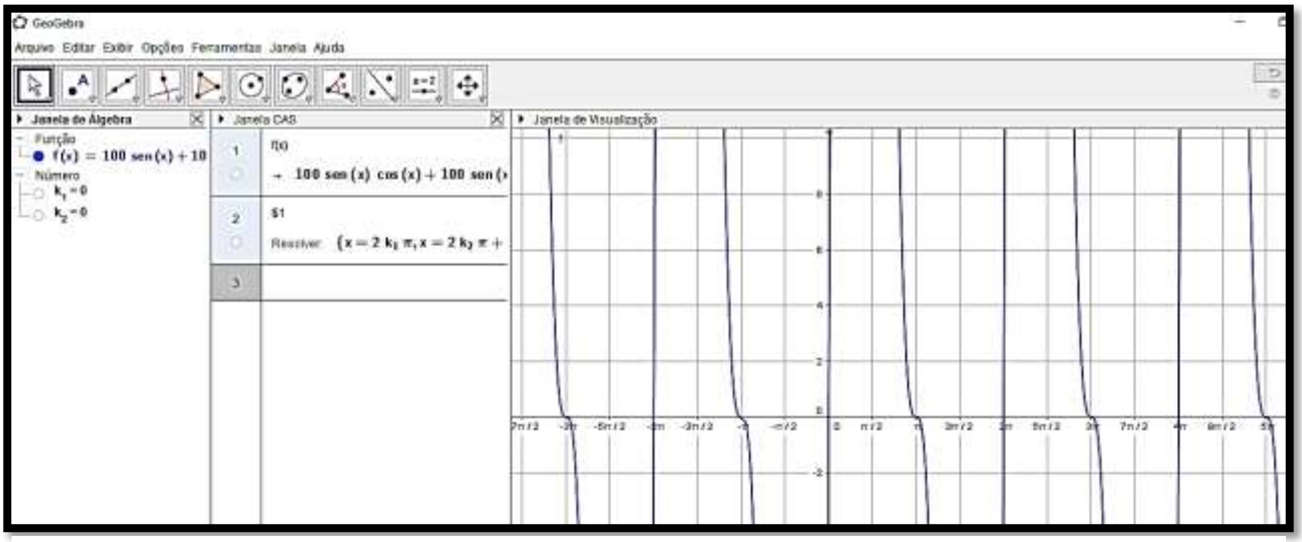


Figura 211: Print da tela de resolução da atividade 04, intervenção 03, dupla 1

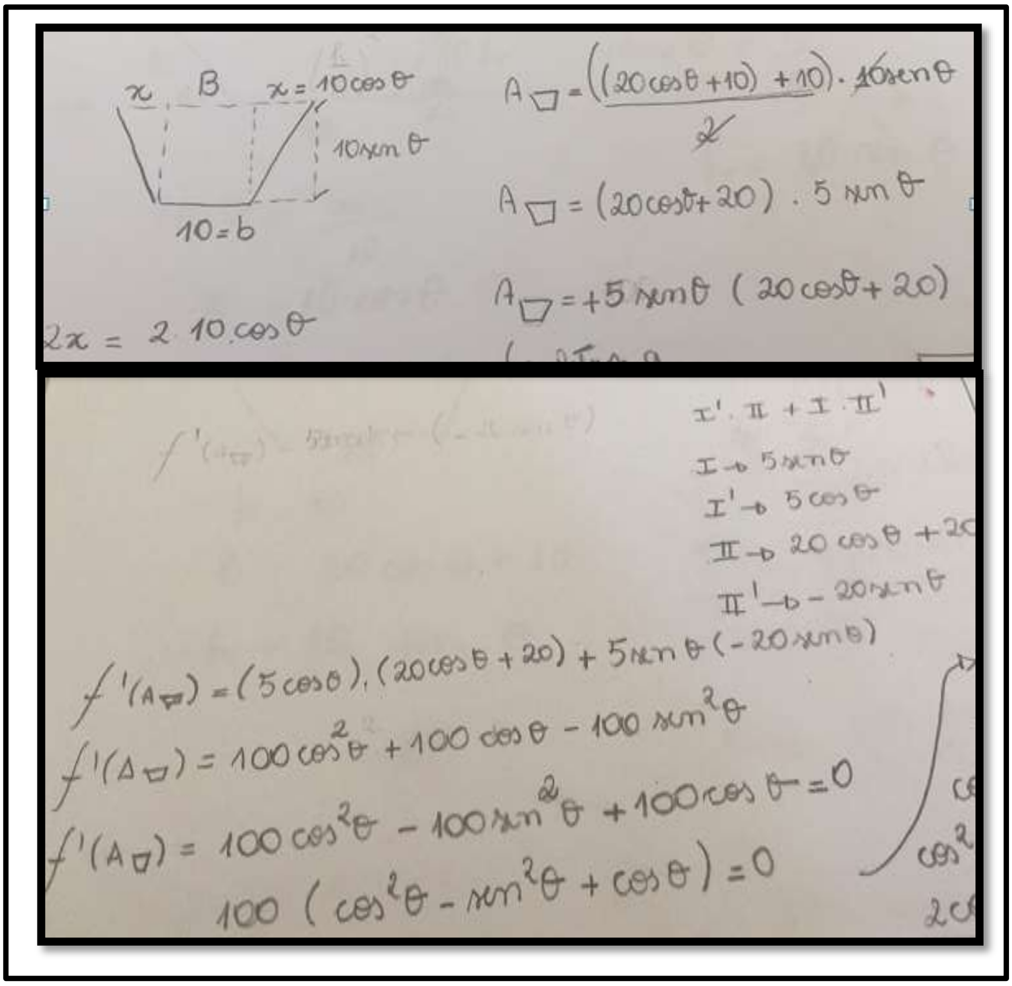


Figura 212: Protocolo de resolução. Atividade 04. Intervenção 03. Dupla1

A partir desse momento, os participantes da dupla 01, valeram-se apenas de procedimentos algébricos para concluírem a questão, como ilustra a figura 212. Observamos que para essa dupla, houve uma necessidade de manipular o material concreto para produzir uma imagem mental da situação proposta e para uma representação dessa situação em papel e lápis, com a utilização da linguagem matemática.

Tendo conseguido modelar a função, a ideia inicial dos participantes, foi a utilização do software para determinar o ângulo que satisfazia a situação proposta. Como a representação obtida não "deu" conta de fornecer as respostas, os participantes retornaram ao ambiente de papel e lápis e chegaram a conclusão da resposta da questão.

O último protocolo analisado (figura 213) apresentava apenas a resolução por processos algébricos. Esse grupo, durante a resolução da última atividade apresentou algum problema como gravador e por conta desse fato, os pesquisadores não tiveram acesso aos diálogos dos participantes durante a realização da atividade.

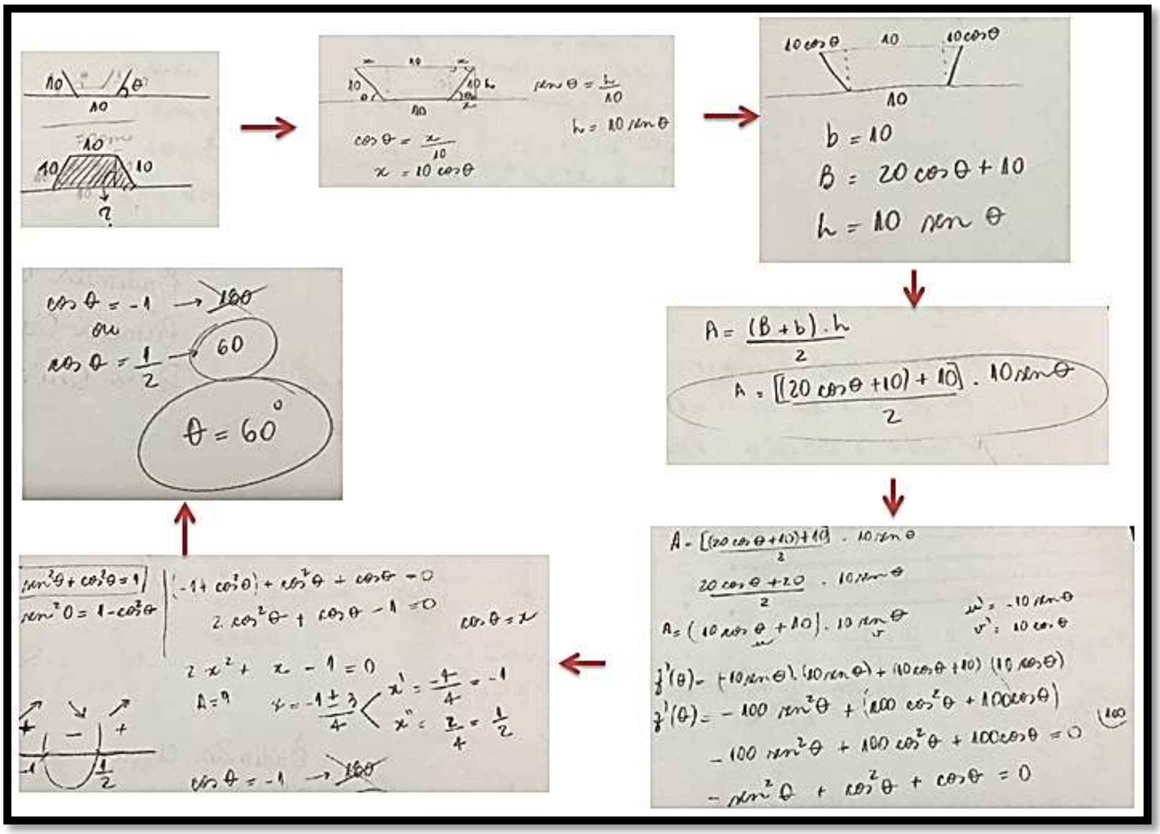


Figura 213: Recortes do protocolo de resolução da dupla 03

Pela observação e análise dos protocolos, verificamos que os participantes da dupla 03 mobilizaram suas imagens de conceito e imagens mentais, fazendo suas generalizações e modelando a função.

O protocolo também apresentava a resolução por meio de procedimentos algébricos em detrimento da utilização do software. Por conta do fato já narrado, os pesquisadores, não puderam concluir se os participantes optaram por resolver as questões por meio das técnicas algébricas por não conseguirem analisar o gráfico produzido no software e/ou por não confiarem nos resultados apontados pelo programa.

6.5 Uma visão Panorâmica das Atividades das Duplas de Participantes

Para conduzir as análises da evolução dos participantes, entendemos ser importante elencarmos um conjunto de categorias que foram levados em conta ao observarmos protocolos, procedimentos de resolução e áudio dos diálogos.

As categorias escolhidas, foram selecionadas a partir do constructo teórico que balizou o presente estudo. Foram eles: Realização de Tratamentos; Realização de Conversões ; Presença da Função de Objetivação; Utilização das Regras de Conformidade; Utilização de Registros Monofuncionais ; Utilização de Registros Multifuncionais; Presença de Representações Congruentes; Presença de Características do Mundo Corporificado; Presença de Características do Mundo Proceitual; Presença de Características do Mundo Axiomático Articulação entre as imagens de conceito e as definições de conceito; Transição do nível verbal – espacial para o verbal – dedutivo; Pensamento Matemático sendo por imagens concretas e deduções lógicas; Utilização de proceitos; Utilização de Definições conceituais; Capacidade de Representar; Capacidade de Visualizar; Capacidade de Modelar; Capacidade de Generalizar e Capacidade de Sintetizar.

Optamos agora, por apresentar, ainda que uma evolução dos participantes do estudo ao longo das intervenções.

Destacamos que iremos analisar apenas 3 das duplas participantes, por terem sido as únicas que participaram de todos os encontros propostos.

Dupla 01:

A dupla inicialmente respondeu as questões valendo-se das imagens mentais já construídas. Questões relacionadas à análise de gráficos, necessitavam de uma comprovação algébrica e quando essa comprovação não era possível de ser feita, os participantes afirmavam estar inseguros em relação a resposta apresentada ou em relação ao procedimento a ser adotado para responder à questão.

Em alguns momentos de resolução das atividades propostas ao longo das intervenções, a dupla apresentou dificuldades tanto no tratamento quanto na conversão dos registros de representações advindos das situações, o que provocou o abandono da resolução de algumas das questões, situação essa que foi se modificando ao longo dos encontros.

As atividades utilizando o software contribuíram para a articulação entre as representações conscientes e inconscientes, promovendo assim o que Duval chama de função de objetivação.

Observamos nessa dupla um predomínio da utilização das representações computacionais internas e inconscientes, ou seja, os alunos buscavam resolver as questões sem pensar em todos os passos que deveriam ser dados durante o percurso.

Observamos também, ao longo das atividades, um avanço na utilização das regras de conformidade das representações, uma vez que durante a análise dos protocolos, ficou evidente uma melhor articulação entre as representações utilizadas.

Outro fator que nos chamou a atenção na evolução dessa dupla, foi que a partir do segundo encontro, devido à utilização de recursos manipulativos tornou-se bastante notória a evolução da congruência entre suas representações.

Em relação às estratégias utilizadas ainda podemos afirmar que a dupla inicialmente estava no estágio que Tall chama de corporificado e que em boa parte das atividades propostas, os participantes iniciaram suas estratégias de resolução no “mundo” corporificado, chegando ao “mundo” proceitual. Prova disso foi que em nas atividades de otimização, sempre que possível, essa dupla valeu-se dos recursos manipuláveis para a construção de uma imagem mental para somente depois, modelar a função e dar prosseguimento a resolução, como descrito na tese.

Ao longo da análise dos protocolos, evidenciou-se uma evolução do conhecimento matemático, pois percebemos a articulação entre os conceitos “já encontrados” e os “ a encontrar”.

Detectamos ainda uma evolução da dupla no que se refere a articulação entre as imagens de conceito e as definições de conceito, além da transição dos conceitos do nível verbal–espacial para o verbal–dedutivo, uma vez que os conceitos foram de solidificando e chegaram ao ponto de serem construídos por meio das definições. Tal afirmativa pode ser ilustrada pela análise dos diálogos dos participantes da dupla.

