UNIVERSIDADE ANHANGUERA DE SÃO PAULO
LAERTE SILVA DA FONSECA

UM ESTUDO SOBRE O ENSINO DE FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS NO ENSINO MÉDIO E NO ENSINO SUPERIOR NO BRASIL E FRANÇA

SÃO PAULO
2015

LAERTE SILVA DA FONSECA
DOUTORADO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

Um estudo sobre o Ensino de Funções Trigonométricas no Ensino Médio e no Ensino Superior no Brasil e França

Tese de Doutorado apresentada ao programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Universidade Anhanguera de São Paulo como parte dos requisitos necessários à obtenção do Título de Doutor em Educação Matemática, sob a orientação do Prof. Dr. Luiz Gonzaga Xavier de Barros (BRASIL) e coorientação da Profª Drª Jana Trgalova (FRANÇA).

SÃO PAULO
2015

F744u Fonseca, Laerte Silva da

Um estudo sobre o Ensino de Funções Trigonométricas no Ensino Médio e no Ensino Superior no Brasil e França. / Laerte Silva da Fonseca. – São Paulo, 2015.
495 f ; il.; 30 cm

Tese (Doutorado em Educação Matemática, Àrea de concentração: Ensino - Aprendizagem) – Coordenadoria de Pós- graduação, Universidade Anhanguera de São Paulo, 2015.

Orientador: Prof. Dr. Luiz Gonzaga Xavier de Barros
Coorientadora: Prof.ª Dr.ª Jana Trgalova

1. Ensino de funções trigonométricas. 2. Transição ensino médio – ensino superior. 3. Didática da matemática. 4. Neurociência cognitiva. I. Título. II. Universidade Anhanguera de São Paulo.

CDD 372.7

LAERTE SILVA DA FONSECA

Um estudo sobre o Ensino de Funções Trigonométricas no Ensino Médio e no Ensino Superior no Brasil e França.

Tese de Doutorado apresentada ao programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Universidade Anhanguera de São Paulo como parte dos requisitos necessários à obtenção do Título de Doutor em Educação Matemática, sob a orientação do Prof.. Dr. Luiz Gonzaga Xavier de Barros (BRASIL) e coorientação da Profª Drª Jana Trgalova (FRANÇA).

Banca Examinadora

Prof. Dr. Luiz Gonzaga Xavier de Barros – Presidente e Orientador

Titulação: Doutor em Matemática – Universidade de São Paulo

Instituição: Universidade Anhanguera de São Paulo

Assinatura: _____

Prof.ª Drª Tânia Maria Mendonça Campos – Examinadora Interna

Titulação: Doutora em Matemática – Université Montpellier II

Instituição: Universidade Anhanguera de São Paulo

Assinatura: _____

Prof. Dr. Ubiratan D'Ambrosio – Examinador Interno

Titulação: Doutor em Matemática – Universidade de São Paulo

Instituição: Universidade Anhanguera de São Paulo

Assinatura: _____

Prof.ª Drª Iranete Maria da Silva Lima – Examinadora Externa

Titulação: Doutora em Matemática e Informática – Université Joseph Fourier

Instituição: Universidade Federal de Pernambuco

Assinatura: _____

Prof.ª Drª Rafaela Larsen Ribeiro – Examinadora Externa

Titulação: Doutora em Psicobiologia – Universidade Federal de São Paulo

Instituição: Universidade Federal de São Paulo

Assinatura: _____

RESULTADO: Aprovado.

Biblioteca

Bibliotecária: Lucilene Visintin de Oliveira do Carmo

Assinatura:_____ DATA 23/02/2015.

São Paulo (SP), 23 de fevereiro de 2015.

DEDICATÓRIA

Dedico esta tese aos meus pais Laerte da Fonseca Hora (in memoriam) e Maria Luiza da Silva e a todas as pessoas que depositam na ciência o valor necessário para, sob o abrigo de seus créditos, gozarem dos mais profícuos resultados por ela disponibilizados a sociedade.

AGRADECIMENTOS I

Inicialmente, agradeço a Deus pela possibilidade de gozar de mais esta experiência de vida e das infinitas formas de aprendizagem que me permitiram concluir essa jornada.

Tão infinitamente quanto, sou profundamente grato à Prof.ª Drª Tânia Maria Mendonça Campos, primeiramente, pela mobilização em prol da Educação Matemática brasileira que contagia todo o Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Universidade Anhanguera de São Paulo; em segundo lugar, por todas as formas de incentivo dispensadas a mim, dentro e fora da sala de aula, sempre que observou, ouviu e refletiu sobre as minhas ideias no campo da aprendizagem matemática – pelas vias da trigonometria – sugerindo alternativas para otimizar o foco no objeto de pesquisa; e, em terceiro, pelos contatos com a CAPES e com a Prof.ª Drª Jana Trgalová para viabilizar os meus estudos no exterior – *Université Claude Bernard Lyon I*, na França, através do PSDE – Programa de Doutoramento Sandwíche.

É também especial, o meu intenso sentimento de gratidão, ao Prof. Dr. Luiz Gonzaga Xavier de Barros que, na qualidade de orientador desta tese, não mediu esforços para me acolher, apoiar e ajudar em diferentes momentos da orientação e, fora dela, com zelo, serenidade e competência indispensáveis para possibilitar a inserção e articulação de novas perspectivas de pesquisa sobre a aprendizagem matemática.

Esse caminho que, também permitiu conhecer, desfrutar, ressignificar, ampliar e trocar experiências com outras culturas e teorias, foi oportunizado pelo convívio e orientação da Prof.ª Drª Jana Trgalová, não apenas pela orientação no exterior, mas pelo exemplo de acolhimento, suporte, auxílio na pesquisa, atenção, respeito, conselhos e incentivos durante toda a fase da investigação.

Aos professores da banca de qualificação e/ou defesa, Prof.ª Drª Tânia Maria Mendonça Campos, Prof. Dr. Ubiratan D'Ambrosio, Prof.ª Drª Iranete Maria da Silva Lima e a Prof.ª Drª Rafaela Larsen Ribeiro, pelo cuidado e atenção nas

observações e sugestões dispensadas para que esse trabalho resultasse no perfil esperado pelas agências de pesquisa.

A Prof.ª Drª Marlene Alves Dias pelo competente apoio inicial na orientação desta tese e acolhimento na cidade de São Paulo que contribuiu para a germinação e crescimento intelectual sobre o fenômeno da transição escolar.

A todos os integrantes da equipe de pesquisa EducTice, dirigida pelo Prof. Dr. Eric Sanchez da École Normale Supérieure de Lyon que me acolheram e, durante as reuniões científicas, elencaram vários pontos que favoreceram novas reflexões em torno do objeto de pesquisa. São eles: **G. Aldon** (PRAG, docteur en didactique des maths et TICE), **K. Bécu-Robinault** (MCF, didactique de la physique), **P. Bénech** (PRCE, master en ingénierie pédagogique), **A. Calpe** (PRCE, Mathématiques), **V. Emin** (PRCE, docteure en informatique), **C. Jouneau-Sion** (PRCE, Histoire-Géographie), **C. Loisy** (MCF, psychologie), **R. Monod-Ansaldi** (PRAG, didactique des SVT, docteure en biologie), **M. Prieur** (PRAG, didactique des SVT et TICE), **E. Sanchez, directeur**(MCF, didactique des SVT et TICE), **S. Soury-Lavergne** (MCF, didactique des math et TICE), **J. Trgalova** (MCF, didactique des math et TICE), **L. Trouche** (PR, didactique des math et TICE).

A Prof.ª Drª Alice Gomez do *Centre de Neurosciences Cognitives (CNC, Laboratoire de Psychologie et Neurocognition)* e do *Institut des Sciences Cognitives* da *Université Claude Bernard Lyon I* que, mesmo sem me conhecer, abriu as portas de seu laboratório de neurociência e cognição para escutar atentamente as minhas desconfianças que articulavam os quadros teóricos desta investigação, ajudando-me a ajustar o foco e definir os critérios para a escolha do estímulo sensorial aplicado sobre o protocolo experimental.

AGRADECIMENTOS II

Especialmente, nessa segunda sessão, agradeço à minha família.

Aos meus pais, Laerte da Fonseca Hora (in memoriam) e Maria Luiza da Silva que desde o começo de minha vida, mostravam-me incondicionalmente, os princípios fundamentais para trilhar os caminhos da ordem, respeito e dignidade sinônimos de um amálgama para alcançar os meus objetivos de vida.

A minha irmã Adriana que, antes de um piscar de olhos, absorveu carinhosamente, todas as minhas responsabilidades civis em Aracaju para que eu pudesse cursar o doutorado na cidade de São Paulo, disponibilizou atenção e afeto nos momentos mais difíceis e distantes da minha cidade natal, alimentando-me de energia positiva para chegar até esse final.

Ao meu irmão Laudelino que, além de cuidar também de burocracias, acumulou a responsabilidade de cuidar de nossa mãe e dividiu comigo reflexões no âmbito da ciência e de questões complexas acerca da subjetividade pessoal.

A dupla “SiDan”, Simone (cunhada) e Danilo (sobrinho), sinônimo de alegria e bom humor que me proporcionaram sorrisos e descontração que amortizavam a saudade enquanto estive fora do meu “ninho”.

Aos meus primos Gonzaga (e sua companheira Evanice), Elaine, Ana Clara e Gabriel que cumpriram a missão de estarem presentes com os meus, buscando camuflar, com muita alegria e vivacidade, a minha ausência nos encontros de domingos e nos passeios aracajuanos.

Ao amigo-irmão Marcílio que demonstrou parceria e companheirismo desde o desafio para encontrar um lugar em São Paulo para deixar as minhas 30 caixas de livros antes da minha partida para a França, pela hospedagem em seu apartamento, durante os três meses até a liberação final do visto – regrada a um “*menu*” recheado de bom gosto e que me fez aumentar alguns quilinhos, pela constante presença nos momentos de angústia contagiados de preocupação, cuidado e afeto, pela oportunidade de aprender a conviver com as múltiplas diferenças dos seres humanos valorizando seus pontos positivos ...

AGRADECIMENTOS III

Ao Instituto Federal de Sergipe, representado pelo Magnífico Reitor Prof. MSc. Ailton Ribeiro de Oliveira que sempre acreditou no meu trabalho em prol do desenvolvimento da aprendizagem matemática dos alunos, autorizando de imediato, o meu afastamento da instituição com vencimentos por quatro anos para a realização dos meus estudos de doutoramento, tanto no Brasil como na França; que me incentivou a continuar estudando e pesquisando, pois para ele “eu nasci para fazer isso”; que reconhece o valor do ser humano.

Ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Universidade Anhanguera de São Paulo, representado pela ilustre Profª Drª Tânia Maria Mendonça Campos, por inserir em sua missão o compromisso com essa área do conhecimento, por ter me proporcionado a oportunidade de desenvolver os meus estudos e pesquisa de doutorado nessa universidade.

À *Université Claude Bernard Lyon I*, FRANÇA, representada pela competente Prof.ª Drª Jana Trgalová, minha orientadora no exterior, de junho de 2013 a maio de 2014, por ocasião do “Doutorado Sandwíche” desenvolvido no Programa de Pós-Graduação em Didática da Matemática dessa instituição, pela efetivação das experiências – humana e acadêmica – muito significativas para a constituição da minha formação integral. Ao mesmo tempo, também agradeço ao Instituto Francês de Educação – IFE da École Normale Supérieure de Lyon, pela disponibilidade de espaço físico para o desenvolvimento da pesquisa, do restaurante para as minhas refeições, pelo zelo dos ambientes para ajudar no trabalho: biblioteca, sala de esporte, sala de exposições. Ao Instituto Nacional de Ciências Aplicadas de Lyon – INSA, especialmente, ao Prof. Dr. Guy Athanaze que abriu as portas que tornaram possíveis aplicar os protocolos experimentais para os alunos do curso de engenharia.

À CAPES, pela concessão da bolsa de 12 meses para implementação do “Doutorado Sandwíche” na *Université Claude Bernard Lyon I*, FRANÇA, sob a orientação da Prof.ª Drª Jana Trgalová.

As duas universidades brasileiras por disponibilizarem seus espaços físicos para a aplicação da parte experimental dessa investigação.

A todos os colaboradores: professores do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Universidade Anhanguera de São Paulo pelas intervenções no meu projeto de pesquisa, bem como pelos ensinamentos nas aulas das disciplinas cursadas; colegas de curso, especialmente, Ana Lúcia, Raquel e Michael; aos funcionários da secretaria, Anália, Débora e Guilherme que incondicionalmente atenderam todas as minhas solicitações com muita alegria, estima e consideração; Prof.ª Drª Ivanete Batista dos Santos que aplicou os protocolos experimentais nos cursos de Licenciatura em Matemática e Engenharia; Prof. Dr. Jorge Tadashi Hiratuka que permitiu a aplicação dos mesmos protocolos na turma de Engenharia.

AGRADECIMENTOS IV

Aos 94 sujeitos de pesquisa (80 brasileiros e 14 franceses) que se identificaram e, por isso, foi possível citar: **Brasileiros na França**: Anderson, Kaique, Lucas, Janaina, Jaime, Vinícios, João, Kaoê, Letícia; **Franceses de Lyon**: Letícia Coelho, Teddy, Lala, Sabnè, Florian, Gouéset, Nicolas, Johanna, Alexandra, Guillaunne, Alexis, Sophie, Loic, Baptiste; **Brasileiros**: Brendon, Bruno, Kleyber, Gabriel, Sávio, Franyelle, Danilo, Kimberlyn, Johnson, Marcelo, Antônio, Charliton, Vitor, Sávio H., Maiami, Dalton, Nicholas, Nayara, Louise, Ramon, Josemar, Rafael, Bruno G., Ricardo, Felipe, T. E. C, João P., Matheus, Willian, João Paulo E., Fellipe A., Lourdes, E. C., Lucas L., Luan, Gabriel H., Matheus F., Jersé, Fabrício, Gideval, Matheus C., João Pedro, José Claudio, Felipe M., Ariel, Janaína C., Yvo, Allan, Jhonatas, Wilson, Bruno F., Sillas, Isabella, Willian, Patrick, Tiago, Pedro, Leonardo, Lucas V., Willy M., Victor I., Prdro H. S., Paulo V. Muito obrigado a todos vocês pela oportunidade de dispor da vontade de participar e contribuir para o desenvolvimento da ciência. No corpo da redação dessa tese, seus nomes foram omitidos para preservar a identidade e individualidade, bem como os traços de memória pinçados para análise.

Os códigos **AEB1, AEB2, AEB3,..., BEBSPE10,** utilizados a partir do capítulo VII, não correspondem à ordem dos nomes apresentados acima.

AGRADECIMENTOS V

Aos amigos do Brasil, os meus sinceros agradecimentos por toda e qualquer forma de sinalizar o carinho, atenção e cuidado ao longo dessa jornada: Marleide, Roberta, Célia Limeira, Elisabeth Andrade (Beth), Neila, Denize, Ivanete, Ilda Tavares, Odete, Telma, Ana Lúcia, Raquel, Dirce, Flávio e Claudia, Diva, Andreia (Paraná), Val e Yara. Particularmente, a Denize e Ivanete que partilharam sugestões em algumas fases da escrita do texto e a terapeuta Nina que, pacientemente, me escutou e me auxiliou na reconstrução de cenários mentais que, circularam e, ainda circulam, a minha percepção do mundo, da vida. Agradeço também a Tânia Regina e Artur Gomes do CCHS/IFS pela revisão gramatical e tradução do resumo para a língua inglesa, respectivamente.

Aos novos amigos da França, agradeço imensamente pelo carinho, acolhimento, cuidado, atenção incondicionais para que eu me sentisse bem no meu segundo país: Alfonso e Herve, Joëlle e Yves, Mady, Marina, Aissata, Olga e família, Laurenne, Cai, Kevin, Victor, Iones, Olivier e a todos os colegas e funcionários da CPU, onde eu pude melhorar o meu aprendizado em francês.

FONSECA, L. S. da. **Um estudo sobre o Ensino de Funções Trigonométricas no Ensino Médio e no Ensino Superior no Brasil e França**. 2015, 1v. 495p. Tese de Doutorado. Orientador: Luiz Gonzaga Xavier de Barros. Coorientadora: Jana Trgalová. Universidade Anhanguera de São Paulo, São Paulo (SP).

RESUMO

O objetivo principal deste estudo foi analisar a transição do Ensino das Funções Trigonométricas Ensino Médio-Ensino Superior sob a ótica de quadros da Didática da Matemática e da Neurociência Cognitiva. Centrou-se o foco nas hipóteses de que existe uma ruptura na transição do ensino de Funções Trigonométricas do EM-ES e de que o ensino dessas Funções, tanto no EM como no ES, não leva em conta os princípios da Neurociência Cognitiva para suavizar essa ruptura. Foram desenvolvidas análise epistemológica via levantamento bibliográficos, análises institucionais por meio de documentos oficiais brasileiros e franceses, bem como análise neurocognitiva a partir de Protocolos Experimentais. As primeiras conclusões apontaram para uma ruptura epistemológica nas fronteiras do campo trigonométrico que, consequentemente, foi absorvida pelas relações institucionais esperadas para o Ensino Médio, provocando uma ruptura na transição para o Ensino Superior, confirmada pelas relações pessoais existentes. Sob o abrigo da análise neurocognitiva, pôde ser verificado, neste trabalho, que a Memória de Longo Prazo (MLP) foi pouco evocada sob a presença do estímulo sensorial, mas que, ao mesmo tempo, foi mobilizada pelo sentido embutido no contexto de uma das tarefas propostas. Constatou-se que, tanto no Brasil como na França, existe a ruptura na transição EM-ES causada pela mudança entre os domínios da geometria e das funções e, por outro lado, que a MLP, como princípio neurocognitivo, auxilia na resolução de tarefas sobre as noções de Funções Trigonométricas, desde que existam experiências didáticas centradas em contextos que reúnam sentido e significado.

Palavras-chave: Ensino de Funções Trigonométricas. Transição Ensino Médio-Ensino Superior. Didática da Matemática. Neurociência Cognitiva.

Laerte Silva da Fonseca é natural de Aracaju/SE. Licenciado em Matemática pela Universidade Federal de Sergipe/UFS (1992), Especialista em Ensino de Matemática pela Universidade Federal de Sergipe/UFS (1995), Especialista em Psicopedagogia Clínica pela Faculdade Pio Décimo/FPD (2002), Especialista em Neuropsicologia/UNIFESP/CDN/SP (2012), Especialista em Neuroaprendizagem, Transtorno do Aprender e Psicanálise – Instituto Saber/DF (2013), Mestre em Ensino de Ciências e Matemática pela Universidade Federal de Sergipe/UFS (2011), Mestre em Educação pela Universidade Federal de Sergipe/UFS (2002), realizou estágio de "Doutorado Sandwich" em Didática da Matemática na Universidade Claude Bernard Lyon I/França (2013-2014). É professor do Curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Sergipe – IFS, desde 1993. Contato: laerte.fonseca@uol.com.br

FONSECA, L. S. da. **Une étude de L'enseignement des Fonctions Trigonométriques dans L'enseignement Secondaire et L'enseignement Supérieur au Brésil et France**. 2015 1v. 495 pages. Thèse de Doctorat. Conseiller: Luiz Gonzaga Xavier de Barros. Conseiller adjoint: Jana Trgalová. Université Anhanguera de São Paulo, São Paulo (SP).