A análise dos diálogos entre os participantes dessa dupla nos permitiu verificar que no que se refere ao nosso objeto de estudo o nível do pensamento matemático evoluiu para o avançado uma vez que as ações tornaram-se simbolizadas e os conceitos foram formalizados pela articulação entre as definições e as deduções lógicas.

Dentre as estratégias utilizadas por essa dupla, destacamos a evolução na capacidade de representar, sintetizar e de visualizar.

Dupla 02:

A segunda dupla analisada, demonstrou desde as primeiras atividades uma articulação maior entre as imagens de conceito e as definições de conceito, fato que ficou evidenciado nas questões que envolviam análise de gráficos.

Assim como a dupla 01, essa dupla também explicitou em seus protocolos a necessidade de verificar algebricamente resultados que deveriam ser obtidos pela análise dos registros na forma gráfica. Como estamos nesse momento analisando as estratégias de resolução da dupla, devemos destacar que essa dupla apresentou um “amadurecimento” em sua capacidade de promover tratamentos e conversões, fato esse comprovado quando se observa em especial o primeiro e o último protocolo dessa dupla.

Por meio da utilização de materiais manipuláveis, os participantes, dessa dupla,elaboraram representações com um nível bastante satisfatório de congruência. Evidenciou-se o predomínio de características do mundo corporificado, uma vez que suas estratégias de resolução, como já dissemos aqui, prioritariamente, iniciava-se pela observação, manipulação de objetos, mas em especial, tornou-se bastante notória a articulação entre o mundo corporificado e o mundo axiomático formal, pois em vários momentos, os participantes evocavam definições, e teoremas, que constituem o sistema axiomático da Matemática.

A partir das características do mundo corporificado, observamos por meio dos protocolos e áudios o desenvolvimento de habilidades do pensamento matemático avançado dentre as quais, destacamos a visualização, a modelação e a sintetização.

A análise longitudinal dos protocolos evidencia a evolução dos procedimentos dos participantes frente às atividades propostas, uma vez que suas ações sobre os objetos manipuláveis, na busca da modelagem da situação permitiram que essas ações fossem simbolizadas e fossem se articulando até tornarem-se significativamente proceitos.

Dupla 03:

A terceira dupla analisada evidenciou em suas respostas nas atividades iniciais pouca articulação entre as imagens de conceito e a definição de conceito, fato esse que foi se modificando no desenvolvimento das atividades.

A dificuldade de articulação entre as imagens mentais e as representações algébricas, presentes nas primeiras atividades foi sendo superada com auxílio dos recursos manipulativos.

Assim como as demais duplas, os participantes da terceira dupla também evidenciaram a necessidade de confrontar resultados que deveriam emergir da observação das representações gráficas com dados provenientes da manipulação algébrica.

Do ponto de vista das representações semióticas, os participantes conseguiram desenvolver estratégias que permitiram tratamentos e conversões entre as representações que estavam utilizando.

Evidenciou-se nessa dupla, assim como nas demais uma evolução dos tratamentos quase intencionais para os intencionais. Os protocolos também demonstram a utilização de registros mono funcionais e multifuncionais, discursivos e/ou não discursivos, como por exemplo o raciocínio elaborado a partir de observações com deduções válidas a partir de teoremas, a utilização de sistemas simbólicos, dentre outros.

Do ponto de vista dos Três Mundos da Matemática, essa dupla não mostrou divergência das demais, ou seja, precisou recorrer inicialmente ao mundo corporificado para modelar as situações propostas nas atividades e a partir da manipulação dos materiais, apresentou características do Mundo Axiomático Formal.

Também ficaram evidenciados em seus protocolos e áudios a presença de processos mentais como visualização, representação, modelação e sintetização

Na tentativa de ilustrar o desenvolvimento das duplas durante as atividades e os componentes que sustentaram teoricamente o presente estudo, apresentamos o quadro a seguir.

	Dupla 01	Dupla 02	Dupla 03
Realização de Tratamentos	😐↗☺	☺↗☺	😐↗☺
Realização de Conversões	😐↗☺	☺↗☺	😐↗☺
Presença da Função de Objetivação	☺↗☺	☺↗☺	☺↗☺
Utilização das Regras de Conformidade	😐↗☺	☺↗☺	☺↗☺
Utilização de Registros Monofuncionais	😐↗☺	☺↗☺	☺↗☺
Utilização de Registros Multifuncionais	😐↗☺	☺↗☺	☺↗☺
Presença de Representações Congruentes	☹↗😐	😐↗☺	☹↗☺
Presença de Características do Mundo Corporificado	☺→☺	☺↗☺	☺↗☺
Presença de Características do Mundo Proceitual	😐↗☺	☺↗☺	☺↗☺
Presença de Características do Mundo Axiomático	😐→😐	😐↗☺	😐↗☺

Articulação entre as imagens de conceito e as definições de conceito	🙁↗😐	🙂↗🙂	😐↗🙂
Transição do nível verbal – espacial para o verbal – dedutivo	😐↗🙂	🙂↗🙂	😐↗🙂
Pensamento Matemático sendo por imagens concretas e deduções lógicas	😐→🙂	🙂↗🙂	🙂↗🙂
Utilização de proceitos	🙁↗😐	😐↗🙂	😐↗🙂
Utilização de Definições conceituais	🙁→😐	😐↗🙂	😐↗🙂
Capacidade de Representar	😐↗🙂	😐↗🙂	😐↗🙂
Capacidade de Visualizar	😐↗🙂	😐↗🙂	😐↗🙂
Capacidade de Modelar	🙁↗😐	😐↗🙂	😐↗🙂
Capacidade de Generalizar	🙁→🙁	😐↗🙂	😐↗🙂
Capacidade de Sintetizar	🙁↗😐	😐↗🙂	😐↗🙂

Quadro 7: Evolução das duplas participantes

Legenda:

🙂 Presente 🙁 Ausente 😐 Raramente

↗ Evoluiu durante as atividades → Manteve-se constante durante as atividades ↘ Regrediu durante as atividades

Chamou-nos a atenção o fato de que um dos participantes de uma das duplas instalou o programa que trabalhávamos em nossos computadores em seu celular e mesmo que seu companheiro de dupla não quisesse usar ele sempre utilizava.

Na busca por entendermos a validade de nossas intervenções no que se refere a motivação para estudar Cálculo a partir de uma postura investigativa e mediada pelos problemas de otimização, elaboramos um questionário que os participantes responderam após terem participado de todos os encontros propostos para a realização da pesquisa. Vale destacar que na entrevista os participantes não precisaram se identificar.

A primeira pergunta foi:

1. Durante as intervenções vocês foram apresentados a um software que permitia do traçado de gráficos, a determinação das derivadas de primeira e segunda ordem, além dos pontos de Máximos e Mínimos de Funções. Você acha que esse recurso tecnológico ajuda na construção das ideias do Cálculo? Por quê ?

Figura 214: Questão 01 da entrevista com os participantes da pesquisa

Dos 05 entrevistados, 05 afirmaram que o software ajuda na construção das ideias do Cálculo.

Três dos participantes justificaram suas respostas, pelo fato do programa escolhido ser capaz de construir gráficos que segundo um dos participantes, são impossíveis de serem traçados e com isso, o "trabalho" do estudante ficaria bastante facilitado.

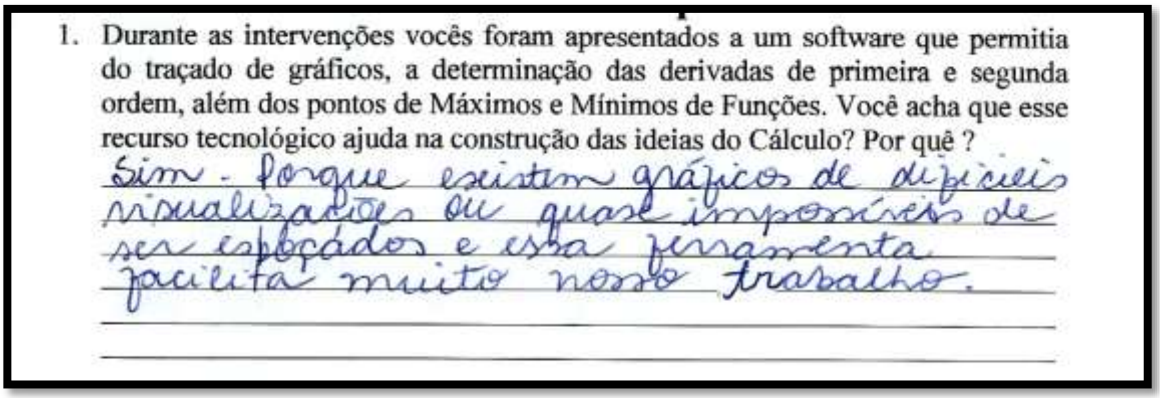
1. Durante as intervenções vocês foram apresentados a um software que permitia do traçado de gráficos, a determinação das derivadas de primeira e segunda ordem, além dos pontos de Máximos e Mínimos de Funções. Você acha que esse recurso tecnológico ajuda na construção das ideias do Cálculo? Por quê ?

Sim. Porque existem gráficos de difíceis visualizações ou quase impossíveis de ser esboçados e essa ferramenta facilita muito nosso trabalho.

Figura 215: Depoimento de um dos participantes a respeito do uso do software em aula de Cálculo

Tal opinião em relação a utilização dos recursos computacionais, foram encontrados em outros estudos e apresentados nesse trabalho em nossa revisão de literatura.

Outra resposta, que nos chamou a atenção diz respeito ao fato do software escolhido ser dinâmico. Segundo o entrevistado, a possibilidade de observar variações instantâneas no gráfico, a partir de alterações em sua equação ou em seus coeficientes, constituem um fator facilitador das ideias do Cálculo.

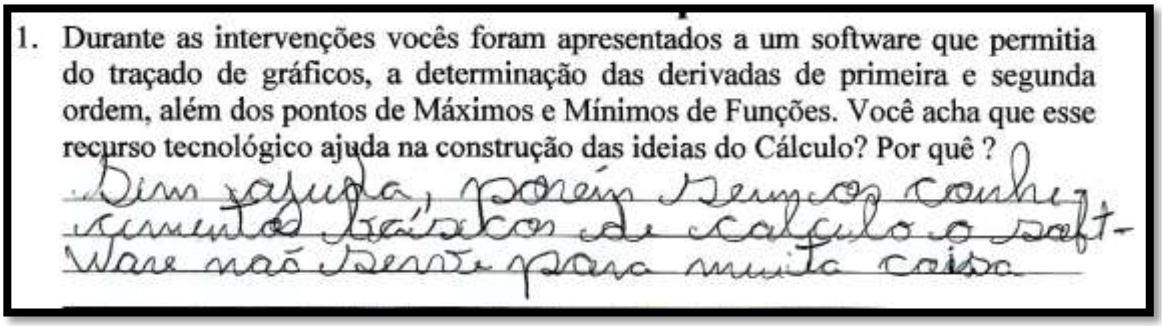

1. Durante as intervenções vocês foram apresentados a um software que permitia do traçado de gráficos, a determinação das derivadas de primeira e segunda ordem, além dos pontos de Máximos e Mínimos de Funções. Você acha que esse recurso tecnológico ajuda na construção das ideias do Cálculo? Por quê ?

Sim. Porque existem gráficos de difíceis visualizações ou quase impossíveis de ser esboçados e essa ferramenta facilita muito nosso trabalho.

Figura 216: Depoimento de um dos participantes a respeito da utilização do software e o traçado de gráficos

A respeito do aspecto dinâmico das ideias do cálculo, encontramos trabalhos como o de Rezende. Nesse sentido, também encontramos ideias como a de Baruffi, quando afirma que professor precisa valer-se de alguns recursos para que o aluno construa sua rede de significados em relação ao conceito que está sendo trabalhado como por exemplo a utilização e articulação entre a língua materna e de imagens pictóricas e as de Ferruzi, que afirmam que a tecnologia contribui para aprendizagem uma vez que tem a função de "aumentar a eficiência da atividade humana."

Ainda em relação a primeira pergunta, destacamos a seguinte resposta:


1. Durante as intervenções vocês foram apresentados a um software que permitia do traçado de gráficos, a determinação das derivadas de primeira e segunda ordem, além dos pontos de Máximos e Mínimos de Funções. Você acha que esse recurso tecnológico ajuda na construção das ideias do Cálculo? Por quê ?

Sim ajuda, porém sem os conhecimentos básicos de cálculo o software não serve para muita coisa

Figura 217: Resposta de um dos participantes em relação ao uso da tecnologia e as ideias do Cálculo

Com essa resposta, retificamos nossa opção metodológica em apresentar problemas onde apenas o recurso tecnológico não seria uma ferramenta plenamente eficaz.

Embora a maioria dos estudos envolvendo o uso da tecnologia no ensino de Cálculo apontem para as vantagens da utilização dessa ferramenta, tomamos o cuidado em propor situações onde , ficasse evidente a importância da fusão entre a tecnologia e o conhecimento matemático.

Na segunda questão, estávamos interessados em investigar so os problemas de otimização contribuem para o gosto no estudo do Cálculo.

2. Na maioria das atividades propostas nas intervenções, vocês foram apresentados a problemas de otimização. Na sua opinião os problemas de otimização contribuem para despertar no aluno uma curiosidade ou gosto pelo estudo do Cálculo Diferencial? Por quê ?

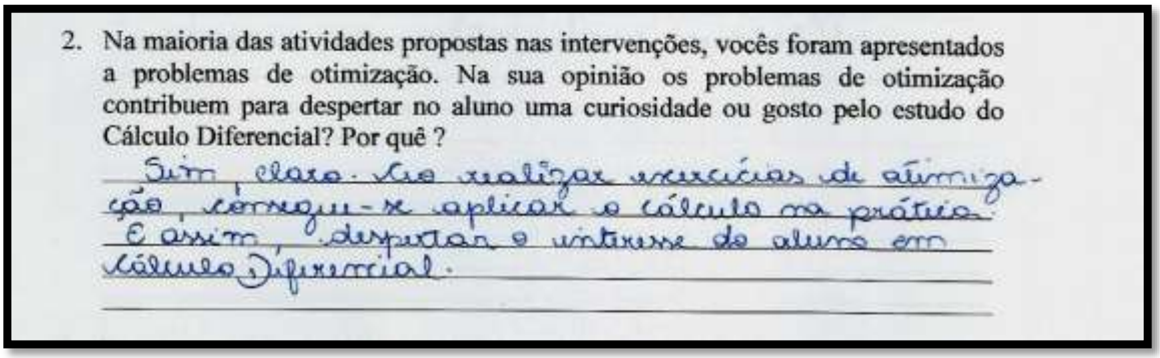
Figura 218: Questão 02 da entrevista com os participantes da pesquisa

Todos os entrevistados responderam que sim, porém as justificativas se enquadraram em duas categorias. Três dos 5 entrevistados, justificaram se sentir motivados pelos problemas de otimização pelo fato deles serem aplicados em vários campos, possibilitando assim uma maior aplicação daquilo que se está estudando.