RÉSUMÉ

Le but de cette étude était d'analyser la transition de l'éducation des fonctions trigonométriques dans l'école secondaire et éducation supérieure dans la perspective de la Didactique des cadres Mathématiques et Neurosciences Cognitives. Centré accent sur les hypothèses qu'il y a une pause dans la transition entre les fonctions trigonométriques de l'enseignement de l'école secondaire et éducation supérieure et que l'enseignement de ces fonctions, à la fois dans l'enseignement de l'école secondaire comme dans l'éducation supérieure, ne prend pas en compte les principes de neurosciences cognitives pour atténuer cette rupture. L'analyse épistémologique a été développée par l'enquête bibliographique, des analyses institutionnelles de documents officiels brésiliens et français, ainsi que l'analyse neurocognitif de protocoles expérimentaux. Les premiers résultats pointues à une rupture épistémologique dans les limites du champ trigonométriques, et par conséquent, a été absorbé par les relations institutionnelles attendues pour l'école secondaire, provoquant une rupture de la transition à l'enseignement supérieur, confirmé par des relations personnelles existantes. Au titre de l'analyse neurocognitive, il pourrait être vérifiée dans ce travail, que la mémoire à long terme (MLT) a été peu évoqué en présence de stimulus sensoriel, mais en même temps, a été introduit par le sens intégré dans le contexte de l'un des tâches proposées. Il a été constaté que, au Brésil comme en France, il y a une rupture dans la transition l'école secondaire - l'éducation supérieure, causée par le changement entre les domaines de la géométrie et des fonctions et, d'autre part, le MLT, comme principe neurocognitifs, aide à la résolution de tâches sur les notions de fonctions trigonométriques, à condition que les expériences didactiques d'étudiants concentrés remplissant sens et la signification.

Mots-clés: Enseignement des Fonctions Trigonométriques. Transition entre L'école Secondaire comme dans L'éducation Supérieure. Didactique des Mathématiques. Neuroscience Cognitive.

Laerte Silva da Fonseca est né à Aracaju/SE. Licencié en Mathématiques à l'Université Fédérale de Sergipe/UFS (1992), Spécialiste en Enseignement des Mathématiques à l'Université Fédérale de Sergipe/UFS (1995), Spécialiste en Psychopédagogie Clinique à la Faculté Pie Dixième/FPD (2002), Spécialiste en Neuropsychologie/UNIFESP/CDN/SP (2012), Spécialiste en Neuro-apprentissage, Troubles D'apprentissage et Psychanalyse - Institut Saber/DF (2013), Maître dans le Domaine de Science et de L'enseignement des Mathématiques à l'Université Fédérale de Sergipe/UFS (2011), Maître en Education de l'Université fédérale de Sergipe/UFS (2002), a tenu étape de "doctorat de Sandwich" en Didactique des Mathématiques à l'Université Claude Bernard Lyon I/France (2013-2014). Il est professeur de Baccalauréat en Mathématiques de l'Institut Fédéral de Sergipe - IFS depuis 1993. Contact: laerte.fonseca@uol.com.br

FONSECA, L. S. da. **A study on Trigonometric Functions Teaching in Secondary and Higher Education in Brazil and France**. 2015 1v. 495. Doctoral Thesis. Advisor: Luiz Gonzaga Xavier de Barros. Co-advisor: Jana Trgalová. Anhanguera University of São Paulo, São Paulo (SP).

ABSTRACT

The aim of this study was to analyze the transition in teaching Trigonometric Functions from High School (HS) to Higher Education (HE) from the perspective of the didactics of Mathematics and Cognitive Neuroscience frames. The focus was centered on the hypotheses that there is a rupture in teaching Trigonometric Functions during the transition from HS to HE and that the teaching of these functions, in HS and in HE, does not take into account the principles of Cognitive Neuroscience to soften this rupture. Epistemological analysis were developed via bibliographic survey, institutional analyzes using Brazilian and French official documents, as well as neurocognitive analysis from Experimental Protocols. The initial conclusions pointed to an epistemological rupture in the trigonometric field boundaries that, consequently, was absorbed by the institutional relations expected for HS, causing a break in the transition to HE, confirmed by the existing personal relationships. Under the shelter of neurocognitive analysis, it could be verified, in this work, that the Long Term Memory (LTM) was little evoked in presence of sensory stimulus, but at the same time, was brought in by the built-in sense in the context of one of the proposed tasks. It was found that, in Brazil as in France, there is a break in the transition from HS to HE caused by the change between the fields of geometry and of the functions and, on the other hand, the LTM, as a neurocognitive principle, assists in solving tasks on the notions of Trigonometric Functions, once there are didactic experiences centered on contexts that put sense and meaning together.

Keywords: Trigonometric Functions Teaching. High School-Higher Education Transition. Didactics of Mathematics. Cognitive Neuroscience.

Laerte Silva da Fonseca was born in Aracaju/SE. He has a degree in Mathematics from the Federal University of Sergipe/UFS (1992); is Specialist in Mathematics Teaching by the Federal University of Sergipe/UFS (1995); Specialist in Clinical Psychopedagogy by Pio Décimo Faculty/FPD (2002); Specialist in Neuropsychology/UNIFESP/CDN/SP (2012); Specialist in Neuro-learning, Learning Disorder and Psychoanalysis – Saber Institute / DF (2013); he is Master in Science and Mathematics Teaching by the Federal University of Sergipe/UFS (2011); Master in Education by the Federal University of Sergipe/UFS (2002), held a stage of Split PhD in Didactics of Mathematics at the University Claude Bernard Lyon I/France (2013-2014). He is professor of the Bachelor course in Mathematics at the Federal Institute of Sergipe - IFS since 1993. Contact: laerte.fonseca@uol.com.br

LISTA DE FIGURAS

Figura 01 – Caminhos para a compreensão da DAMFT 56

Figura 02 – Relação entre Conhecimento, Noções intuitivas e tipos de modelos..117

Figura 03 – Relação entre Conhecimento, Noções intuitivas e subdivisões entre os modelos 119

Figura 04 – O lugar da Atividade Matemática 151

Figura 05 – Modelo da Organização Praxeológica de CHEVALLARD (1998) 153

Figura 06 – Constituição da Técnica, τ: o funcionamento do sistema de O_o e O_{no}.....157

Figura 07 – Escala dos Níveis de Co-determinação 160

Figura 08 – Exemplo do NT da Atividade Matemática 163

Figura 09 – Exemplo do NM da Atividade Matemática 163

Figura 10 – Exemplo do ND da Atividade Matemática 164

Figura 11 – Esquema das ramificações relacionadas ao estudo do cérebro 172

Figura 12 – Classificação anatômica básica do SNC 174

Figura 13 – Corte sagital "A": SNC 175

Figura 14 – Corte sagital "B": face medial do hemisfério direito do cérebro (com cerebelo removido) 175

Figura 15 – Vista superior de um telencéfalo humano 177

Figura 16 – Vistas dos cinco Lobos 177

Figura 17A – Vista sagital de um encéfalo 178

Figura 17B – Vista sagital de um diencéfalo 178

Figura 18 – Vista sagital da anatomofisiologia parcial do cérebro 180

Figura 19 – Modelo simplificado do fluxo e da arquitetura cerebral da aquisição da informação 181

Figura 20 – **Unidade I**: *Alerta e Atenção* 182

Figura 21 – **Unidade II**: *Codificação* 182

Figura 22 – **Unidade III**: *Planificação* 183

Figura 23 – Arquitetura da anatomofisiologia neurocognitiva 183

Figura 24 – Modelo ampliado do fluxo e da arquitetura cerebral da aquisição da informação 185

Figura 25 – Principais Funções Cognitivas articuladas as Habilidades Matemáticas 187

Figura 26 – Esboço parcial do fluxo das Funções Cognitivas 188

Figura 27 – Circuitaria das Funções Cognitivas 189

Figura 28 – Esquema de um neurônio 191

Figura 29 – Esquema da transmissão de um impulso nervoso (estímulo) através de uma sinapse química 191

Figura 30 – Neuromediadores mais comuns 192

Figura 31 – Esquema Epistemológico do Campo Trigonométrico 199

Figura 32 – Aplicação de noções de semelhança de triângulos retângulos 204

Figura 33 A – Noções de projeções ortográficas 205

Figura 33 B – Noções de projeções ortográficas 205

Figura 34 – Noções de Trigonometria Esférica 207

Figura 35 – Gênesi da Atividade Matemática 231

Figura 36 – Temas referentes ao setor “espaço e forma” do domínio da geometria 235

Figura 37 – Temas referentes ao setor “grandezas e medidas” do domínio da geometria 236

Figura 38 – Unidades temáticas do eixo estruturador da Álgebra 242

Figura 39 – Proposta de distribuição dos temas concomitantemente nos três anos do Ensino Médio 243

Figura 40 – Lugar do *setor* “Funções Trigonométricas” nas OCEM 246

Figura 41 – T_{1LDEF9} e seus respectivos subtipos 262

Figura 42 – T_{2LDEF9} e seus respectivos subtipos 262

Figura 43 – T_{3LDEF9} e seus respectivos subtipos 263

Figura 44 – T_{4LDEF9} e seus respectivos subtipos.....263

Figura 45 – T_{5LDEF9} e seus respectivos subtipos.....264

Figura 46 – T_{1LDEM1} e seus respectivos subtipos.....275

Figura 47 – T_{2LDEM1} e seus respectivos subtipos.....275

Figura 48 – T_{3LDEM1}.....276

Figura 49 – T_{4LDEM1} 276

Figura 50 – T_{2LDEM2} (θ_{1LDEM2}) 285

Figura 51 – T_{4LDEM2} (θ_{2LDEM2} e θ_{3LDEM2}).....285

Figura 52 – $T_{11LDEM2}$ (θ_{4LDEM2}).....285

Figura 53 – Raciocínio funcional apoiado no raciocínio proporcional (regra de três).....288

Figura 54 – Questão 164, gabarito “E”.....297

Figura 55 – Resolução da Questão164.....297

Figura 56 – Questão 174, gabarito “B**”**.....300

Figura 57 – Resolução da Questão 174.....300

Figura 58 – Detalhamento da resolução da Questão 174.....301

Figura 59 – Questão 160, gabarito “C”.....304

Figura 60 – Resolução da Questão 160.....304

Figura 61 – Questão 158, gabarito “B”.....307

Figura 62 – Resolução (R_1) da Questão 158.....307

Figura 63 – Resolução (R_2) da Questão 158.....307

Figura 64 – Questão 156, gabarito “E”.....310

Figura 65 – Resolução da Questão 156.....310

Figura 66 – Funções Trigonométricas como uma das funções essenciais para o Cálculo.....318