2. Na maioria das atividades propostas nas intervenções, vocês foram apresentados a problemas de otimização. Na sua opinião os problemas de otimização contribuem para despertar no aluno uma curiosidade ou gosto pelo estudo do Cálculo Diferencial? Por quê ?

Sim desperta pois é um ramo
que abrange vários assuntos de
Cálculo, fazendo com que aumente o
campo de estudo, englobando
vários assuntos

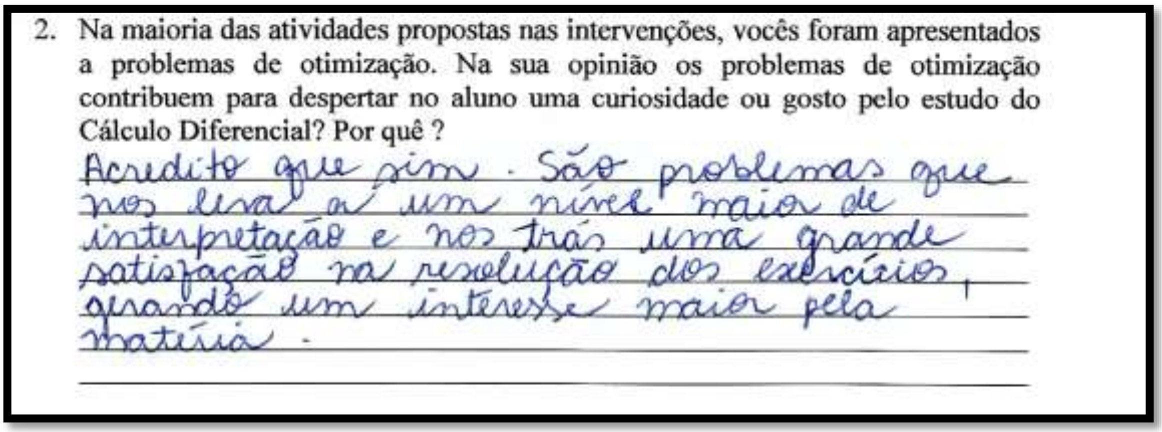
Figura 219: Resposta de um dos participantes a respeito da possibilidade de motivação em estudar Cálculo Diferencial, motivado pelos problemas de otimização


2. Na maioria das atividades propostas nas intervenções, vocês foram apresentados a problemas de otimização. Na sua opinião os problemas de otimização contribuem para despertar no aluno uma curiosidade ou gosto pelo estudo do Cálculo Diferencial? Por quê ?

Sim, claro. Ao realizar exercícios de otimização, consegue-se aplicar o cálculo na prática. E assim, despertar o interesse do aluno em Cálculo Diferencial.

Figura 220: Resposta de um dos participantes a respeito da possibilidade de motivação em estudar Cálculo Diferencial, motivado pelos problemas de otimização

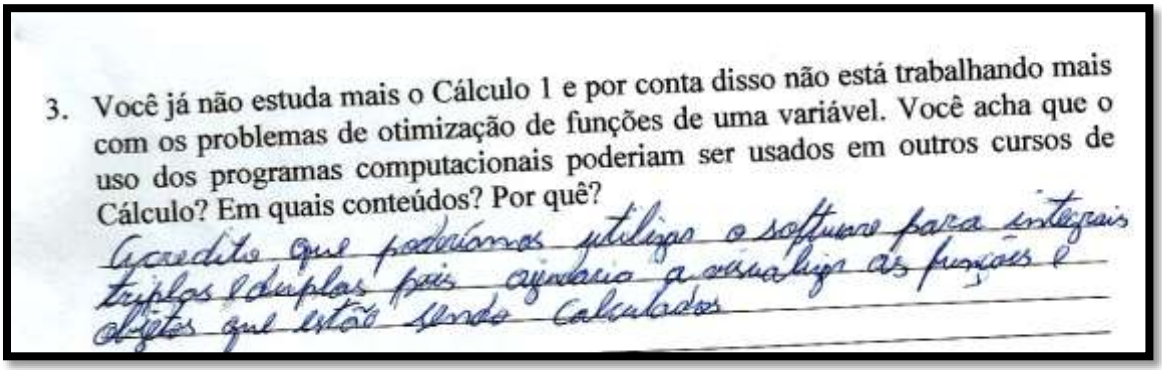
Outros dois entrevistados, justificaram sua motivação pelos problemas de otimização pela ampliação na capacidade de interpretar e pela satisfação que eles provocam no estudante, quando resolvem os exercícios., como ilustra a figura 229.


2. Na maioria das atividades propostas nas intervenções, vocês foram apresentados a problemas de otimização. Na sua opinião os problemas de otimização contribuem para despertar no aluno uma curiosidade ou gosto pelo estudo do Cálculo Diferencial? Por quê ?

Acredito que sim. São problemas que nos leva a um nível maior de interpretação e nos trás uma grande satisfação na resolução dos exercícios, gerando um interesse maior pela matéria.

Figura 221: Resposta da questão 02 enfatizando a satisfação decorrente do sucesso em resolver os problemas propostos

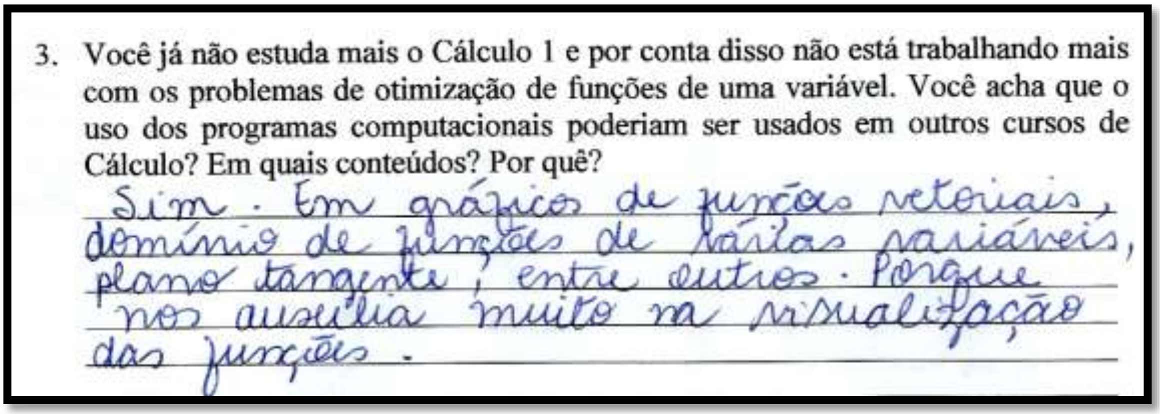
Quando perguntados a respeito das possibilidades da utilização do software em situações diferentes das apresentadas a eles nas intervenções, todos os participantes, afirmaram que seria proveitoso no estudo das funções de várias variáveis e vetoriais especialmente no estudo dos planos tangentes e das integrais múltiplas, como ilustram as figuras 230 e 231



3. Você já não estuda mais o Cálculo 1 e por conta disso não está trabalhando mais com os problemas de otimização de funções de uma variável. Você acha que o uso dos programas computacionais poderiam ser usados em outros cursos de Cálculo? Em quais conteúdos? Por quê?

Acredito que poderíamos utilizar o software para integrais triplas e duplas pois ajudaria a visualizar as funções e objetos que estão sendo calculados

Figura 222: Opinião de um dos participantes a respeito das possibilidades de utilização do software em outros conteúdos do Cálculo Diferencial e Integral

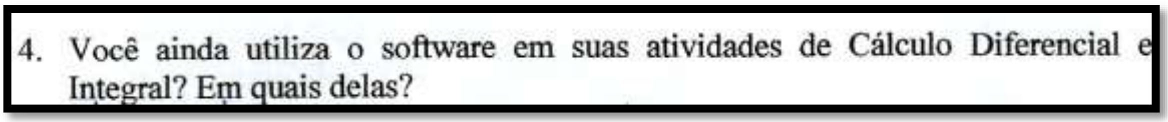


3. Você já não estuda mais o Cálculo 1 e por conta disso não está trabalhando mais com os problemas de otimização de funções de uma variável. Você acha que o uso dos programas computacionais poderiam ser usados em outros cursos de Cálculo? Em quais conteúdos? Por quê?

Sim. Em gráficos de funções vetoriais, domínio de funções de várias variáveis, plano tangente, entre outros. Porque nos auxilia muito na visualização das funções.

Figura 223: Opinião de um dos participantes a respeito das possibilidades de utilização do software em outros conteúdos do Cálculo Diferencial e Integral

A quarta pergunta do questionário foi:



4. Você ainda utiliza o software em suas atividades de Cálculo Diferencial e Integral? Em quais delas?

Figura 224: Questão 04 da entrevista aos participantes da pesquisa

Dos cinco alunos entrevistados, 03 dizem que ainda utilizam o programa todas as vezes que necessitam representar graficamente uma função que não lhes é familiar.

Uma das alternativas metodológicas desse estudo foi a utilização de recursos aparentemente contraditórios, como papel, tesoura e um software de geometria dinâmica. Nesse sentido, perguntamos:

5. Em alguns momentos das atividades da intervenção, vocês participantes, valeram-se de materiais manipuláveis como por exemplo: papel, barbante, tesoura, régua, etc. Qual a importância desse material durante a execução das suas atividades?

Figura 225: Questão 05 da entrevista feita aos participantes da pesquisa

Todos os participantes entrevistados, afirmaram ter sido muito importante a utilização do material concreto.

Se partirmos do pressuposto que, no indivíduo, o crescimento cognitivo do pensamento matemático elementar para o avançado se faz partindo da 'percepção de' objetos do mundo exterior e da 'ação sobre' esses mesmos objetos e construindo estruturas de conhecimento segundo dois desenvolvimentos completamente distintos mas que ocorrem ao mesmo tempo, sermos levados e constatar a importância da ação sobre os objetos e da visualização no processo de construção de conceitos matemáticos.

Nesse sentido ,Dreyfus (1991), nos afirma que a Visualização é um processo pelo qual as representações mentais ganham existência e um dos componentes responsáveis pela construção de conceitos matemáticos além de ser um dos processos mentais envolvidos no pensamento matemático avançado.

Das justificativas apresentadas pelos participantes dessa entrevista em relação a importância do material concreto, todos afirmaram que a manipulação do material concreto foi responsável pela visualização das situações propostas, como demonstrado nas figuras 234 e 235.

5. Em alguns momentos das atividades da intervenção, vocês participantes, valeram-se de materiais manipuláveis como por exemplo: papel, barbante, tesoura, régua, etc. Qual a importância desse material durante a execução das suas atividades?

Foram muito importantes para a visualização do problema.

Figura 226: Resposta dada por um dos participantes a respeito do uso de materiais manipuláveis durante as intervenções

5. Em alguns momentos das atividades da intervenção, vocês participantes, valeram-se de materiais manipuláveis como por exemplo: papel, barbante, tesoura, régua, etc. Qual a importância desse material durante a execução das suas atividades?

Os materiais foram importantes para a visualização dos objetos a serem calculados.

Figura 227 Resposta dada por um dos participantes a respeito do uso de materiais manipuláveis durante as intervenções

A última pergunta era uma pergunta aberta, onde pretendíamos investigar o grau de satisfação dos participantes em participar do estudo.

Os participantes mostram-se satisfeitos em participar do estudo mesmo tendo que estar na faculdade em horários que não eram de aula, uma vez que os encontros aconteceram majoritariamente nos sábados.

6. Esse espaço é destinado a comentários relativos a sua participação na pesquisa.

Foi uma experiência muito construtiva e mesmo sendo a parte das aulas da faculdade, me ajudou muito no entendimento da matéria.

Figura 228: Depoimento do participante a respeito de sua satisfação em ter participado da pesquisa

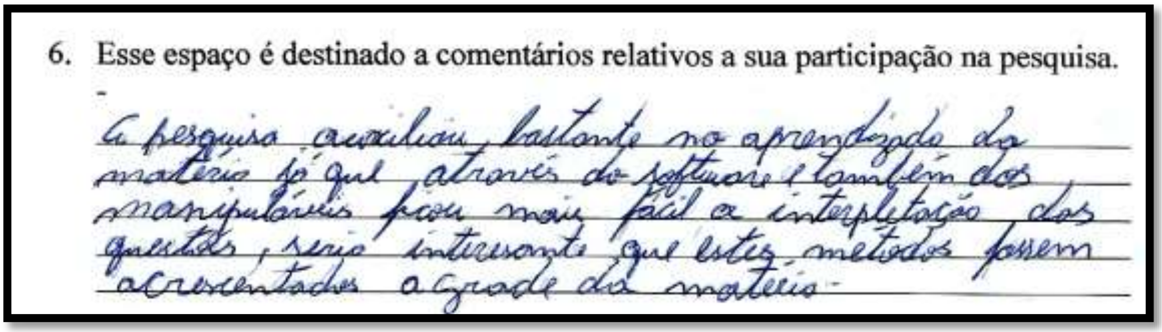
Um dos participantes, destaca a importância do trabalho ao fato dele poder trabalhar com problemas de otimização, o que na opinião do entrevistado , foi uma oportunidade de tornar o trabalho com Cálculo um trabalho mais real uma vez que promoveu uma aproximação com problemas da realidade.

6. Esse espaço é destinado a comentários relativos a sua participação na pesquisa.

Gostei muito de participar. Tive a oportunidade de resolver problemas de otimização envolvendo cálculo, de maneira bem real, se aproximando bastantes de problemas relacionados ao dia a dia de uma profissão de engenheiro.