Figura 67 – Natureza periódica das Funções Trigonométricas.....319

Figura 68 – Transformação de Funções Trigonométricas por esticamento.....319

Figura 69 – Esquema da Transição Vertical no Brasil (TBr).....323

Figura 70 – T_{1LD4} e $T_{2\ LD4}$.....346

Figura 71 – $T_{3\ LD4}$.....346

Figura 72 – $T_{4\ LD4.}$.....346

Figura 73 – $T_{5\ LD4.}$.....347

Figura 74 – $T_{6\ LD4.}$.....347

Figura 75 – T_{5LD4} do bloco ET_m.....349

Figura 76 – T_{5LD4} do bloco EA_m.....349

Figura 77 – T_{2LD3} e seus respectivos subtipos.....354

Figura 78 – T_{4LD3} e seus respectivos subtipos.....354

Figura 79 – T_{6LD3} e seus respectivos subtipos.....354

Figura 80 – T_{7LD3} e/ou T_{8LD3}.....355

Figura 81 – Esquema da Transição Vertical na França (TFr).....377

Figura 82 – Mapa da Circuitaria Neurocognitiva Ativada.....391

Figura 83 – Amostra brasileira BEB1.....407

Figura 84 – Amostra brasileira BEF2.....408

Figura 85 – Excerto da Amostra BEB5.....416

Figura 86 – Excerto da Amostra AEB2.....417

Figura 87 – Excerto da Amostra BEF5.....418

Figura 88 – Excerto da Amostra AEF5.....419

Figura 89 – Etapas de formação da MLP.....421

Figura 90 – Amostra brasileira AEB2.....430

Figura 91 – Amostra francesa AEF1.....430

Figura 92 – Amostra brasileira BEB1.....432

Figura 93 – Amostra francesa BEF2.....433

Figura 94 – Esquema da Transição Horizontal comparando-se Brasil e França....448

Figura 95 – Articulações entre a Didática da Matemática e a Neurociência Cognitiva.....460

LISTA DE QUADROS

Quadro 01
Base Teórica da Aprendizagem nos Cursos de Licenciatura em Matemática.....67

Quadro 02
Circuitaria das Funções Cognitivas (*fc*).....72

Quadro 03
Lócus das Dificuldades de Aprendizagem Escolar (LDAE).....73

Quadro 04
Lócus das Dificuldades de Aprendizagem Escolar (LDAE).....74

Quadro 05
Lócus das Dificuldades de Aprendizagem Escolar (LDAE) 75

Quadro 06
Lócus das Dificuldades de Aprendizagem Escolar (LDAE).....76

Quadro 07
Lócus das Dificuldades de Aprendizagem Escolar (LDAE) 77

Quadro 08
Lócus das Dificuldades de Aprendizagem Matemática/FT (LDAMFT) 78

Quadro 09
Lócus das Dificuldades de Aprendizagem Matemática/FT (LDAMFT) 79

Quadro 10
Lócus das Dificuldades de Aprendizagem Matemática/FT (LDAMFT).....80

Quadro 11
Lócus das Dificuldades de Aprendizagem Matemática/FT (LDAMFT) 81

Quadro 12
Lócus das Dificuldades de Aprendizagem Matemática/FT (LDAMFT) 81

Quadro 13
Lócus das Dificuldades de Aprendizagem Matemática/FT (LDAMFT).....82

Quadro 14
Lócus das Dificuldades de Aprendizagem Matemática/FT (LDAMFT) 83

Quadro 15
Lócus das Dificuldades de Aprendizagem Matemática/FT (LDAMFT) 83

Quadro 16
Lócus das Dificuldades de Aprendizagem Matemática/FT (LDAMFT) 84

Quadro 17
Lócus das Dificuldades de Aprendizagem Matemática/FT (LDAMFT).....85

Quadro 18
Lócus das Dificuldades de Aprendizagem Matemática/FT (LDAMFT) 86

Quadro 19
Lócus das Dificuldades de Aprendizagem Matemática/FT (LDAMFT) 87

Quadro 20
Lócus das Dificuldades de Aprendizagem Matemática/FT (LDAMFT) 87

Quadro 21
Mapeamento das CDAE e DAMFT nos Programas de Pós-Graduação pesquisados.....88

Quadro 22
Rastreamento nas fontes Internacionais de Educação Matemática (anais do CERME*)* 132

Quadro 23
Sistemas Funcionais de Luria 171

Quadro 24
Mapeamento Histórico-epistemológico a partir de Kennedy (1992) 210

Quadro 25
Idade Antiga: Marcos cronológicos e elementos do desenvolvimento das noções das Funções Trigonométricas 212

Quadro 26
Idade Média: Marcos cronológicos e elementos do desenvolvimento das noções das Funções Trigonométricas.....213

Quadro 27
Idade Moderna: Marcos cronológicos e elementos do desenvolvimento das noções das Funções Trigonométricas.....214

Quadro 28
Civilização Babilônica 215

Quadro 29
Civilização Egípcia, exemplo (a) 216

Quadro 30
Civilização Egípcia, exemplo (b) 216

Quadro 31
Civilização Chinesa 217

Quadro 32
Civilização Grega, exemplo (a) 218

Quadro 33
Civilização Grega, exemplo (b) 219

Quadro 34
Civilização Grega, exemplo (c) 219

Quadro 35
Civilização Grega, exemplo (d) 220

Quadro 36
Civilização Grega, exemplo (e) 220

Quadro 37
Civilização Grega, exemplo (f) 221

Quadro 38
Civilização Grega, exemplo (g) 221

Quadro 39
Civilização Grega, exemplo (h) 222

Quadro 40
Civilização Indiana 222

Quadro 41
Civilização Árabe 223

Quadro 42

Marcadores das Transições Epistemológicas (MT_E) 225

Quadro 43

Mapeamento de Sinais encontrados nos Programas Oficiais de Ensino de Matemática (Educação Básica) no Brasil.....249

Quadro 44
Mudanças entre os Domínios Matemáticos. 252

Quadro 45

Esquema dos **"DADOS TRIGONOMÉTRICOS DE ENTRADAS"** por meio dos Livros Didáticos da coleção *"Praticando Matemática"* do Ensino Fundamental II no Brasil – 2014.....255

Quadro 46

Suposta Estruturação da Organização Matemática nos Livros Didáticos da coleção Praticando Matemática.....257

Quadro 47

Praxeologia existente nos tipos e subtipos de Tarefas T do Livro Didático "Praticando Matemática" para 9º ano.....261

Quadro 48

Estatística dos tipos de Tarefas T encontradas no Livro Didático "Praticando Matemática" para o 9º 264

Quadro 49

Mapeamento de Sinais encontrados no Livro Didático "Praticando Matemática" do Ensino Fundamental no Brasil 267

Quadro 50

Esquema dos **"DADOS TRIGONOMÉTRICOS DE ENTRADAS"** por meio dos Livros Didáticos da coleção *"Matemática: contextos & aplicações"* do Ensino Fundamental II no Brasil – 2014.....270

Quadro 51

Praxeologia existente nos tipos e subtipos de Tarefas T Livro Didático "Matemática: contexto & aplicações" para 1º ano 274

Quadro 52

Estatística dos tipos de Tarefas T encontradas no Livro Didático "Matemática: contexto & aplicações" para 1º ano 277

Quadro 53
Praxeologia existente nos tipos de Tarefas T Livro Didático “Matemática: contexto & aplicações” para 2º ano 284

Quadro 54
Estatística dos tipos de Tarefas T encontradas no Livro Didático “Matemática: contexto & aplicações” para 2º ano 286

Quadro 55
Mapeamento de Sinais encontrados no Livro Didático “Matemática: contexto & aplicações” para o Ensino Médio no Brasil 290

Quadro 56
Quantitativo de questões referentes às noções das Funções Trigonométricas nos ENEMs 294

Quadro 57
Habilidades 19 a 23 296

Quadro 58
Habilidades 10 a 14 299

Quadro 59
Habilidades 15 a 18 303

Quadro 60
Habilidades 15 a 18 306

Quadro 61
Habilidades 15 a 18 309

Quadro 62
Mapeamento de Sinais encontrados nas Macroavaliações (ENEM) para o Ensino Médio no Brasil 311

Quadro 63
Excerto da grade curricular do curso de Licenciatura em Matemática da USP.....316

Quadro 64
Excerto do plano de ensino da disciplina Cálculo para funções de uma variável real I 316

Quadro 65

Distribuição das Questões na Prova de Matemática do ENADE 2011 321

Quadro 66

Mapeamento de Sinais encontrados nos Documentos Oficiais de Ensino de Matemática (Ensino Superior) no Brasil 322

Quadro 67

Levantamento dos Documentos Oficiais de Ensino de Matemática no sistema brasileiro de educação 324

Quadro 68

Estruturação parcial do setor “figuras planas” 330

Quadro 69

Praxeologia existente no setor “figuras planas” 330

Quadro 70

Estruturação parcial do setor “figuras planas” 331

Quadro 71

Praxeologia existente no setor “figuras planas” 332

Quadro 72

Estruturação parcial do tema “trigonometria” 333

Quadro 73

Estruturação parcial do tema “trigonometria: círculo trigonométrico” 335

Quadro 74

Praxeologia existente no tema “trigonometria: círculo trigonométrico” 335

Quadro 75

Estruturação parcial do tema “produto escalar no plano” 336

Quadro 76

Praxeologia existente no tema “produto escalar no plano” 336

Quadro 77

Estruturação parcial do tema “funções seno e cosseno” 337

Quadro 78

Mapeamento de Sinais encontrados nos Programas Oficiais de Ensino de Matemática (Ensino Secundário) na França 338

Quadro 79
Mudanças entre os Domínios Matemáticos 339

Quadro 80

Esquema dos **"DADOS TRIGONOMÉTRICOS DE ENTRADAS"** por meio dos Manuais da coleção *SÉSAMATH"* do Collége na França – 2014 341

Quadro 81

Estruturação da Organização Matemática nos manuais da coleção Sésamath.....342

Quadro 82

Praxeologia existente nos tipos de Tarefas T do Livro Didático (manual) para a 4ª série 345

Quadro 83

Estatística dos tipos de Tarefas T encontradas no manual para 4ª série.....348

Quadro 84

Praxeologia existente nos tipos e subtipos de Tarefas T do Livro Didático (manual) para a 3ª série 353

Quadro 85

Estatística dos tipos de Tarefas T encontradas no manual para 3ª série 355

Quadro 86

Mapeamento de Sinais encontrados nos Manuais de Ensino de Matemática (Ensino Secundário) na França 357

Quadro 87

Esquema dos **"DADOS TRIGONOMÉTRICOS DE ENTRADAS"** por meio dos Manuais do Lycée na França – 2014 360

Quadro 88
Praxeologia existente nos tipos de Tarefas T do manual para 2deS 364

Quadro 89

Praxeologia existente nos tipos de Tarefas T do manual para 1re*S* 367

Quadro 90

Mapeamento de Sinais encontrados nos Manuais de Ensino de Matemática (Ensino Secundário) na França 369

Quadro 91

Mapeamento de Sinais encontrados nos Documentos Oficiais de Ensino de Matemática (Ensino Superior) na França 376

Quadro 92

Levantamento dos Documentos Oficiais de Ensino de Matemática no sistema francês de educação 378

Quadro 93

Amostra Principal – França: UCBL I – Engenharia 402

Quadro 94

Amostra Secundária 1(a) – Brasil: UD1 – Licenciatura em Matemática 403

Quadro 95

Amostra Secundária 1(b) – Brasil: UD1 – Engenharia 403

Quadro 96

Amostra Secundária 2 – Brasil: UD2 – Engenharia 403

Quadro 97

Correspondência entre as diferentes classificações 405

Quadro 98

Desempenho dos estudantes na TAREFA “A” – Amostra Principal 406

Quadro 99

Desempenho dos estudantes na TAREFA “A” – Amostra Secundária 1(a) 409

Quadro 100

Desempenho dos estudantes na TAREFA “A” – Amostra Secundária 1(b).....410

Quadro 101

Desempenho dos estudantes na TAREFA “A” – Amostra Secundária 2 411

Quadro 102

Desempenho dos estudantes na TAREFA “B” – Amostra Principal 413

Quadro 103
Desempenho dos estudantes na TAREFA “B” – Amostra Secundária 1(a) 423

Quadro 104
Desempenho dos estudantes na TAREFA “B” – Amostra Secundária 1(b) 425

Quadro 105
Desempenho dos estudantes na TAREFA “B” – Amostra Secundária 2 426

Quadro 106
Desempenho dos estudantes na TAREFA “C” – Amostra Principal 428

Quadro 107
Desempenho dos estudantes na TAREFA “C” – Amostra Secundária 1(a) 436

Quadro 108
Desempenho dos estudantes na TAREFA “C” – Amostra Secundária 1(b) 437

Quadro 109
Desempenho dos estudantes na TAREFA “C” – Amostra Secundária 2 438

Quadro 110
Evolução das relações institucionais esperadas via Programas Oficiais 443

Quadro 111
Evolução das relações institucionais existentes via Livros Didáticos 443

Quadro 112
Evolução das relações pessoais existentes via Protocolos Experimentais 446

LISTA DE TABELAS

Tabela 01

Rastreamento nos bancos de Dissertações e Teses do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da PUC/SP (desde 1975) 99

Tabela 02

Rastreamento nos bancos de Dissertações e Teses do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática UNESP/SP (desde 1984) 99

Tabela 03

Rastreamento nos bancos de Dissertações e Teses do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática UFMS (desde 2007) 100

Tabela 04

Rastreamento nos bancos de Dissertações e Teses do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática UNIAN (desde 2008) 105

Tabela 05

Panorama geral do levantamento nas fontes Nacionais de Educação Matemática (bancos de Dissertações e Teses nos Programas de Pós-Graduação em Educação Matemática do Brasil) 106

LISTA DE SIGLAS

AH – Atividade Humana

AM – Atividade Matemática

AMM – Análise das Macroavaliações de Matemática

BAC – Baccalauréat

CDAE – Características para o Desenvolvimento da Aprendizagem Escolar

CEB – Câmara de Educação Básica

CERME – Congresso of European Research in Mathematics Education

CNE – Conselho Nacional de Educação

CP – Conhecimento Prévio

DAM – Dificuldade de Aprendizagem Matemática

DAMFT – Dificuldade de Aprendizagem Matemática relativas às Funções Trigonométricas

DAp – Dificuldade de Aprendizagem

DCN – Diretrizes Curriculares Nacionais

DM – Didática da Matemática

EM – Ensino Médio

SEM – Education Mathematics Studies

ENAD – Exame Nacional de Desempenho de Estudantes

ENEM – Exame Nacional do Ensino Médio

ES – Ensino Superior

FT – Funções Trigonométricas

IDEB – Índice de Desenvolvimento da Educação Básica

IFS – Instituto Federal de Sergipe

IME – Instituto de Matemática e Estatística

INSA – Instituto Nacional de Ciências Aplicadas de Lyon

IS – Instituições Sociais

LDB – Lei de Diretrizes e Bases

MCP – Memória de Curto Prazo

MEC – Ministério da Educação e Cultura

MLP – Memória de Longo Prazo

MRMT – Matriz de Referência de Matemática e suas Tecnologias

MT – Memória de Trabalho

MT_E – Marcadores das Transições Epistemológicas

NC – Neurociência Cognitiva

ND – Nível Disponível

NFC – Níveis de Funcionamento do Conhecimento

NM – Nível Mobilizável

NT – Nível Técnico

OCDE – Organização de Cooperação e de desenvolvimento Econômico

OM – Organização Matemática

OMP – Organização Matemática Pontual

OMS – Organização Mundial da Saúde

PCNs – Parâmetros Curriculares Naconiais

PISA – Programme for International Student Assessment

PME – Psychology of Mathematics Education

PNLD – Programa nacional do Livro Didático

PUC/SP – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo

RDM – Recherche en Didactique des Mathématiques

$\mathbf{R_{DM}}$ – Relação com a Didática da Matemática

$\mathbf{R_{NC}}$ – Relação com Neurociência Cognitiva

SARESP – Sistema de Avaliação do Rendimento Escolar do Estado de São Paulo

S_{LDEF} – Sinais no Livro Didático do Ensino Fundamental

S_{LDEM} – Sinais no Livro Didático do Ensino Médio

S_{LDESuB} – Sinais no Livro Didático do Ensino Superior no Brasil

S_{MAESuB} – Sinais nas Macroavaliações para o Ensino Superior no Brasil

S_{maESuF} – Sinais no Livro Didático de Ensino de Matemática (Ensino Superior) na França

S_{MAvEM} – Sinais nas Macroavaliações para o Ensino Médio

S_{mC} – Sinais nos Manuais de Ensino de Matemática (Collège) na França

S_{mESuF} – Sinais no Livro Didático de Ensino de Matemática (Ensino Superior) na França

S_{mL} – Sinais nos Manuais de Ensino de Matemática (Lycée) na França

SNC – Sistema Nervoso Central

S_{pEFu} – Sinais dos programas do Ensino Fundamental

S_{pEMe} – Sinais dos programas do Ensino Médio

S_{pESe} **–** Sinais dos programas dos Ensino Secundário

S_{pESuB} **–** Sinais dos programas do Ensino Superior no Brasil

S_{pESuF} – Sinais nos Documentos Oficiais de Ensino de Matemática (Ensino Superior) na França

TAD – Teoria Antropológica do Didático

TAS – Teoria da Aprendizagem Significativa

TDAH – Transtorno de Déficit de Atanção e Hiperatividade

TDM – Transtorno Depressivo Maior

TOC – Transtorno Obsessivo Compulsivo

TSD – Teoria das Situaçõoes Didáticas

UCBL I – Université Claude Bernard Lyon I

UFMS – Universidade Federal do Mato Grosso do Sul

UNESP – Universidade Estadual Paulista de Rio Claro

UNIAN – Universidade Anhanguera de São Paulo

USP – Universidade de São Paulo

UD1 e UD2 – Universidades distintas

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO 40

CAPÍTULO I 48

Funções Trigonométricas: da identificação das Dificuldades de Aprendizagem Matemática à busca de uma solução sob a ótica da Didática da Matemática e da Neurociência Cognitiva. 48

Considerações Iniciais 48

1.1 – As investigações de Fonseca (2002, 2011) no Ensino Médio: motivações, descobertas e proposições. 50

1.2 – As dificuldades de aprendizagem como sinal das queixas da entrada para o Ensino Superior: perspectivas atuais. 52

1.2.1 – Marcadores, relações teóricas e análises das DAM. 71

1.2.1.1 – Programa de Pós-Graduação em Educação da URB. 73

1.2.1.2 – Programa de Pós-Graduação em Psicologia da USP. 74

1.2.1.3 – Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da PUC/SP. 78

1.2.1.4 – Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da UNFESP – Rio Claro/SP. 82

1.2.1.5 – Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da UFMS. 82

1.2.1.6 – Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da UNIAN/SP. 83

1.2.1.7 – Programa de Pós-Graduação da UFS. 87

1.2.2 – Resultado final do mapeamento das DAM. 88

CAPÍTULO II 90

Um panorama da Transição do Ensino das Funções Trigonométricas EM-ES: elementos norteadores da pesquisa. 90

Considerações iniciais 90

2.1 – O Estado da Arte: 91

2.1.1 – O cenário nacional: 94

2.1.2 – O cenário internacional: 107

2.2 – Problemática da pesquisa: 135

2.3 – Objetivos da Pesquisa: 138

2.3.1 – Objetivo Geral: 138

2.3.2 – Objetivos Específicos: 140

2.4 – Metodologia da Pesquisa: 142

CAPÍTULO III 147

Quadros teóricos para a conformação de uma perspectiva sobre a Transição do Ensino das Funções Trigonométricas EM-ES: enlaces entre a Didática da Matemática e a Neurociência Cognitiva. 147

Considerações iniciais 147

3.1 – Quadros Teóricos da Didática da Matemática: 150

3.1.1 – A Teoria Antropológica do Didático – TAD 150

3.1.2 – Os Níveis de Funcionamento do Conhecimento – NFC 162

3.2 – Quadros Teóricos da Neurociência Cognitiva: 164

3.2.1 – A Perspectiva da Neurociência Cognitiva – PNC 164

3.2.1.1 – Breve contextualização histórica: as origens da ciência do cérebro. 166