Figura 229:Depoimento do participante a respeito de sua satisfação em ter participado da pesquisa

Outra entrevista que destacamos justifica a importância pela articulação entre os recursos computacionais e os manipuláveis como agente facilitador da aprendizagem.


6. Esse espaço é destinado a comentários relativos a sua participação na pesquisa.

A pesquisa auxiliou bastante no aprendizado da matéria já que através do software e também dos manipuláveis ficou mais fácil a interpletação das questões, seria interessante que estes metodos fossem acrescentados a grade da materia.

Figura 230:Depoimento do participante a respeito de sua satisfação em ter participado da pesquisa

Destacamos ainda, a observação do participante em sugerir à inclusão desses “métodos” de ensino a grade de matérias que ele cursa.

Durante todo o desenvolver das intervenções, percebemos a utilização das representações como ponto de partida para todas as atividades propostas. Nesse sentido, a análise dos protocolos ilustra uma evolução a respeito das representações desenvolvidas por todos os participantes. De forma geral, observamos uma evolução nos tratamentos e conversões aplicadas ao longo das atividades propostas, pautadas pela evolução das regras de conformidade utilizadas pelos participantes ao longo do estudo. As representações que incialmente apresentavam pouca congruência foram se sofisticando e evoluindo.

Um traço bastante forte no desenvolver dos participantes do presente estudo, diz respeito aos aspectos cognitivos mobilizados. Em nossa hipótese inicial, os artifícios computacionais ocupariam um local no centro de interesse dos participantes, uma vez que são alunos de engenharia e que possuem contato com softwares em suas aulas nas disciplinas específicas do curso. Porém, o que realmente encontramos foram fortes traços do Mundo Corporificado, que ao “caminhar” sobre cada atividade iam possibilitando aos participantes, um desencadeamento de pensamento que os conduzia ao Mundo Proceitual. Caraterísticas do Mundo Axiomático formal também foram evidenciadas, mas sempre a partir das características do Mundo Corporificado.

Detectamos também uma evolução na articulação entre as imagens de conceitos e as definições de conceito, sempre mediadas pela ação sobre os objetos de estudo, seja por meio dos objetos manipuláveis, seja pela utilização do software usado nas atividades, com isso evidenciou-se também uma transição do nível verbal espacial para o verbal dedutivo, por meio de deduções lógicas.

Os protocolos também evidenciam um avanço bastante significativo nas capacidades de representar, modelar, generalizar e modelar dos participantes.

As análises apresentadas no escopo desse capítulo nos forneceram subsídios para responder à questão central do nosso estudo, que é o de identificar os aspectos cognitivos e conceituais mobilizados na resolução de problemas de otimização por estudantes de engenharia, além de mostrar como as duplas evoluíram ao longo das intervenções.

Capítulo 07

Considerações Finais

Apresentamos reflexões sobre o caminhar e resultados desse estudo, levando em consideração as questões que orientaram essa pesquisa e as perspectivas teóricas das Três Mundos da Matemática, da Teoria do Pensamento Matemático Avançado e da Teoria das Representações Semióticas.

Consideramos que o desenvolvimento dessa pesquisa se justificou por acreditarmos na relevância do tema abordado e que uma possível alternativa para despertar o gosto pelo estudo nos estudantes de Cálculo I seria a apresentação de uma proposta de ensino que despertasse neles o espírito investigativo. Também justificamos a importância do tema por acreditarmos que entender como os alunos constroem e dão significados a um conceito matemático pode funcionar como agente facilitador da ação do professor no momento de optar por suas escolhas metodológicas.

A revisão de literatura e a nossa experiência como professor de Cálculo nos mostraram, pelo menos em parte, o cenário que existia no ensino e na aprendizagem de problemas de otimização e nos subsidiaram na elaboração das tarefas.

Como já dissemos no momento da revisão da literatura, é importante destacar que a abordagem proposta no presente trabalho não foi encontrada na literatura, e, sendo assim, optamos por apresentar na revisão de literatura estudos das dificuldades relacionadas ao processo de ensino e aprendizagem do Cálculo e ao uso da tecnologia no ensino do Cálculo. Tais estudos foram importantes, pois nos permitiram pensar em como conduzir a pesquisa, que categorias de análises poderiam ser levantadas, quais os referenciais teóricos estavam sendo utilizados quando se investiga o ensino e a aprendizagem de Cálculo.

A partir das reflexões presentes nos textos pudemos repensar nossa intervenção. Valemo-nos das ideias defendidas por Rezende (2003) para propor situações que contemplassem os aspectos que compõem o campo dual global/local por meio de questões que discutissem os máximos e mínimos locais e globais.

Segundo Barufi (1999), o professor precisa valer-se de alguns recursos para que o aluno construa sua rede de significados em relação ao conceito que está sendo trabalhado. Nesse mesmo sentido de construção de significados, encontramos também, em nossa revisão, pesquisas como Reis (2001), Trigueros e Escandón (2008).

Como nos afirma Baruffi, os trabalhos em grupo – por conta da interação entre os elementos - e atividades que se valem da utilização da língua materna e de imagens pictóricas são ideais para que os alunos dotem de significado o objeto com o qual está trabalhando. Tal hipótese também foi identificada e ratificada por este estudo. A interação entre os participantes de cada dupla foi um fator importante, pois a partir dela detectamos construções de novas imagens de conceito, além do desenvolvimento da capacidade de generalização.

Outra ideia defendida por Baruffi e ratificada em nosso estudo diz respeito à forma como é conduzido o trabalho com o Cálculo. Para ela, as atividades normalmente acabam por conduzir os alunos à memorização, e uma forma de romper essa visão, seria levar os estudantes, via ferramentas do Cálculo, a resolverem problemas "reais, importantes e seus". No presente estudo, durante o contato com os problemas de otimização e motivados pelo espírito investigativo, os participantes desenvolveram as atividades de forma prazerosa e o objeto matemático passou a ter um significado para além dos procedimentos algébricos.

Do mesmo modo que Trigueros e Escandón (2008) afirmam que os alunos possuem dificuldades em compreender conceitos do Cálculo Diferencial e que, os obstáculos estão em integrar diferentes conceitos do Cálculo para resolver determinadas situações, também encontramos em nossa pesquisa situações nas quais os alunos dispunham de um conjunto de definições e imagens de conceitos, mas não sabiam onde utilizar, ou seja, situações em que conceitos já conhecidos poderiam ser utilizados. Dentre as várias situações, podemos citar aqui o fato de um dos participantes ter pensado em, inicialmente, resolver uma questão de área por meio de uma integral.

As ideias defendidas por esses pesquisadores em seus trabalhos foram contempladas em nossa sequência de atividades, uma vez que nos preocupamos em elaborar um conjunto de situações problematizadoras para que o aluno pudesse estabelecer articulações entre as informações que estavam sendo trabalhadas e, os conceitos que buscávamos construir. Pautamo-nos ainda no espírito investigativo do estudante, para que assim ele se sentisse desafiado e “provocado”, tornando-se assim motivado e disposto a desenvolver o trabalho matemático a proposto.

Do ponto de vista do uso da tecnologia no ensino de Cálculo, valemo-nos das ideias defendidas por Heid (1988), Artigue (1991), Palmiter (1991), Miskulin (1999), Menk (2005), Olímpio Junior (2006), Barbosa (2009), Escher (2011) e Vieira (2013). Embora os objetos do Cálculo pesquisados por cada um deles não tenham sido os mesmos, todos os trabalhos citados convergiam para o fato de que o uso da tecnologia contribui para o processo de ensino e aprendizagem do cálculo de maneira bastante eficaz, em especial, por desviar o foco do aluno dos procedimentos algébricos para os aspectos conceituais.

Outro ponto em que os pesquisadores retromencionados concordam é com as possibilidades de visualização propiciada pelos programas computacionais elemento importante para a atividade matemática. Dessa forma optamos por inserir em nossa sequência de ensino um conjunto de atividades que pudessem e devessem ser resolvidas em ambientes computacionais por concordarmos com os fatores que acabamos de apresentar.

Os participantes deste estudo também se valeram dos recursos computacionais e obtiveram êxito em sua utilização, mas essa familiaridade não foi um processo tão facilmente atingido, como veremos mais adiante.

A análise dos livros-texto de Cálculo adotados pela universidade onde se desenvolveu a pesquisa mostrou uma evolução na forma de tratar os problemas de otimização. Enquanto os livros com edições mais antigas primavam pelas definições formais e o uso predominante de procedimentos algébricos, versões mais atuais continuam a manter o rigor conceitual, mas já promovem uma articulação entre procedimentos algébricos e recursos computacionais, na busca pela promoção do desenvolvimento do espírito investigativo nos estudantes de Cálculo.

A entrevista feita com professores de Cálculo sinalizou que embora estejam conscientes da importância do trabalho com os problemas de otimização, os professores entrevistados afirmaram que o tempo destinado aos conteúdos em seus planos de ensino não favorecem uma nova forma de metodologia de ensino. Tal postura for corroborada quando analisamos as respostas dos professores no que se refere aos recursos que utilizam durante suas aulas. Encontramos majoritariamente a utilização dos livros-texto, listas e exercícios e a utilização de calculadoras científicas.

O depoimento dos professores foi ratificado pelos alunos entrevistados, que confirmaram que nunca haviam utilizado softwares de geometria dinâmica nas aulas de Cálculo.

A metodologia adotada, o Design Experiment, permitiu o redesenho cíclico das tarefas, sempre que identificávamos, por meio das análises parciais dos resultados, que alguma ideia precisava ser retomada com outros exemplos, com outro enfoque ou estratégia para provocar uma maior reflexão dos alunos. Tal fato ficou evidenciado quando percebemos durante a primeira intervenção, que os participantes da pesquisa tinham suas estratégias de resolução, prioritariamente apoiadas na manipulação física de objetos, nas imagens produzidas por essas manipulações além de situações mentais construídas pela percepção e observações que efetuaram sobre o objeto, características essas do Mundo Corporificado.

Assim sendo, pudemos redesenhar o Design inicial, modificar as atividades que compunham o projeto-piloto além de complementarmos o quadro teórico com a inserção da teoria dos Três Mundos da Matemática. Ou seja, foi através da iteratividade e do caráter cíclico do Design que pudemos remodelar as atividades, promovendo assim, ao longo das intervenções, uma transição entre os Três Mundos da Matemática e o Pensamento Matemático Avançado, como proposto por Tall.

Como já dissemos ao longo do trabalho, o objetivo geral do presente estudo foi o de investigar os aspectos cognitivos e conceituais mobilizados na resolução de problemas de otimização por estudantes de engenharia. Para guiar nossos estudos, elaboramos as questões de pesquisa, que procuraremos responder a seguir.

A primeira questão que nos propusemos a responder foi:

Quais os aspectos cognitivos e conceituais mobilizados na resolução de problemas de otimização por estudantes de engenharia?

Durante todo o desenvolver das intervenções, percebemos a utilização das representações como ponto de partida para todas as atividades propostas, seguidas pela modelagem e intermediada pela utilização dos recursos manipulativos.

Como já dissemos no capítulo 06, as representações que inicialmente apresentavam pouca congruência foram se sofisticando e evoluindo. Ficou também, fortemente evidenciada a articulação entre os Mundos Corporificado, Proceitual e Axiomático de Tall, além do desenvolvimento das capacidades de modelar, representar e generalizar. A articulação entre as imagens de conceito e sua definição, também constituem aspectos cognitivos bastante presente em nosso estudo.

A segunda questão buscava verificar quais as estratégias utilizadas pelos alunos no momento da construção do conceito de ponto de máximo e/ou mínimo de uma função de uma variável real?

A análise dos protocolos produzidos ao longo da intervenção evidenciou que inicialmente os participantes valiam-se das características do mundo corporificado para modelarem a questão proposta, e o recurso ao material concreto foi marcante para a continuidade da resolução dos problemas. Nesse momento, tornou-se observável o fato de que os símbolos que estavam sendo empregados pelos participantes representavam o significado dado, tanto aos conceitos pensáveis quanto às ações que por eles haviam sido efetuadas, ou seja, emergiam nesse momento os proceitos, caracterizando assim o Mundo Proceitual Simbólico. Ao longo das atividades, os participantes trabalharam com um vasto conjunto de representações que foram se refinando, e tornando-se cada vez mais eficazes tanto que se refere às conversões quanto aos tratamentos feitos.

Destacamos também que durante a execução da sequência de ensino, por variadas vezes, os participantes propuseram deduções, valeram-se de definições formais, o que explicita características do Mundo Axiomático Formal.

No que tange ao nível de pensamento, ficou observável, por meio da análise longitudinal do desempenho dos participantes, o crescimento deles na transição do pensamento matemático Elementar para o Avançado uma vez que durante o desenrolar das atividades ou mesmo no desenrolar de cada uma das atividades, encontrávamos situações em que os participantes, inicialmente, estavam descrevendo para se convencer ou para convencer o seu colega de dupla. Mas durante ou ao final da situação, já estava valendo-se de definições formais e a partir dessas definições faziam afirmações lógicas, o que caracteriza uma evolução do pensamento matemático elementar para o avançado.

A terceira questão que norteou o estudo foi:

Como os alunos interagem frente às diferentes alternativas de resolução dos problemas oferecidos pela sequência de ensino, a saber: calculadoras, esboço de gráficos, técnicas operatórias, uso de softwares?

Indistintamente, os participantes incialmente foram refratários à utilização de cenários que não fossem o do papel e lápis. Por conta do design da pesquisa, algumas das questões propostas não poderiam ser resolvidas restritas a esse ambiente, o que os "forçou" a experimentarem possibilidades de alternativas de resolução.

Quando utilizavam o ambiente computacional, em boa parte das vezes, encontramos nos protocolos tentativas de validar os resultados encontrados naquele ambiente por meio de procedimentos algébricos. Tal tentativa era justificada pelos participantes como sendo uma busca pela certeza de que os resultados estavam corretos. No desenrolar da intervenção, observamos uma maior familiarização dos participantes com o software escolhido, com suas potencialidades e ferramentas.