3.2.1.2 – Definições, classificações e princípios relacionados. 171

3.2.1.3 – Arquitetura do cérebro: a neuroanatomofisiologia do encéfalo. 174

3.2.1.4 – Mecanismo cerebral de aquisição da informação. 180

3.2.2 – Abordagem das Funções Cognitivas – AFC 185

CAPÍTULO IV 195

História e epistemologia das Funções Trigonométricas: iluminação de rupturas nas transições entre os níveis de ensino. 195

Considerações Iniciais 195

4.1 – Fundamentos Históricos-epistemológicos das Funções Trigonométricas: 196

4.2 – Marcadores das Transições Epistemológicas (MT_E): 225

CAPÍTULO V 227

Análise Institucional no Brasil: pela compreensão vertical da transição do Ensino das Funções Trigonométricas EM-ES. 227

Considerações Iniciais 227

5.1 – Educação Básica 232

5.1.1 – Análise dos Documentos Oficiais (Programas de Ensino de Matemática) 232

5.1.1.1 – Programas de Ensino de Matemática: PARÂMETROS CURRICULARES NACIONAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL (PCNEF). 232

5.1.1.2 – Programas de Ensino de Matemática: PARÂMETROS CURRICULARES NACIONAIS DO ENSINO MÉDIO (PCNEM). 237

5.1.1.3 – Programas de Ensino de Matemática: PCN+: ENSINO MÉDIO – orientações educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais. 239

5.1.1.4 – Programas de Ensino de Matemática: ORIENTAÇÕES CURRICULARES PARA O ENSINO MÉDIO (OCEM). 244

5.1.2 – Análise dos Livros Didáticos: 253

5.1.2.1 – Livros de Matemática para o Ensino Fundamental: 253

5.1.2.1.1 – O Livro Didático de Matemática para o 9ª ano: 259
5.1.2.2 – Livros Didáticos de Matemática para o Ensino Médio: 268
5.1.2.1.2 – O Livro Didático de Matemática para o 2º ano: 279
5.1.2.1.3 – O Livro Didático de Matemática para o 3º ano: 289
5.1.3 – Análise das Macroavaliações de Matemática (AMM) 291
5.1.3.1 – ENEM 2009: Função Trigonométrica 295
5.1.3.2 – ENEM 2010: Função Trigonométrica 302
5.1.3.3 – ENEM 2011: Função Trigonométrica 305
5.1.3.4 – ENEM 2012: Função Trigonométrica 308
5.1.3.5 – ENEM 2013: Função Trigonométrica 309
5.2 – Ensino Superior 315
5.2.1 – Análise dos Documentos Oficiais (Planos de Ensino de Cálculo) 315
5.2.2 – Análise dos Livros Didáticos de Cálculo. 317
5.2.3 – Análise das Macroavaliações de Matemática (Exames) 320
5.3 – Transição do Ensino das Funções Trigonométricas Ensino Secundário-Ensino Superior no Brasil. 322
CAPÍTULO VI 327
Análise Institucional na França: pela compreensão vertical da transição do Ensino das Funções Trigonométricas EM-ES. 327
Considerações Iniciais 327
6.1 – Ensino Secundário 329
6.1.1 – Análise dos Documentos Oficiais (Programas de Ensino de Matemática) 329
6.1.1.1 – Programas de Ensino de Matemática (*Classe 4ème – Collège*) 329
6.1.1.2 – Programas de Ensino de Matemática (Classe 3ème – Collège) 331
6.1.1.3 – Programas de Ensino de Matemática (Classe Seconde G – Lycée) 333
6.1.1.4 – Programas de Ensino de Matemática (Classe 1ème S – Lycée) 334
6.1.1.5 – Programas de Ensino de Matemática (Classe Terminale S – Lycée) 337
6.1.2 – Análise dos Manuais: 339
6.1.2.1 – Manuais de Matemática para o Collège: 339
6.1.2.1.1 – Os Manuais de Matemática para a 4ª série (4ème) 344
6.1.2.1.2 – Os Manuais de Matemática para a 3ª série (3ème) 350
6.1.2.2 – Manuais de Matemática para o Lycée: 358
6.1.2.2.1 – O Manual de Matemática para a $2^{de}S$. 361
6.1.2.2.2 – O Manual de Matemática para a $1^{re}S$ 365

6.1.2.2.3 – O Manual de Matemática para a *Terminale S*. 368
6.1.3 – Análise das Macroavaliações de Matemática..... 370
6. 2 – Ensino Superior 372
6.2.1 – Análise dos Documentos Oficiais (Programas de Ensino) 372
6.2.2 – Análise dos Livros Didáticos de Cálculo (Manuais)..... 374
6.2.3 – Análise das Macroavaliações de Matemática (Exames) 375
6.3 – Transição do Ensino das Funções Trigonométricas Ensino Secundário-Ensino Superior na França. 376
CAPÍTULO VII 381
Análise Neurocognitiva: possibilidades de articulação entre o Nível de Funcionamento do Conhecimento e a Memória de Longo Prazo por meio de tipos de Tarefas relativas às noções das Funções Trigonométricas do Ensino Médio supostamente disponíveis no Ensino Superior..... 381
Considerações iniciais 381
7.1 – Elementos da Didática da Matemática: 383
7.1.1 – Considerações da análise epistemológica (C_{AE}):..... 383
7.1.2 – Considerações dos NFC (C_{NFC}) 384
7.1.3 – Considerações sobre a escolha das tarefas (C_{ET})..... 384
7.1.4 – Considerações da análise a priori (C_{AaP}):..... 385
7.2 – Elementos da Neurociência Cognitiva: 389
7.2.1 – Considerações sobre a MLP (C_{MLP}): 389
7.2.2 – Considerações sobre o mapa da circuitaria neurocognitiva articulado pela MLP (C_{MLP}): 390
7.2.3 – Considerações sobre os traços mnemônicos esperados pela evocação da MPL durante a resolução das tarefas propostas: (C_{TME}) 392
7.3 – Cenário da Experimentação: 400
7.3.1 – População e amostra da pesquisa: 400
7.3.2 – Elaboração dos instrumentos de pesquisa – os Protocolos:..... 401
7.3.3 – Metodologia de aplicação dos instrumentos de pesquisa – os Protocolos:..... 401
7.3.4 – Análise dos Protocolos Experimentais coletados: 402
7.3.4.1 – Codificação das amostras: 402
7.3.4.2 – Desempenho dos participantes da pesquisa nas tarefas A, B e C do protocolo experimental: 404
7.3.4.2.1 – Desempenho dos participantes da pesquisa na tarefa A:..... 405
7.3.4.2.2 – Desempenho dos participantes da pesquisa na tarefa B:..... 412
7.3.4.2.3 – Desempenho dos participantes da pesquisa na tarefa C: 427

CAPÍTULO VIII 440

Análise Comparativa entre Brasil e França: pela compreensão horizontal da transição do Ensino das Funções Trigonométricas EM-ES. 440

Considerações iniciais 440

8.1 – Evolução das relações institucionais e pessoais 442

8.1.1 – Evolução das relações institucionais esperadas e existente 442

8.1.2 – Evolução das relações pessoais existente 446

8.2 – Evolução das noções de Funções Trigonométricas no Brasil e na França 447

CONCLUSÃO E PERSPECTIVAS DE PESQUISA 451

REFERÊNCIAS 463

ANEXOS 483

ANEXO 01 484

ANEXO 02 486

ANEXO 03 488

ANEXO 04 491

ANEXO 05 493

INTRODUÇÃO

O objetivo principal desta pesquisa foi analisar a transição do Ensino das Funções Trigonométricas Ensino Médio-Ensino Superior (EM-ES), sob a ótica da articulação entre os quadros da Didática da Matemática e da Neurociência Cognitiva.

Inicialmente, as motivações dessa investigação decorreram dos resultados observados por Fonseca (2002, 2011), no Ensino Médio, das lacunas verificadas em reiteradas revisões de literatura, notada pela ausência de articulação entre os diferentes objetos relacionados, no objetivo geral dessa pesquisa, na inspiração dos trabalhos de Artigue (1995, 2004), Dias (1998), Dias *et al* (2005), Dias, Campos e Karrer (2009), Dias, Campos e Coletti (2009), Dias, Andrade e Campos (2010), Gueudet (2008a, 2008b), Vleeschouwer (2010), Campos, Artigue e Dias (2012), dentre outros; quando se debruçaram sobre o fenômeno da transição escolar, e, por último, sobre as aprofundadas reflexões, acerca das condições determinantes do bem estar individual, como requisito primeiro para que exista a possibilidade da aprendizagem matemática escolarizada.

Outra inquietação é a consequência imediata de um possível insucesso da transição entre os mencionados níveis de ensino, sobretudo, caso a opção dos estudantes seja pelo curso de Licenciatura em Matemática. Nessa possível frustação está fundado o ponto de vista de Nasser (2009), que confere à falta de conhecimentos prévios, a etiologia das dificuldades dos estudantes, na disciplina Cálculo I do Ensino Superior, bem como sobre a dualidade concreto-abstrato defendida por Vleeschouwer (2010). Para Sierpinska (1992), vinculam-se a estas, 16 obstáculos inter-relacionados ao conceito de função, sendo um desses, a equivocada compreensão de que, a representação gráfica de uma função não precisa ser exata. Nasser, Sousa e Torraca (2012), observaram esse “ponto de vista”, em alguns dos procedimentos, para resolver tarefas de Cálculo I sobre o traçado de gráficos de funções simples como $f(x) = sen\, x$ ou $f(x) = cos\, x$, por exemplo.

Com efeito, a frequência e acúmulo de investimentos científicos, sobre o fenômeno das dificuldades de aprendizagem (matemática) revelou por meio de um

levantamento inicial, a abundância de dissertações e teses, bem como de periódicos, veiculados nos bancos de Programas de Pós-Graduação em Educação Matemática, Educação, Psicologia, Neurociência e Comportamento de universidades brasileiras, como por exemplo, UNIAN, PUC/SP e USP.