Como já dito no escopo desse trabalho, tínhamos como objetivo despertar no participante a importância entre a articulação entre os vários cenários. Sendo assim, também propusemos situações na qual a manipulação da representação gráfica da função modelada não fornecia as informações necessárias para otimizar a situação proposta, conduzindo, dessa forma, os participantes a estabelecerem uma relação de complementaridade entre os cenários computacionais e o cenário que chamamos de papel e lápis. Os áudios das últimas atividades propostas já evidenciavam essa articulação, uma vez que as resoluções transitavam entre os cenários. Os alunos, pelas suas interações nos ambientes computacionais, na utilização dos materiais manipuláveis, e nas possibilidades de diálogo entre si, nos ofereceram um rico material de pesquisa sobre funções, derivadas e otimização.

Dessa forma, estamos cientes de que o que apresentamos neste estudo não foi apenas uma radiografia de como se encontra o trabalho com problemas de otimização, nem mesmo como são abordados os pontos de máximo e mínimo de uma função de uma variável real nos livros didáticos presentes na ementa da universidade onde se desenvolveu a pesquisa.

Apresentamos uma possibilidade de articulação entre alguns cenários nos quais podemos desenvolver o espírito investigativo dos alunos, no que se refere ao comportamento das funções ao longo do seu domínio e das situações que envolvem as representações e modelação de situações que busquem encontrar o que chamamos de “situação ótima”, ou seja, encontrar a melhor alternativa de resposta, com o propósito de alcançar os objetivos determinados pela situação-problema que nos foi proposta.

Produzimos um conjunto de atividades que propiciou e evidenciou o crescimento dos participantes a respeito da temática proposta, permitiu a articulação entre os Três Mundos da Matemática, promoveu um enriquecimento de imagens mentais e de aspetos preceituais nos participantes. Atrelado a tudo isso, percebemos a satisfação com que os participantes de forma colaborativa discutiam as atividades propostas, utilizavam os vários recursos disponíveis para resolver cada questão, como conjecturavam, testavam e validavam suas hipóteses, refaziam procedimentos e por fim generalizavam a situação.

Na busca por responder se uma proposta de ensino de funções baseada em problemas de otimização é capaz de despertar no aluno o gosto e interesse pelo estudo do Cálculo Diferencial, optamos por entrevistar os participantes da pesquisa após a sua execução, como já descrito no capítulo 06.

As entrevistas nos mostram que os nossos cenários de pesquisa propiciaram a eles oportunidade de reflexão e participação em uma atividade colaborativa de aprendizagem. A análise das entrevistas ratificou nossa hipótese inicial a respeito da funcionalidade da proposta no que tange à motivação para o estudo do Cálculo. Ler nas respostas das entrevistas que esse “método de ensino” deveria ser incorporado às outras disciplinas do curso, que a manipulação de materiais permitiu que as imagens mentais fossem construídas e que com essa nova forma de trabalho proporcionou interesse e satisfações nas atividades de Cálculo confirmam que metodologicamente estávamos no caminho certo.

Devemos ratificar que o objetivo inicial do presente estudo foi analisar o processo de construção de pontos críticos de uma função de uma variável real e que esse objetivo foi reconfigurado a partir da implementação da sequência de atividades.

Nesse sentido, optamos por investigar situações que contemplassem apenas os pontos de Máximo e Mínimo e acabamos por nos afastar do estudo da concavidade e por consequência dos pontos de inflexão. Sendo assim, uma possiblidade de aprofundamento e continuidade desse estudo, seria pensar a construção do conceito de ponto de inflexão por meio dos problemas de otimização e, a partir desse estudo, verificar quais são as estratégias e que aspectos cognitivos e conceituais serão mobilizados e ainda, se haverá uma articulação entre as derivadas de segunda ordem e o ponto de inflexão.

Por fim, esperamos que esta pesquisa contribua para uma reflexão sobre a importância da articulação entre os vários cenários de possibilidades do trabalho com problemas de otimização, pois nossa experiência evidenciou que a articulação entre eles pode fornecer a professores e alunos mudanças no ato de ensinar e aprender conceitos relativos ao Cálculo Diferencial.

Referências

A.Orton. (Agosto de 1983). Student's Understanding of Diferentiation. *Educational Studies in Mathematics*, pp. 235-250.

Almeida, T. (2019). *Sólidos Arquimedianos e Cabri-3D: um estudo de truncaturas baseadas no renascimento.* Sao Paulo: PUC.

Araújo, J. d. (2002). *CÁLCULO, TECNOLOGIAS E MODELAGEM MATEMÁTICA: AS DISCUSSÕES DOS ALUNOS.*Rio Claro: UNESP.

Artigue, M. (1991). Didactic engineering, research and development tool: some theoretical problems linked to this duality. *For the Learning of Mathematics*, p. 18.

Artigue, M. (1995). La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. In: P. Gómez, *INGENIERÍA DIDÁCTICA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA* (pp. 97-140). Bogotá: Grupo Editorial Iberoamérica.

ARTIGUE, M., & Perrim, M. G. (1991). Didactic engineering, research and development tool:some theoretical problems linked to this duality. *For the Learning of Mathematics*, 13-18.

BIANCHINI, B., & PUGA, L. Z. (2006). Função:Diagnosticando Registros de Representação Semiótica. *REFREMAT - Revista Eletrônica de Republicação em Educação Matemática*, 5-16.

Brabosa, S. M. (2009). *Tecnologias da informação e comunicação, função composta e regra de cadeia* . Rio Claro: UNESP.

Cury, H. N. (2002). COBENGE e ensino de disciplinas matemáticas nas Engenharias: um retrospecto dos últimos dez anos. *COBENGE* (p. 15). Piracicaba: Unimep.

Damm, R. (1999). Registros de Representação. *Educação Matemática: uma introdução EDUC*.

Domingos, A. (2003). *Compreensão de conceitos matemáticos avançados – a matemática no ensino Superior, Tese de Doutorado.* Lisboa: Faculdade de Ciências eTecnologias, Universidade Nova Lisboa.

DOMINGOS, A. M. (2003). *COMPREENSÃO DE CONCEITOS MATEMÁTICOS AVANÇADOS – A MATEMÁTICA NO INÍCIO DO SUPERIOR.* Lisboa: Universidade Nova de Lisboa.

Dreyfus, T. (1991). Advanced mathematical thinking processes. In: D. Tall, *Advanced mathematical thinking* (pp. 25-41). Mathematics Education Library.

Dreyfus, T. (2002). Advanced Mathematical Thinking Processes. In: D. Tall, *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 25-41). Kluwer Academic Publishers.

Duval, R. (2000). Basic Issues for Research in Mathematics Education. *PME* (pp. 452-458). Hiroshima: University of Hiroshima. .

Duval, R. (2003). Registros de Representações Semióticas e Funcionamento Cognitivo da Compreensão em Matemática. In: S. D. MACHADO, *Aprendizagem em Matemática: Registros de Representação Semiótica* (pp. 11-34). Campinas: Papirus.

Duval, R. (2003). Registros de Representações Semióticas e Funcionamento Cognitivo daCompreensão em Matemática. In: S. D. MACHADO, *Aprendizagem em Matemática: Registros de Representação Semiótica* (pp. 11-34). Campinas: Editora Papirus.

Duval, R. (2004). *Les problemas fundamentales en el aprendizaje matemáticas y las formas superiores en el desarrollo cognitivo.* Cali: Universidade del Vale.

Duval, R. (2009). *Semiósis e Pensamento Humano: registros semióticos e aprendizagens intelectuais.* São Paulo: Livraria da Física.

Duval, R. (2011). *VER E ENSINAR A MATEMÁTICA DE OUTRA FORMA - ENTRAR NO MODO MATEMÁTICO DE PENSAR: OS REGISTROS DE REPRESENTAÇÕES SEMIÓTICAS.* São Paulo: PROEM.

Duval, R. (2012). Diferenças semânticas e coerência matemática: introdução aos problemas de congruência. *Revista Eletrônica de Educação Matemática*, 97-117.

Escarlate, A. d. (2008). *Uma investigação sobre a aprendizagem de integral.* Rio de Janeiro: UFRJ.

ESCHER, M. A. (2011). *Dimensões Teórico-Metodológicas do Cálculo Diferencial e Integral: perspectivas histórica e de ensino e aprendizagem .* Rio Claro: UNESP.

Ferruzi.E.C. (2003). *A Modelagem Matemática como estratégia de ensino e aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral nos Cursos Superiores de Tecnologia.* Santa Catarina: UFSC.

FRANCHI, R. H. (2007). *Ambientes de aprendizagem fundamentados na Modelagem Matemática e Informática como possibilidades para a Educação Matemática.* Recife : SBEM.

FROTA, M. C. (2001). Duas abordagens distintas da estratégia de resolução de exercícios no estudo de Cálculo. *Educação Matemática: a prática educativa sob o olhar de professores de Cálculo*.

G., M. T., & Escandón M., Covadonga. (2008). Los conceptos relevantes en el aprendizaje de la graficación: un análisis a través de la estadística implicativa. *Revista Mexicana de Investigación Educativa*, 59-85.

García, G., Balnco, M. G., & Salvador, L. C. (2006). El desarrollo del esquema de derivada. *Enseñanza de las Ciencias*, 85-98.

GARZELLA, F. A. (2013). *A disciplina de Cálculo I: a análise das relações entre as práticas pedagógicas do professor e seus impactos nos alunos.* Campinas, SP: UNICAMP.

GARZELLA, F. A. (2013). *A DISCIPLINA DE CÁLCULO I: ANÁLISE DAS RELAÇÕES ENTRE AS PRÁTICAS PEDAGÓGICAS DO PROFESSOR E SEUS IMPACTOS NOS ALUNOS.* Campinas: UNICAMP.

Gereti, L. C., & Savioli, A. P. (Abril de 2015). Processos do Pensamento Matemático Avançado Evidenciados em resolução de questões do ENADE. *Bolema*, pp. 206-222.

Gravina, M., & Santarosa, L. (1999). A aprendizagem de matemática em ambientes informatizados. *Informática na Educação Teoria e Prática*.

Heid, K. M. (1988). Resequencing Skills and Concepts in Applied Calculus Using the Computer as a Tool. *Journal for Research in Mathematics Education*, 3-25.

Igliori, S. B., & Marini, W. (s.d.). Aspectos Epistemológicos da Aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral: um panorama sobre dissertações, teses e artigos. *EBRAPEM*, (p. 19).

Junior, A. O. (2006). *COMPREENSÕES DE CONCEITOS DE CÁLCULO DIFERENCIAL NO PRIMEIRO ANO DE MATEMÁTICA — UMA ABORDAGEM INTEGRANDO ORALIDADE, ESCRITA E INFORMÁTICA .* Rio Claro: UNESP.

KARRER, M. (2006). *ARTICULAÇÃO ENTRE ÁLGEBRA LINEAR E GEOMETRIA. UM ESTUDO SOBRE AS TRANSFORMAÇÕES LINEARES NA PERSPECTIVA DOS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA.* São Paulo: PUC.

Laudares, J. B., & Miranda, D. F. (2007). Informatização no Ensino da Matemática: investindo no ambiente de aprendizagem. *ZETETIKÉ*, 71-88.

Libâneo, J. (1989). *Democratização da escola pública: a pedagogia crítica social dos conteúdos.* São Paulo: Loyola.

Lima. (2007). Equações Algébricas no Ensino Médio: uma jornada por diferentes mundos da Matemática. *Tese de Doutorado - PUC/SP*, p. 358.

Machado, S. (2008). *Teoria das Situações Didáticas.* São Paulo: EDUC (Série trilhas).

Mello, M. H. (2007). REFLEXÕES SOBRE O ENSINO DE CÁLCULO . *COBEMG*, (p. 4).

Miskulin, R. G. (1999). *CONCEPÇÕES TEÓRICO-METODOLÓGICAS SOBRE A INTRODUÇÃO E A UTILIZAÇÃO DE COMPUTADORES NO PROCESSO ENSINO/APRENDIZAGEM DA GEOMETRIA.* Campinas: UNICAMP.

Oliveira, L. (2004). Reflexões sobre os desafios da educação superior. *Revista da Faculdade de Ciências Econômicas, Contábeis e de Administração de empresas Padre Anchieta*, 25-32.

Palmiter, J. (1991). Effects of a computer algebra system on concept and skill acquisition in calculus. *Journal for Research in Mathematics Education*, 151-156.

PEIRCE, C. S. (2000). *Semiótica.*São Paulo: Perspectiva.

Reis, F. d. (2001). *A Tensão entre Rigor e Intuição no Ensino de Cálculo e Análise: A Visão de Professores-Pesquisadores e Autores de Livros Didáticos.* Campinas: UNICAMP.

Rezende, W. M. (2003). *O ensino de cálculo: dificuldades de natureza epistemológica.* São Paulo: USP.

Saviani, D. (1980). *Educção e questões de atualidade.* São Paulo: Cortez.

Scher, D. (1993). Student's Conceptions of the Derivative across Multiple Representations. *Mathematics in College*, pp. 3-17 .

Silva, B. (1999). Contrato Didático. In: S. Machado, *Educação Matemática: uma introdução* (pp. 43-64). São Paulo: EDUC.

SILVA, B. (2009). Componentes do processo de ensino e aprendizagem de cálculo: saber, aluno e professor. *Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática*.

Tall. (2004). Thinking Through Three Worlds Of Mathematics. *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*.

Tall, D. (1991). The psychology of advanced mathematical thinking. In: D. Tall, *Advanced mathematical thinking* (pp. 3-21). Mathematics Education Library.

Tall, D. (1995). Cognitive growth in elementary and advanced mathematical thinking. . *INTERNATIONAL CONFERENCE FOR THE PSYCHOLOGY OF MATHEMATICS*, (pp. 161-175). Recife.

TALL, D. (2007). Developing a theory of mathematical growth. *ZDM – The International Journal on Mathematics Education*, pp. 145-154.

Tall, D., & Gray, E. (1994). Duality, Ambiguity and Flexibility: a proceptual view of simple arithmetic. *The Journal for Research in Mathematics Education v26, n2*, pp. 115-141.

Tall, D., & Vinner, S. (1981). Concept image e concept definition im mathematics, with especial references to limits and continuity. *Education Studies in Mathematics , vol 3, n 12*, pp. 151-169.

TEIXEIRA, L. R. (2004). Dificuldades e erros na Aprendizagem da Matemática. São Paulo.

Tsamir, P., & Ovodenko, R. (2013). University students' grasp of inflection points. *Springer Science+Business Media Dordrech*, 5-19.

VIEIRA, A. F. (2013). *Ensino do Cálculo Diferencial e Integral:das técnicas ao humans-with-media* .São Paulo: USP.

Viner, S. (1983). Conflicts between definitions and intuitions: the case of the tangent. *Conference Of The International Group For The Psychology Of Mathematics Education*.

Vinner. (1983). International Journal of Education in Science and Tecnology. *Concept definition, concept image and the notion of function*. International Journal of Education in Science and Tecnology.

Vinner, S. (1991). The Role of Definitions in teh Teaching and Learning Mathematics. In: D. Tall, *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 65-81). Mathematics Education Library.

Zeferino, M. V., Wrobel , J. S., & Carneiro, T. J. (2013). UM MAPA DO ENSINO DE CÁLCULO NOS ÚLTIMOS 10 ANOS DO COBENGE. *COBENGE*, (p. 13). Gramado.

I) Entrevista com Alunos

Entrevista/ Questionário

I. Questões Iniciais:

- ✓ Curso: ____
- ✓ Período:____
- ✓ Idade :____
- ✓ Trabalha ( ) sim ( ) não
- ✓ Mora em Campos dos Goytacazes? ( ) sim ( )não
- ✓ Em caso negativo, quanto tempo gasta para se deslocar até a universidade _________________________________
- ✓ Cursou Ensino Médio em escola pública ou particular? ______________
- ✓ Qual fator o levou a escolher a engenharia? ____ ____ ____

II. Questões específicas:

1. Durante o seu curso de Cálculo Diferencial e Integral, você estudou pontos Críticos de uma função de Variável real?
   ( ) sim ( ) não ( ) não me lembro

2. Durante o seu curso de Calculo Diferencial e integral, você estudou problemas de otimização?

   ( ) sim ( ) não ( ) não me lembro

3. O que é um ponto crítico de uma função de variável real?

____

____

4. Dos recursos abaixo, quais estavam presentes em suas aulas de Cálculo:

( ) calculadora cientifica

( ) Calculadora Gráfica

( ) computadores

( ) laboratório de informática

( ) softwares como por exemplo Winplot, Geogebra dentre outros

( ) Listas de exercícios

( ) aulas expositivas

( ) Livros

5. Você se lembra de como resolver um problema de otimização?

( ) sim ( ) não

6. Usando a estratégia que preferir (por favor deixe no espaço todos os cálculos, desenhos, etc) resolva os dois problemas abaixo:

a) Dentre os números naturais cuja soma é 7, determine aqueles cujo produto é máximo.

b) Pretende-se estender um cabo de uma usina de força à margem de um rio de 900m de largura até uma fábrica situada do outro lado do rio, 3.000m rio abaixo. O custo para estender um cabo pelo rio é de R$ 5,00 o metro, enquanto que para estendê-lo por terra custa R$ 4,00 o metro. Qual é o percurso mais econômico para o cabo?

II) Entrevista com Professores

Entrevista/ Questionário

Disciplinas que ministra: ____

Curso(s) que Leciona: ____

1. Há quanto tempo leciona Cálculo Diferencial e Integral ?

   ____

2. Você acha importante o trabalho com problemas de otimização? Por quê?

   ____
   ____
   ____
   ____
   ____
   ____
   ____
   ____

3. Quais são os recursos/ estratégias que você utiliza em suas aulas para trabalhar com os alunos o conteúdo ponto critico de uma função?

____
____
____
____
____
____

4. Você acha que os problemas de otimização poderiam se tornar um agente motivador para o trabalho com Cálculo Diferencial e Integral?Por quê?

   ____
   ____
   ____
   ____
   ____

5. Quais são os livros que você normalmente usa para elaborar suas aulas a respeito de pontos críticos de uma função?

III) Entrevista com Participantes

Universidade Anhanguera de São Paulo
Curso de Pós Graduação Stricto Sensu
Doutorado em Educação Matemática
Doutorando: Prof. MSc. Rodrigo R. Dias
Orientadora: Profa. Dra. Maria Elisa Esteves Lopes Galvão

Entrevista com Participantes

1. Durante as intervenções, vocês foram apresentados a um software que permitia do traçado de gráficos, a determinação das derivadas de primeira e segunda ordem, além dos pontos de Máximos e Mínimos de Funções. Você acha que esse recurso tecnológico ajuda na construção das ideias do Cálculo? Por quê ?

2. Na maioria das atividades propostas nas intervenções, vocês foram apresentados a problemas de otimização. Na sua opinião, os problemas de otimização contribuem para despertar no aluno uma curiosidade ou gosto pelo estudo do Cálculo Diferencial? Por quê ?

3. Você já não estuda mais o Cálculo 1 e por conta disso não está trabalhando mais com os problemas de otimização de funções de uma variável. Você acha que o uso dos programas computacionais poderiam ser usados em outros cursos de Cálculo? Em quais conteúdos? Por quê?

4. Você ainda utiliza o software em suas atividades de Cálculo Diferencial e Integral? Em quais delas?

5. Em alguns momentos das atividades da intervenção, vocês participantes, valeram-se de materiais manipuláveis como, por exemplo: papel, barbante, tesoura, régua etc. Qual a importância desse material durante a execução das suas atividades?

6. Este espaço é destinado a comentários relativos a sua participação na pesquisa.

Muito Obrigado

IV) Intervenção 01

INTERVENÇÃO 01

Atividade 01.

Observe os gráficos abaixo:

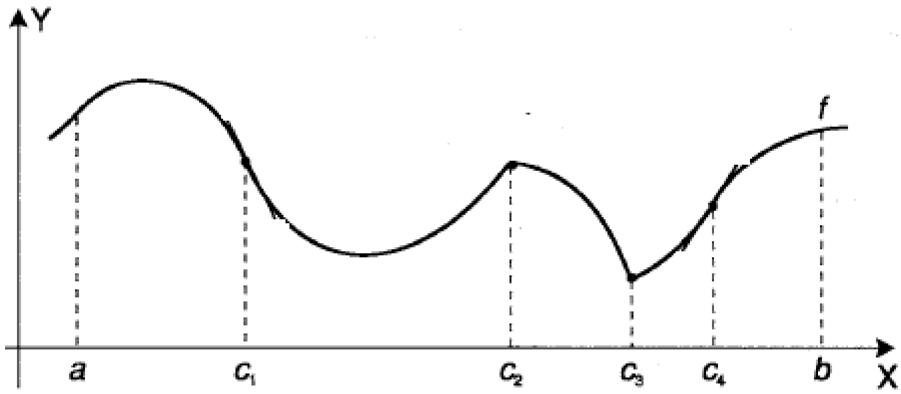


Gráfico 1

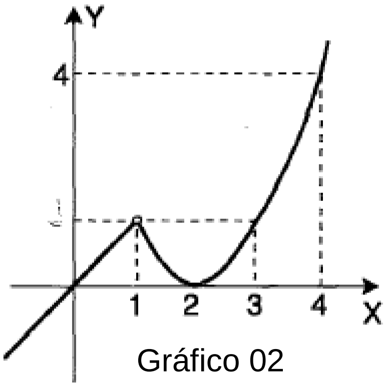


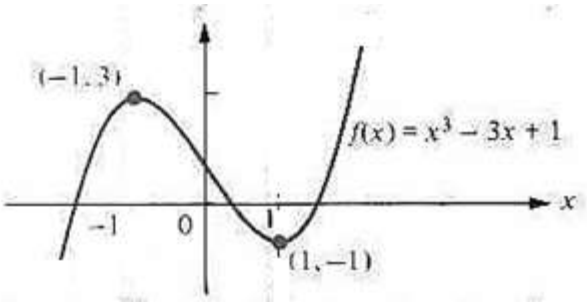
Gráfico 02

a. Em cada gráfico, indique os “locais” onde a função é crescente ou decrescente.
b. Quais informações você usou para chegar a sua reposta?

____

Atividade 02

Observe o gráfico abaixo:



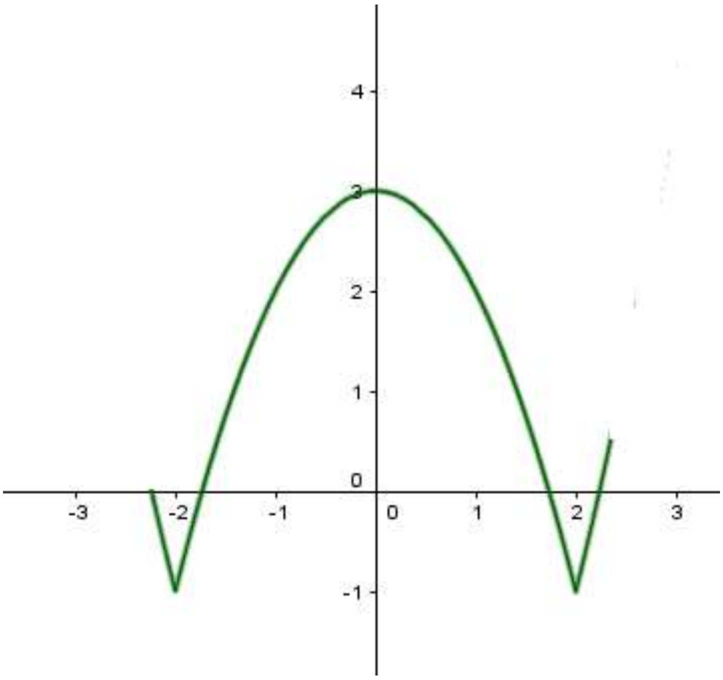
- ✓ Essa função possui ponto máximo? ______________________
- ✓ Em caso afirmativo, qual é esse ponto? ___________________
- ✓ Essa função possui ponto mínimo?______________________
- ✓ Em caso afirmativo, qual é esse ponto? __________________

Quais são os dados ou fatos que lhe permitiram responder aos itens anteriores?

____
____
____
____
____
____
____
____
____
____
____
____
____
____
____

Atividade 03

Observe o gráfico abaixo:



- ✓ Essa função possui ponto máximo? ______________________
- ✓ Em caso afirmativo, indique no gráfico.
- ✓ Essa função possui ponto mínimo?______________________
- ✓ Em caso afirmativo, indique no gráfico

Quais são os dados ou fatos que lhe permitiram responder aos itens anteriores?

____
____
____
____
____
____
____
____
____
____

Atividade 04

Resolva o problema abaixo, da maneira que achar mais conveniente. Não se esqueça de deixar indicada a forma como chegou ao resultado.

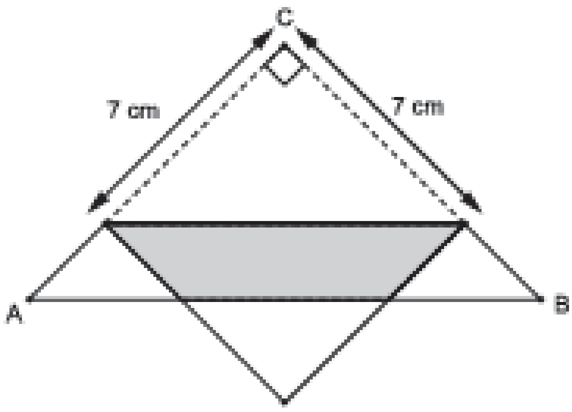
Considere dois números naturais cuja soma seja 8. Quais deles tem produto máximo?

Atividade 05

Resolva o problema abaixo, da maneira que achar mais conveniente. Não se esqueça de deixar indicada a maneira como você chegou ao resultado.

Propriedades importantes do triângulo retângulo isósceles:

a) Esse triângulo é a metade de um quadrado;
b) Uma paralela a qualquer dos lados do triângulo retângulo isósceles corta os outros dois lados determinando um novo triângulo retângulo isósceles.



Problema:(OBMEP 2013 - N3-2ª fase)

A figura mostra um triângulo de papel *ABC*, retângulo em *C* e cujos catetos medem 10 cm. Para cada número *x* tal que $0 \leq x \leq 10$, marcam-se nos catetos os pontos que distam *x* cm do ponto *C* e dobra-se o triângulo ao longo da reta determinada por esses pontos. Indicamos por *f* (*x*) a área, em cm^2, da região onde ocorre sobreposição de papel.
Por exemplo, na figura ao lado, a área da região cinzenta é *f* (7).

a) Calcule *f* (2), *f* (5) e *f* (7).
b) Escreva as expressões de *f* (*x*) para $0 \leq x \leq 5$ e $5 \leq x \leq 10$.

c) Faça o gráfico de *f* (*x*) em função de *x*.

d) Determine o maior valor possível para a área da região de sobreposição.

V) Intervenção 02

Atividade 01:

Construa um retângulo com 8cm de perímetro. Agora construa novos retângulos conservando o perímetro. Anote as novas áreas. Em que caso a área foi máxima?

Atividade 02

Esboce e encontre, quando existirem, os extremos das funções abaixo, bem como os pontos onde eles ocorrem. Justifiquem seus procedimentos e escolhas.

a) $f(x) = x^2 - x + 5,\ 0 \le x \le 10$ b) $f(x)\ x^3 + x$, $-1 \le x \le 5$ c) $f(x) = xe^{-x},\ 0 \le x \le 7$

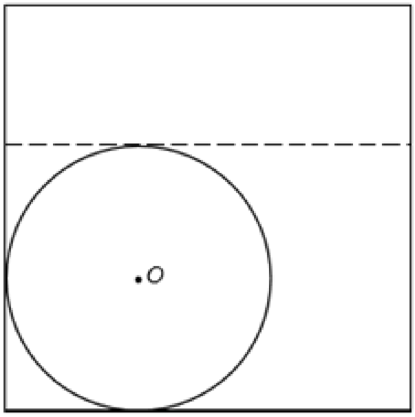
Atividade 03

Imagine que você tem 140 cm de barbante para construir um quadrado e um retângulo. No retângulo, a medida da base deve ser o triplo da largura. Se a soma das áreas das figuras deve ser a menor possível, qual deve ser a área do quadrado.