Considerando-se, que tais dificuldades funcionam como o motor do possível fracasso da transição EM-ES, fenômeno que ocorre em média, entre os 17 e 18 anos, foi observado pela OCDE[1] (2013a) que nesse período, ocorrem alterações neurocerebrais muito importantes, que agem diretamente no sistema límbico (emocional) dos estudantes e afetam as experiências de aprendizagem, bem como o desenvolvimento social. Sob o abrigo dessa mesma organização, também é senso comum, o reconhecimento de que, durante essa fase do desenvolvimento humano, dentre outras, a causa dessas alterações residem sobre a existência da *"[...] grande quantidade de hormônios presentes no cérebro"* (ibidem, p. 52, tradução dessa pesquisa). Por sua vez, esses hormônios incidem diretamente, conforme Gazzaniga *et al.* (2006), na emissão desequilibrada de serotonina e de outros neurotransmissores, responsáveis pela regulação do humor, resultando em imaturas e arriscadas decisões dos estudantes.

Essas revelações, mais contemporâneas, evocadas para compreender o fenômeno da aprendizagem humana, tem se desenvolvido a passos largos, segundo os franceses Fiori-Duharcourt e Isel (2012) e Pillon (2012), sobre o domínio da Neurociência Cognitiva, cujas lentes sob o invisível aos olhos, a pesquisa no nível molecular, têm permitido descobertas para prevenir ou realinhar o bem estar pessoal e a saúde humana integral. Por exemplo, pode-se citar a descoberta das causas da doença de Alzheimer, do TDAH, TOC, TDM, conforme descrito no CID-10 pela OMS (1993) e, também no DSM-V (2013).

Nesse sentido, já potencializadas por meio dos marcadores CDAE e DAMFT, reunidos no Quadro 21 (Cf. p. 88), as dificuldades de aprendizagem (matemática), sinalizaram possibilidades para valorizar os investimentos científicos do francês Toscani (2013a, 2013b), quando considerou os fundamentos das neurociências, para auxiliar no desenvolvimento da aprendizagem em sala de aula.

[1] Organização de Cooperação e de Desenvolvimento Econômico.

Tendo-se acolhido os resultados aos investimentos citados acima, acentuam as italianas Biancardi, Mariani e Pieretti (2011), possivelmente, que os problemas de discalculia evolutiva seriam dirimidos, já que intervenções direcionadas para circuitos neurais específicos de matemática parecem gozar de plasticidade neuronal (OCDE, 2013a).

Quando não compreendidas no início do processo de escolarização, por conseguinte, desenvolvidas, as discalculias contribuem para a instalação de emoções negativas, que se transformarão, no futuro, segundo Ashcraft (2002), em ansiedade matemática. Para esse pesquisador norte-americano, esse tipo de ansiedade pode perturbar a formulação de estratégias cognitivas, elaboradas na memória de trabalho e, como efeito dominó, se constitui num importante problema para o ensino de Matemática, sobretudo, para a transição EM-ES.

Foi sob a impregnação dessa perspectiva que se fez a opção por buscar na articulação entre a Didática da Matemática e a Neurociência Cognitiva, a possibilidade de compreender, no Brasil e na França, a passagem do ensino das Funções Trigonométricas EM-ES.

Considerando essa empreitada, uma inovadora contribuição social para a área de Educação Matemática, observou-se que as alternativas metodológicas de pesquisa, dos distintos quadros teóricos buscam analisar o cenário da Atividade Matemática (AM), priorizando pontos de vistas diferençados, que o consideram sob duas gêneses: inicialmente, a AM como cenário pertencente ao ambiente externo, que para Chevallard (1998), desenvolve-se sob os limites institucionais, via programas oficiais de ensino, livros didáticos e macroavaliações; no segundo momento, a AM é representada como cenário do ambiente interno que para Kandel (1991) é mobilizado, processado e armazenado pelo cérebro, sob o abrigo de uma circuitaria neurocognitiva madura, saudável e orquestrada.

Dessa forma, foi no estabelecimento de relações do tipo institucionais esperadas e existentes e relações pessoais existentes, que se buscou circundar a AM; quando esta foi ativada, nesse caso, por meio de tipos de Tarefas sobre as noções de Funções Trigonométricas, supondo-se que a propagação do fenômeno das dificuldades de aprendizagem dessas noções, prejudicial à transição EM-ES,

está vinculada à existência de uma ruptura dessa transição, bem como seu ensino, tanto no Ensino Médio como no Ensino Superior, não considera os princípios da Neurociência Cognitiva para diminuí-la.

Fundamentando-se nestas reflexões, emergiram as seguintes questões de pesquisa:

Q1 – Quais são as possíveis causas dessa ruptura?

Q2 – A institucionalização de atividades matemáticas baseadas nos princípios da Neurociência Cognitiva pode auxiliar no processo de neutralização dessa ruptura?

Isto posto, objetivou-se apresentar uma breve descrição da estrutura da presente investigação, que se inseriu na área de estudo e pesquisa de Educação Matemática brasileira, arrolando-se a essa, as contribuições da Didática da Matemática e da Neurociência Cognitiva.

No capítulo I, estabeleceu-se uma reflexão contemporânea sobre as dificuldades de aprendizagem matemática (DAM), priorizando-se as Funções Trigonométricas (DAMFT). Para tanto, recorreu-se às considerações primeiras de Nasser, Sousa e Torraca (2012) que entendem essas dificuldades, como obstáculos que contribuem para a elevação dos índices de evasão e repetência na disciplina Cálculo I, do Ensino Superior. Numa etapa seguinte, os achados de Fonseca (2002, 2011) serviram de alicerces para justificar as compreensões iniciais entre os quadros teóricos, anteriormente, destacados; iniciando-se as articulações por meio dos marcadores CDAE e DAMFT (Quadro 21, Cf. p. 88).

Como resultados iniciais, mostrou-se que as DAM representam sinais importantes que estimulam, justificam e guiam as rotas para a compreensão da transição EM-ES; definiu-se então o fenômeno das DAM, a partir da pesquisa em Neurociência Cognitiva; mapearam-se algumas pesquisas discutidas sobre as dificuldades de aprendizagem escolar (matemática), enfocando as Funções Trigonométricas e, por fim, analisaram-se os resultados desse levantamento sob as óticas dos quadros teóricos citados.

No capítulo II, desenvolveu-se um rastreamento sobre as pesquisas envolvendo Funções em geral, particularmente, Funções Trigonométricas. Em seguida, garimpou-se e mapearam-se investigações que refletiram sobre a Transição EM-ES, para viabilizar os objetivos desta tese. Foram revisitados os bancos de dissertações e teses nos Programas de Pós-Graduação de universidades brasileiras que promovem a pesquisa em Educação Matemática: PUC – Pontifícia Universidade Católica/São Paulo, UNESP – Universidade Estadual Paulista/Rio Claro, UFMS – Universidade Federal do Mato Grosso do Sul e mais recentemente, a UNIAN – Universidade Anhanguera de São Paulo.

Outras fontes consultadas referiram-se aos principais anais dos congressos internacionais, legitimados pela comunidade científica da Educação Matemática, PME (*Psychology of Mathematics Education*) e CERME (*Congress of European Research in Mathematics Education*), principalmente, bem como aos periódicos RDM (*Recherche en Didactique des Mathématiques* – FRANÇA) e o EMS (*Education Mathematics Studies* – EUA).

Resultou do cruzamento desses levantamentos no Brasil, a pesquisa sobre transição EM-ES que remonta de trabalhos produzidos na UNIAN, sob as orientações de Marlene Alves Dias e no cenário internacional, destacam-se, principalmente, sobre os investimentos das pesquisadoras francesas Michèle Artigue e Ghislaine Gueudet.

De outra forma, foi também observado nesse cruzamento de dados que, considerando-se as noções de Funções Trigonométricas, não existem pesquisas sob o grau de Dissertação de Mestrado ou Tese de Doutorado que tenha analisado a transição EM-ES, demonstrando-se, dessa forma, o caráter de ineditismo, esperado por um estudo desse porte.

Por último, discutiu-se a problemática, hipóteses e questões de pesquisa, bem como o objetivo geral, objetivos específicos e a metodologia investigativa.

No capítulo III, focou-se numa breve apresentação dos quadros teóricos escolhidos. Primeiramente, na Teoria Antropológica do Didático (TAD) de Yves

Chevallard e na abordagem dos Níveis de Funcionamento do Conhecimento (NFC) de Aline Robert, entendendo-se como mais adequadas para analisar a Atividade Matemática no meio externo, o institucional. Num segundo momento, os NFC serviram como articuladores para compreender o meio interno, o cérebro, por meio das perspectivas teóricas da Neurociência Cognitiva, sob as lentes de Eric Kandel, principalmente.

Em síntese, verificou-se que a TAD, analisa a AM por meio das relações institucionais e pessoais que se estabelecem sobre um objeto matemático, nesse caso, foi representado pelas noções de Funções Trigonométricas. O primeiro tipo de relação, a institucional, foi observada pela análise das praxeologias, existentes nos documentos oficiais, teoricamente, deveriam ativar um sistema articulado de ostensivos e não ostensivos, em tarefas descritas sob os três diferentes NFC – técnico, mobilizável e disponível. A existência desse engajamento estabelece o grau das relações pessoais com o objeto matemático em tela que, desvelou importantes informações das condições de formação e traços mnemônicos existentes na Memória de Longo Prazo (MLP).

No capítulo IV, a finalidade foi esboçar uma análise epistemológica das noções das Funções Trigonométricas que, segundo Artigue (2004) e Gueudet (2008a), auxilia o desenvolvimento das análises institucionais. Para tanto, considerou-se as obras de Boyer (1974), Eves (1992, 1995) e Kennedy (1992), principalmente, que auxiliaram a reconstituição dos cenários, onde a História da Matemática se estabeleceu, permitindo compreender a epistemologia das noções em jogo. Observou-se, nas tarefas e técnicas atreladas aos problemas de natureza prática, algumas passagens que sugestionaram rupturas epistemológicas, sobre o campo trigonométrico.

Nos capítulos V e VI, foram desenvolvidas, respectivamente, as análises institucionais no Brasil e na França. Com o objetivo de compreender, sob as lentes da TAD, as praxeologias existentes nos documentos oficiais da educação brasileira e francesa. Entre esses documentos, os programas oficiais de ensino de matemática, legitimados pelos Ministérios de Educação do Brasil e da França, serviram como marco inicial para a compreensão e construção da Organização

Matemática, que auxiliaria nas definições das relações institucionais esperadas para o Ensino Médio.