VI) **Intervenção 03**

Atividade 01

Um quadrado de 4 cm de lado é dividido em dois retângulos. Em um dos retângulos, coloca-se um círculo, de raio R, tangenciando dois de seus lados opostos, conforme a figura a seguir.



a) Escreva uma expressão que represente a soma das áreas do círculo e do retângulo, que não contém o círculo, em função de R.

b) Qual deve ser o raio do círculo, para que a área pedida no item anterior seja a menor possível?

Atividade 02

<u>INTERVENÇÃO 03</u>

2. Um fabricante de caixas de papelão pretende fazer caixas sem tampas a partir de folhas quadradas de cartão com área igual a $576cm^2$, cortando quadrados iguais nos quatro cantos e dobrando os lados para cima.

a) Escreva a função volume da caixa;
b) Represente graficamente a função volume;
c) Determinar o lado do quadrado que deve ser cortado para se obter uma caixa com o maior volume possível.

Atividade 03

INTERVENÇÃO 03

3) Você está recebendo um pedaço de barbante de comprimento L. Você deve dividir esse barbante em duas partes. Com o primeiro pedaço você deverá construir um quadrado. Com o pedaço restante um círculo. Determinar o ponto em que se deve cortar o arame para que a soma das áreas geradas pelo quadrado e do círculo seja mínima.

Atividade 04

INTERVENÇÃO 03

4) Uma calha deve ser construída com uma folha de metal de largura 30cm, dobrando-se para cima 1/3 da folha para cada lado, fazendo um ângulo θ com a horizontal.

a) Determine a função que permite otimizar a capacidade da calha em função do ângulo θ.

b) Qual deve ser o valor de θ de modo que a capacidade da calha em armazenar água seja máxima.

Registre no espaço abaixo, todas as suas observações e/ou escolhas de resolução.

VII) TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Título do Projeto:**A CONSTRUÇÃO DO CONCEITO DE PONTO CRÍTICO DE UMA FUNÇÃO DE VARIÁVEL REAL POR MEIO DOS PROBLEMAS DE OTIMIZAÇÃO.**

Pesquisador Responsável e Professor Orientador: **Doutorando Rodrigo Rodrigues Dias e Prof[a]. Dr[a]. Maria Elisa Esteves Lopes Galvão**

Instituição a que pertence o Pesquisador Responsável e do Professor Orientador: **Universidade Estácio de Sá (UNESA)e Universidade Bandeirante de São Paulo (UNIBAN), respectivamente.**

Telefone para contato: **(22) 981246060 – Pesquisador Responsável**

As informações a seguir são fornecidas para sua participação como entrevistado neste estudo.

Nosso objetivo é verificar como se constrói o conceito de ponto crítico de uma função por meio dos problemas de otimização. Para tal, pretendemos elaborar uma proposta sobre o estudo de funções baseada em problemas de otimização além de descrever o processo de construção do conceito de ponto crítico de uma função de uma variável, à luz da realização da sequência de ensino apresentada.

Uma vez que os problemas decorrentes do ensino de Cálculo I no primeiro semestre das universidades, nas diferentes áreas do conhecimento como Engenharia, Matemática, Física, Química, Economia, Administração, etc, vem sendo objeto de estudo de muitos pesquisadores em Educação Matemática além de que "É bastante comum que, nesses cursos, a disciplina de Cálculo I apresente altos índices de reprovação e desistência" (Rezende, 2003), os benefícios dessa pesquisa consistem em explicitar a forma de construção do conceito de ponto critico de função e verificar se os problemas de otimização podem funcionar como agente motivador para o estudo do Cálculo Diferencial. Além de proporcionar aos alunos uma sequência de atividades pautadas na utilização de computadores, calculadoras e atividades de procedimentos algébricos , explicitamos aqui que uma das vantagens dessa sequência é levar o aluno a pensar na situação ao qual ele está exposto, não a simplesmente aplicar um conjunto de regras e algoritmos de resolução de exercícios, tornando assim o ensino de ponto crítico de função uma atividade dotada de significado por parte do estudante.

Poderão acontecer, no decorrer, da realização das atividades , situações de constrangimentos. Caso isso ocorra, os participantes poderão, por termo assinado, se retirar da pesquisa a qualquer momento.

As gravações de áudio e as transcrições serão de uso exclusivo do grupo de pesquisa e servirão como base para nosso estudo.

Os entrevistados, se preferirem, terão seus nomes trocados por pseudônimos, preservando sua identidade. O cronograma das atividadesserá organizado de modo que não prejudique outras atividades. Portanto, as entrevistas serão realizadas em momentos pré-estabelecidos, de acordo com a disponibilidade dos participantes.

Os resultados dessa pesquisa poderão ser utilizados pelos pesquisadores em publicações em periódicos, livros, eventos científicos, cursos e outras divulgações acadêmico-científicas.

Em qualquer etapa do estudo, o entrevistado terá acesso aos responsáveis pela pesquisa. Para eventuais dúvidas ou esclarecimentos sobre os procedimentos ou a ética da pesquisa, o entrevistado poderá entrar em contato com o pesquisador responsável ou seu professor orientador na UNIBAN – Campus de Maria Cândida, sito à Rua Maria Cândida, 1813 – São Paulo – SP, telefone (11) 2967-9119.

A qualquer entrevistado é garantida a liberdade da retirada de seu consentimento para participação da pesquisa, quando lhe convier, até a data da finalização deste estudo.

Não há despesas pessoais para o entrevistado em qualquer fase do estudo, assim como não há compensação financeira relacionada à sua entrevista.

Eu,____,RG nº __________________, declaro estar suficientemente informado a respeito das informações que li acima, relacionadas ao projeto **A CONSTRUÇÃO DO CONCEITO DE PONTO CRÍTICO DE UMA FUNÇÃO DE VARIÁVEL REAL POR MEIO DOS PROBLEMAS DE OTIMIZAÇÃO.** Ficaram claros para mim quais são os propósitos do estudo, os procedimentos, as garantias de confidencialidade e autorizo a veiculação dos resultados para os usos mencionados. Está claro também que minha entrevista é isenta de qualquer tipo de despesas. Assim sendo, concordo em participar deste estudo e poderei retirar o meu consentimento a qualquer momento, antes ou durante o mesmo, sem penalidades ou prejuízo para mim e sem prejuízo para a continuidade da pesquisa em andamento.

São Paulo, _____ de ____________ de_______

Assinatura do entrevistado	Assinatura do pesquisador responsável
Assinatura da testemunha	Assinatura da testemunha

Declaro que obtive de forma apropriada e voluntária o Consentimento Livre e Esclarecido deste entrevistado para a participação nesse estudo.

Assinatura do pesquisador responsável

Data____/_____/_____

VIII) Folha de Rosto

PlataForma Brasil MINISTÉRIO DA SAÚDE - Conselho Nacional de Saúde - Comissão Nacional de Ética em Pesquisa – CONEP

FOLHA DE ROSTO PARA PESQUISA ENVOLVENDO SERES HUMANOS

1. Projeto de Pesquisa: A CONSTRUÇÃO DO CONCEITO DE PONTO CRÍTICO DE UMA FUNÇÃO DE VARIÁVEL REAL POR MEIO DOS PROBLEMAS DE OTIMIZAÇÃO.			2. Número de Participantes da Pesquisa: 15
3. Área Temática:			
4. Área do Conhecimento: Grande Área 7. Ciências Humanas			
PESQUISADOR RESPONSÁVEL			
5. Nome: Rodrigo Rodrigues Dias			
6. CPF: 029.298.007-80	7. Endereço (Rua, n.º): GENERAL DEMERVAL PEIXOTO, 11 CENTRO APTO 201 SAO FIDELIS RIO DE JANEIRO 28400000		
8. Nacionalidade: BRASILEIRO	9. Telefone: (22) 2751-5821	10. Outro Telefone:	11. Email: rodrigordias@uol.com.br
12. Cargo:			

Termo de Compromisso: Declaro que conheço e cumprirei os requisitos da Resolução CNS 466/12 e suas complementares. Comprometo-me a utilizar os materiais e dados coletados exclusivamente para os fins previstos no protocolo e a publicar os resultados sejam eles favoráveis ou não. Aceito as responsabilidades pela condução científica do projeto acima. Tenho ciência que essa folha será anexada ao projeto devidamente assinada por todos os responsáveis e fará parte integrante da documentação do mesmo.

Data: 10 / 05 / 2014 Rodrigo Rodrigues Dias
Assinatura

INSTITUIÇÃO PROPONENTE		
13. Nome: UNIBAN - UNIVERSIDADE BANDEIRANTE DE SAO PAULO	14. CNPJ: 62.655.261/0011-79	15. Unidade/Órgão:
16. Telefone: (11) 1972-9020	17. Outro Telefone:	

Termo de Compromisso (do responsável pela instituição): Declaro que conheço e cumprirei os requisitos da Resolução CNS 466/12 e suas Complementares e como esta instituição tem condições para o desenvolvimento deste projeto, autorizo sua execução.

Responsável: Tânia Maria Mendonça Campos CPF: 044 854 558 - 34

Cargo/Função: Diretora de Pós - Graduação e Pesquisa

Data: 02 / 06 / 2014 Tânia Maria Campos
Assinatura

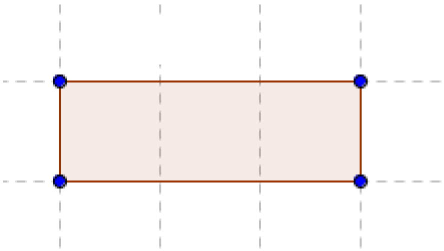
PATROCINADOR PRINCIPAL

Não se aplica.

IX) Atividades Preliminares pensadas para as Intervenções dois e três

Atividade 01: Construa um retângulo com 8 cm de perímetro. Agora construa novos retângulos conservando o perímetro. Anote as novas áreas. Em que caso a área foi máxima?

Atividade 02:Vamos pensar algebricamente?



a) Crie uma expressão algébrica para indicar o perímetro dessa figura
b) Crie uma expressão algébrica para indicar a área dessa figura.
c) Reescreva a expressão algébrica da área em função de uma das dimensões. Que expressão você obteve?
d) Essa nova expressão é uma função. Construa o gráfico e compare com os retângulos que você desenhou inicialmente. A que conclusãovocê chega?

Atividade 03 :Dentre todos os retângulos de mesmo perímetro, qual é o de maior área?

Atividade 04 : Construa o gráfico da parábola $y^2 = 2x$. Marque no plano cartesiano o ponto P (1,4). Encontre o ponto da parábola que está mais próximo de P.

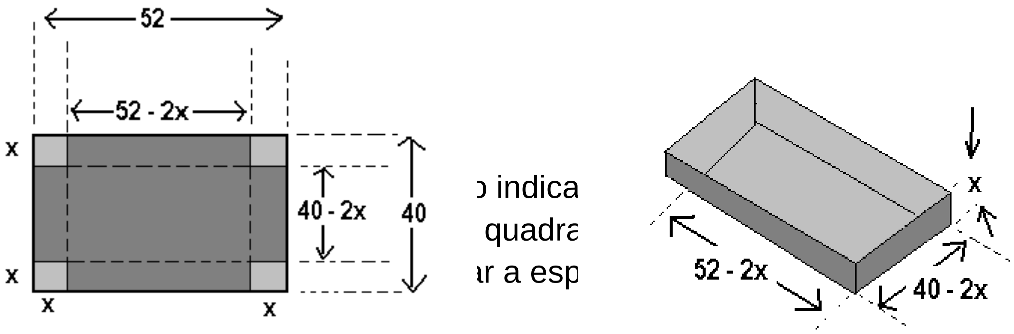
Atividade 05: Esboce e encontre, quando existirem, os extremos das funções abaixo, bem como os pontos onde eles ocorrem.

a) $f(x) = x^2 - x + 5,\ 0 \le x \le 10$

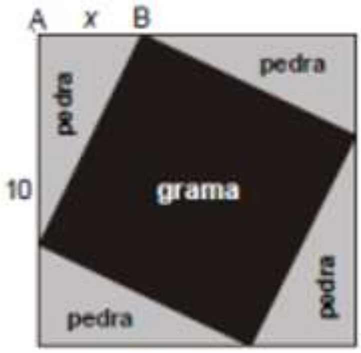
b) $f(x) = xe^{-x},\ 0 \le x \le 7$

Atividade 06: Observe a situação descrita abaixo:

Deve-se construir uma caixa de base retangular, com uma folha de cartolina de 40 cm de largura e 52 cm de comprimento, retirando-se um quadrado de cada canto da cartolina e dobrando-se perpendicular os lados resultantes.



Atividade 07: Um prefeito quer construir uma praça quadrada de 10 m de lado, que terá quatro canteiros triangulares de pedra e um canteiro quadrado de grama, como na figura. O prefeito ainda não decidiu qual será a área do canteiro de grama, e por isso o comprimento do segmento AB está indicado por x na figura.



a) Calcule a área do canteiro de grama para x = 2.

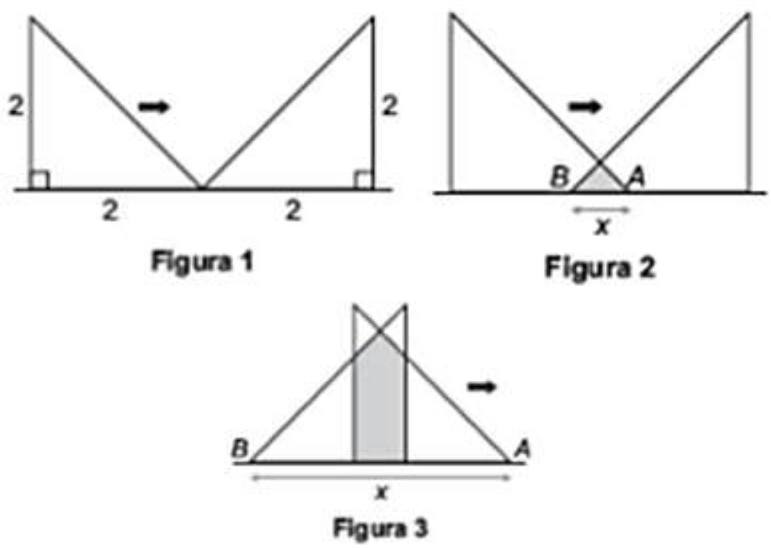
b) Escreva a expressão da área do canteiro de grama em função de x e esboce seu gráfico.

Sabe-se que o canteiro de grama custa R$ 4,00 por metro quadrado e os canteiros de pedra custam R$ 3,00 por metro quadrado. Use esta informação para responder aos dois itens a seguir.

c) Qual a menor quantia que o prefeito deve ter para construir os cinco canteiros?

d) Se o prefeito tem apenas R$ 358,00 para gastar com os cinco canteiros, qual é a área do maior canteiro de grama que a praça poderá ter?

Atividade 08: Dois triângulos retângulos isósceles com catetos de medida 2 são posicionados como mostra a figura 1. A seguir,o triângulo da esquerda é deslocado para a direita. Nas figuras 2 e 3, x indica a distância entre os vértices A e B dos dois triângulos.



Para cada x no intervalo [0,4], seja f (x) a área da região comum aos dois triângulos (em cinza nas figuras).

a) Calcule f (1) e f (3).

b) Encontre as expressões de f nos intervalos [0,2] e [2,4] e esboce o seu gráfico.

c) Qual é a área máxima da região comum aos dois triângulos?

Atividade 9.

Problema (OBMEP 2012 - N3 - 2ª fase):

Na figura ao lado, as retas r e s são paralelas. O segmento AB é perpendicular a essas retas e o ponto P, nesse segmento, é tal que AP = 2 e BP = 1. O ponto X pertence à reta r e a medida do segmento BX é indicada por x. O ponto Y pertence à reta s e o triângulo XPY é retângulo em P.

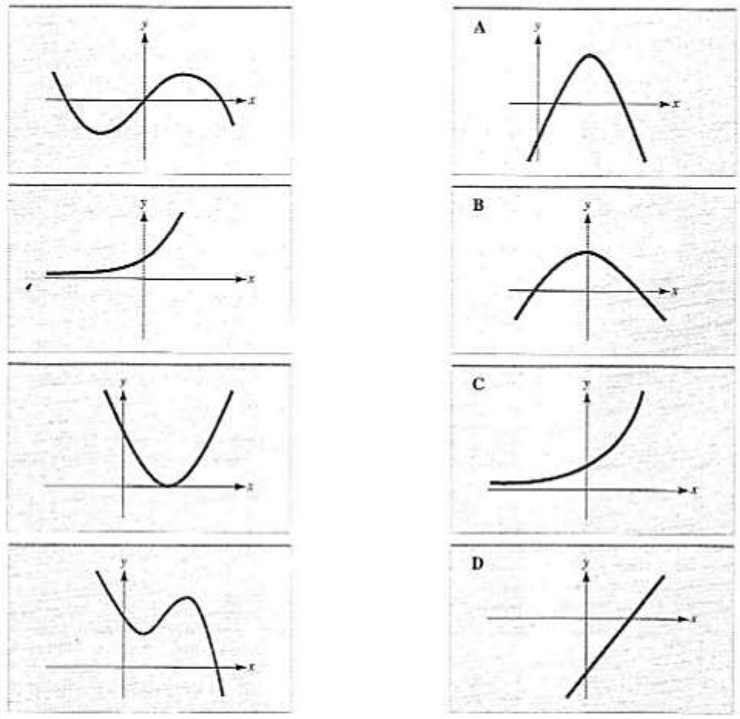
a) Calcule a área do triângulo XPY em função de x.

b) Esboce o gráfico da função área do triângulo XPY.

c) Determine o valor de x para o qual a área do triângulo XPY é mínima e calcule o valor dessa área.

Atividade 10

As curvas A,B,C e D dos gráficos da esquerda são as derivadas das funções de 5 a 8. Estabeleça a correspondência correta entre a função e a sua derivada, justificando suas escolhas.



Atividade 11

Um fio de barbante de 10 metros de comprimento pode ser usado ou para construir um quadrado, ou para construir um círculo ou ele pode ser cortado em dois pedaços (não necessariamente de mesmo tamanho) de modo que um dos pedaços é usado para construir um quadrado e o outro pedaço é usado para construir um círculo. Quanto deve ser x, a medida em metros do pedaço do barbante usado para construir o quadrado, para que a soma S das áreas das figuras produzidas seja a maior possível? Quanto deve ser x, a medida em metros do pedaço do barbante usado para construir o quadrado, para que a soma S das áreas das figuras produzidas seja a menor possível?

EMENTA

CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I - CCE0044

CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I (13/07/2015)

Perfil Docente

· Graduação em Engenharia Elétrica, Engenharia de Comunicações/TelecomunicaçõesEngenharia de Controle ne Automação, Engenharia Mecânica, Engenharia Civil;, Engenharia de Produção, Engenharia Química, Engenharia de Petróleo.

· Com pós-graduação na área. Desejável Doutorado;

· Experiência docente, facilidade de comunicação e CV LATTES atualizado

Contextualização

O Cálculo Diferencial e Integral possui uma importância marcante na conceituação, descrição e resolução de problemas no estudo da Engenharia. O uso do Cálculo Diferencial e Integral, como ferramenta na solução de problemas no mundo real, o torna uma disciplina básica e imprescindível no ensino de qualquer área de Engenharia.
Esta disciplina, em seu contexto, se propõe a apresentar aos alunos conceitos, técnicas e ferramentas importantes para a compreensão de problemas cotidianos da área, ajudando a desenvolver o raciocínio lógico. Visa, também, dar a base matemática para a maturidade acadêmica do discente durante o curso, possibilitando-lhe o desenvolvimento de competências e habilidades para aplicar conhecimentos físicos, matemáticos, científicos, tecnológicos e instrumentais à engenharia e desenvolver e/ou utilizar novas ferramentas técnicas.

Ementa

Conceituação de Derivadas. Regras de Derivação. Aplicações de Derivadas. Integração. Técnicas de Integração.
No estudo da derivada e suas aplicações veremos uma aplicação no contexto geométrico, como o ângulo, inclinação, entre a reta tangente e o eixo da abcissas e outras, no contexto da Física, como a velocidade, a taxa média de variação e a aceleração de um móvel.

As técnicas de derivação são apresentadas além da formalização de conceitos e propriedades que auxiliarão no desenvolvimento das aplicações futuras.

Nas integrais estudaremos o conceito de integral, as integrais imediatas, as integrais indefinidas e definidas, os procedimentos algébricos com diversos métodos de integração, inicialmente, estudando o método da substituição e seguindo com a integração por partes, a integração por frações parciais e finalizando com a aplicação das integrais, como o cálculo de comprimento de curvas planas, de áreas planas e volumes.

Objetivos Gerais

Ao final do semestre o discente deve ser levado a adquirir os conhecimentos sobre derivadas, suas aplicações, as noções básicas de integração e suas aplicações, sendo capaz de aplicar estes conceitos na resolução de problemas e situações concretas em Engenharia.

Objetivos Específicos

1 - Calcular, através das fórmulas, as derivadas das Funções Trigonométricas, de Funções Trigonométricas Inversas, de Funções Exponenciais e de Funções Logarítmicas;
2 - Realizar Derivação Implícita e analisar o significado das derivadas compostas(elos);
3 - Determinar, através do uso da derivada, as equações das retas tangentes e normal à uma curva;
4 - Calcular à taxa segundo a qual certa quantidade está variando em relação a outras cujas taxas são conhecidas;
5 - Utilizar o Cálculo como ferramenta para analisar o comportamento de uma função;
6 - Resolver problemas de otimização através da maximização e minimização de funções relacionadas à Engenharia;
7 - Compreender a definição de antiderivada e o conceito de integral;
8 - Fazer uso da técnica de mudança de variável no cálculo de integrais;
9 - Compreender o conceito de Integral Definida;
10 - Resolver problemas envolvendo integrais definidas de uma função;
11 - Resolver problemas de áreas entre uma curva $f(x)$ e o eixo x em um intervalo finito;
12 - Resolver problemas de cálculo de áreas de regiões entre curvas;
13 - Resolver problemas de cálculo de volumes de sólidos usando o método do fatiamento;
14 - Resolver problemas de cálculo de volume de um sólido gerado pela rotação de uma região plana em torno de um eixo;
15 - Resolver problemas do cálculo de comprimento de curvas;
16 - Resolver limites de frações cujos numerador e denominador tendem a zero, pela Regra de L'Hôpital
17 - Resolver integrais com limites infinitos de integração;
18 - Identificar a convergência de uma integral com limites infinitos de integração.

Conteúdos

Unidade I DERIVADAS

1.1 Conceituação de Derivadas

1.2 Regras Básicas de Derivação

1.3 Derivadas de ordem superior

1.4 A Regra da Cadeia

1.5. Derivadas de Funções Trigonométricas

1.6 Derivadas de Funções Trigonométricas Inversas

1.7 Derivadas de Funções Exponenciais e Logarítmicas

1.8 Derivação Implícita

1.9 Equação de reta tangente e normal

Unidade II APLICAÇÕES DE DERIVADAS

2.1 Taxas Relacionadas

2.2 Máximos e Mínimos, traçado de curvas

2.3 Modelagem e Otimização

Unidade III - INTEGRAÇÃO

3.1 Integral Indefinida

3.2 Integrais Imediatas e Integração por substituição

3.3 Integrais Definidas

3.3 Teorema Fundamental do Cálculo

3.4 Cálculo de áreas como limites e áreas pelo cálculo infinitesimal

Unidade IV APLICAÇÕES DE INTEGRAIS DEFINIDAS

4.1 Cálculo de Volumes por fatiamento

4.2 Cálculo de Volumes pela rotação em torno de um eixo

4.3 Cálculo do Comprimento curvas planas

Unidade V TÉCNICAS DE INTEGRAÇÃO

5.1 Procedimentos Algébricos

5.2 Integração por Partes

5.3 Integração de Funções Racionais por Frações Parciais

5.4 Regra de L´Hôpital e Integrais Impróprias

Procedimentos de Ensino

Aulas expositivas com apresentação de conteúdos relevantes e significativos apresentando exercícios para serem resolvidos extraclasse ou no laboratório, usando software livre, como o DeadLine ou outros, com discussão dos resultados, objetivando desenvolver habilidades. Existe a possibilidade de uso de utilização de outros softwares de manipulação numérica e algébrica, para fixação de conteúdos e como oportunidade adicional de construção do conhecimento. Exemplos de softwares: - Maple (www.maplesoft.com) - MathCAD (www.mathcad.com.br) - Maxima (software livre - maxima.sourceforge.net)

Recursos

Quadro Branco, retro-projetor, data-show, softwares livres de traçado de gráficos. Consultas à Biblioteca Virtual e utilização do Material Didático(físico ou virtual) de acordo com o assunto de cada aula.

Procedimentos de Avaliação

O processo de avaliação será composto de três etapas, Avaliação 1 (AV1), Avaliação 2 (AV2) e Avaliação 3 (AV3).

A AV1 contemplará o conteúdo da disciplina até a sua realização, incluindo o das atividades estruturadas.

As AV2 e AV3 abrangerão todo o conteúdo da disciplina, incluindo o das atividades estruturadas, caso a disciplina possua.

Para aprovação na disciplina o aluno deverá:

1. Atingir resultado igual ou superior a 6,0, calculado a partir da média aritmética entre os graus das avaliações, sendo consideradas apenas as duas maiores notas obtida dentre as três etapas de avaliação (AV1, AV2 e AV3). A média aritmética obtida será o grau final do aluno na disciplina.
2. Obter grau igual ou superior a 4,0 em, pelo menos, duas das três avaliações.
3. Frequentar, no mínimo, 75% das aulas ministradas.

Bibliografia Básica

O Cálculo com Geometria Analítica – Louis Leithold – Volume 1.1994, Harbra

Cálculo A– Diva Marília Flemming e MiriamBuss Gonçalves — Volume Único , 1992, Editora Makron Books

Cálculo - James Stewart - Volume 1, 2006 , Cengage Learning

Cálculo I – Mustafa A. Munem e David J. Foulis, 1982, LTC

Cálculo um curso moderno e suas aplicações, Hoffmann Laurence e Bradley Gerald, 2008, LTC

Bibliografia Complementar

HOFFMANN, Laurence D; BRADLEY, Gerald L. 10 ed. **Cálculo: um curso moderno e suas aplicações**. Rio de Janeiro: LTC, 2011.

IEZZI, Gelson; MURAKAMI, Carlos; MACHADO, Nilson José. **Fundamentos de matemática elementar, 8: limites, derivadas, noções de integral.** 5. ed. rev e ampl. São Paulo: Atual, c1995.

. SIMMONS, George F. **Cálculo com geometria analítica**. São Paulo: Makron, 2008. 2 v.

.AVILA, Geraldo. **Introdução ao Cálculo**. Rio de Janeiro: LTC. 1ª Edição, 1998.

Indicação Material Didático

Outras Informações

Material adicional: professores e alunos têm acesso a diversos materiais adicionais no site da Companion Website: www.aw.com/thomas_br. Para o professor, manual de soluções e apresentação em *powerpoint* estão disponíveis. Para o aluno exercícios adicionais de múltipla escolha corrigidos automaticamente.

A instituição ciente de sua responsabilidade em disponibilizar uma formação ampla e atualizada a sua comunidade acadêmica, assinou um contrato de consulta ao portal de Periódicos Ebsco, onde nossos professores e alunos poderão consultar de forma online, a partir do Sistema de Informações Acadêmicas, no menu Bibliotecas, um total de 35.000 periódicos científicos com artigos resumidos e atualizados, dentre os quais aproximadamente 19.000 são apresentados na íntegra distribuídos entre todas as áreas de conhecimento que integram a instituição:

Engenharias e Arquitetura
Saúde
Gestão

Licenciaturas
Arte e comunicação
Ciências Jurídicas
Tecnologia da Informação

Apresentamos a seguir as treze bases de dados que englobam o grande portfólio de periódicos:

Academic Search Complete
Psychology & Behavioral Siences Collection
International Pharmaceutical Abstracts
Business Source Premier
Dentistry & Oral Sciences Source
MEDLINE Complete
DynaMed
Hospitality & Tourism Complete
Education Source
Applied Science & Technology Source
Chemical Hazard Information Library
Fonte Acadêmica
World Policits Review