Em seguida, aplicando-se a metodologia das análises praxeológicas de Chevallard (1998), foram examinados os livros didáticos, cujos resultados auxiliaram na compreensão das relações institucionais existentes. A primeira parte dessas análises culminou com as macroavaliações ENEM (Exame Nacional do Ensino Médio) no Brasil e BAC (Baccalauréat) na França, que contribuíram às análises das relações institucionais esperadas para finalizar os estudos dessa etapa escolar e também verificar o grau de sintonia com as praxeologias existentes nos programas oficiais de ensino.

Sob essas três fases idênticas, buscou-se proceder, analogamente, às análises no Ensino Superior dos referidos países, considerando-se as diferenças encontradas. Ao atrelar os dados obtidos, pode-se resumir que existe a ruptura na transição EM-ES nos dois países e que uma das causas, repousa sobre a mudança entre os domínios matemáticos: geometria e função, que acontecem mediante uma ruptura epistemológica.

No capítulo VII, a articulação entre os dois quadros teóricos foi defendida sob o abrigo da análise neurocognitiva, considerando os resultados das análises anteriores, para a elaboração dos instrumentos experimentais, orientados pelos fundamentos da metodologia da Neurociência Cognitiva.

Para tanto, reuniu-se três tarefas que respeitavam os NFC de Robert (1997, 1998), apresentadas sem e com estimulação, cujo intento foi identificar as relações pessoais existentes, o grau de sintonia com as relações institucionais e também as diferenças verificadas na MLP, dos estudantes; partindo dos registros encontrados e analisados nos protocolos. Esses foram apresentados, em momentos e locais diferentes, primeiramente, em dois grupos (A e B) mistos de estudantes (brasileiros e franceses), voluntários do INSA (Instituto Nacional de Ciências Aplicadas de Lyon da *Universidade Claude Bernard Lyon I*). Em outro momento, tornaram-se voluntários, estudantes dos cursos de Licenciatura em Matemática e Engenharia de duas universidades brasileiras, localizadas em duas regiões diferentes.

Em síntese, foi observado um grau mínimo de MLP nos extratos das amostras analisadas, justificado pela ausência de experiências com as noções matemáticas em tela. Por outro lado, averiguou-se que nem o Ensino Médio e nem o Ensino Superior, consideram os princípios da Neurociência Cognitiva que será discutida no texto, importantes para suavizarem as rupturas na transição entre níveis de escolaridade.

No capítulo VIII, a intenção repousou sobre as reflexões da evolução do processo de transição EM-ES, nos dois países, considerando-se as análises institucionais e neurocognitivas anteriormente desenvolvidas. Na sequência, essa evolução também foi percebida por meio dos pressupostos teóricos de Chevallard (2002) sobre os níveis de co-determinação.

Foi possível revelar que, tanto no Brasil quanto na França, a existência de uma diferença entre a evolução das relações institucionais esperadas, quando comparada as relações institucionais existentes, sobretudo, quando se leva em conta o sistema de ostensivos e não ostensivos que deveriam existir, em ambas, para mobilizar a Atividade Matemática.

No que diz respeito às relações pessoais existentes, observaram-se algumas fragilidades subsidiadas pelo empobrecimento da articulação entre os domínios da geometria e das funções; considerando o sentido no contexto de uma tarefa, tais relações evoluem e sinalizam elementos presentes na MLP, capazes de ativar o sistema articulado de ostensivos e não ostensivos, para mobilizar a Atividade Matemática esperada nos planos das instituições.

Na conclusão, retomou-se brevemente a trajetória da pesquisa, evocando-se os objetivos, motivações e constatações iniciais, hipóteses e questões de pesquisa, quadros teóricos, principais resultados de todas as análises desenvolvidas, por fim, estas apontaram para possíveis perspectivas de pesquisa, permitindo fortalecer o amálgama entre os campos da Educação Matemática (Didática da Matemática) e Neurociência Cognitiva, com vistas a melhor compreender o fenômeno da aprendizagem matemática.

CAPÍTULO I

Funções Trigonométricas: da identificação das Dificuldades de Aprendizagem Matemática à busca de uma solução sob a ótica da Didática da Matemática e da Neurociência Cognitiva.

Considerações Iniciais

Nesse capítulo, objetivou-se construir uma reflexão atualizada sobre as Dificuldades de Aprendizagem Matemática, enfocando as Funções Trigonométricas (DAMFT). Tal intenção considerou-as como obstáculos que contribuem para, segundo Nasser, Sousa e Torraca (2012), elevar os índices de evasão e repetência na disciplina Cálculo I do Ensino Superior, decorrentes geralmente, de lacunas na Aprendizagem Matemática da Educação Básica.

Por outro lado, em Rezende (2003), observou-se que as dificuldades de aprendizagem em Cálculo I resultam de natureza epistemológica, sobretudo, durante o desenvolvimento da articulação entre função e geometria. Esse pesquisador defende que uma das possibilidades para transpor essas dificuldades residem num trabalho desenvolvido no Ensino Médio, que considere tarefas elaboradas sobre a variabilidade de funções. Nessa direção, o estudo desenvolvido por Palis (2010), sugere a tecnologia, por meio dos softwares, como uma ferramenta para ajudar na apropriação da articulação entre as representações algébricas e gráficas de funções.

Em um estudo anterior, Nasser (2009) também mobilizou esforços para compreender a etiologia dessas dificuldades. Segundo a pesquisadora, o baixo desempenho de alunos na disciplina Cálculo I, deve-se à falta de conhecimentos prévios. Sobre estes, residem, conforme Sierpinska (1992), entraves que devem ser superados, dados as suas conexões com o conceito de função. Dentre eles, o entendimento dos estudantes quando se referem ao gráfico de uma função como uma representação que não precisa ser exata. Para Nasser, Sousa e Torraca (2012), esse “ponto de vista”, esclarece alguns dos procedimentos verificados nas tentativas de resolução de tarefas em Cálculo I, sobre o traçado de gráficos de funções simples como $f(x) = sen\ x$ ou $f(x) = cos\ x$, por exemplo.

Como objeto de pesquisa, as DAMFT também se constituíram elementos norteadores em duas investigações desenvolvidas por Fonseca (2002, 2011) que, à época, levou em consideração as dificuldades de aprendizagem no Cálculo I decorrentes, especificamente, da evocação de noções e manipulação de propriedades relativas às Funções Trigonométricas necessárias para resolverem as indeterminações dos limites trigonométricos.

Nesses dois estudos, o autor ainda apontava a relação que será vista no decorrer desse trabalho, para a área de Psicologia Cognitiva, como introdução para as questões da Neurociência Cognitiva, que serão discutidas ao longo deste – forma alternativa de investigação do fenômeno específico da Aprendizagem Matemática –, considerando-se os ensinamentos de Ausubel (1982), Davidoff (2001) e Sternberg (2010), sobre as condições ambientais para o desenvolvimento da aprendizagem, sendo estas encaminhadas entre duas trajetórias diferentes: a externa e a interna ao ser humano.

Quando consideradas externas, foram mobilizadas por Fonseca (2002, 2011) sob o abrigo de algumas teorias da Didática da Matemática, principalmente, a Teoria das Situações Didáticas de Brousseau (1998) e a Engenharia Didática de Artigue (1988), mas que, no presente estudo, serão analisadas usando como base a Teoria Antropológica do Didático de Chevallard (1998).

No entanto, as inquietações desse pesquisador conduziram-no, por meio de sua curiosidade, a produzir um estudo contemporâneo das DAMFT, considerando-se, para tanto, a compreensão das condições do ambiente interno, bem como a sua articulação com o ambiente externo.

Sob o intento de transformar isso em realização, foi estabelecida a metodologia de levantamento bibliográfico (análise articulada da literatura) para atender, respectivamente, os quatro objetivos específicos dessa sessão, a saber: (a) Apresentar as Dificuldades de Aprendizagem Matemática (DAM) como representantes dos sinais que motivaram o interesse para analisar o fenômeno da Transição do Ensino das Funções Trigonométricas EM-ES; (b) Definir o fenômeno da Dificuldade de Aprendizagem Matemática (DAM), a partir da pesquisa em

Neurociência Cognitiva; (c) Levantar algumas pesquisas que abordaram as Dificuldades de Aprendizagem Escolar, bem como as Dificuldades de Aprendizagem Matemática, principalmente, enfocando as Funções Trigonométricas; (d) Analisar os resultados desse levantamento considerando a abordagem da Neurociência Cognitiva e os pressupostos teórico-metodológicos da Didática da Matemática.

Sob essa perspectiva, desenvolveu-se a redação deste capítulo.

1.1 – As investigações de Fonseca (2002, 2011) no Ensino Médio: motivações, descobertas e proposições.

Sabe-se que o fenômeno do insucesso escolar pode ser explicado considerando diversas causas. Tomando como válidos um contingente significativo dos resultados do PISA 2012 (OCDE, 2013b) até então divulgados, a disciplina Matemática continua liderando o ranking internacional. Essa reflexão permite inserir, nesse contexto, as preocupações de Fonseca (2002, 2011) para tentar esclarecer, ao menos, uma parcela das possíveis etiologias dos insucessos atrelados à disciplina em tela; mais especificamente, referindo-se à aprendizagem da Trigonometria e das Funções Trigonométricas, respectivamente.

Conforme este pesquisador, essas noções matemáticas se encontram no topo da hierarquia dos mais complexos conteúdos do Ensino Médio, apontados pelos alunos, alegarando ser uma das dificuldades primordiais, enxergar o invisível; reportando-se a representação geométrica do *sen 30°* num triângulo retângulo. Esse dado, mobilizou a investigação de Fonseca (2002) em busca da etiologia dessas dificuldades de aprendizagem, culminando na apresentação de uma proposta metodológica para minimizá-las. Neste momento, o autor desvelou os seguintes pontos:

- O enfoque puramente axiomático;
- Metodologias de ensino obsoletas;
- A desvalorização da história da trigonometria;
- A estrutura da apresentação do conteúdo nos Livros Didáticos;
- A estrutura institucional inadequada para os ambientes de aprendizagem;

E, para buscar contorná-los, demonstrou como válidas um conjunto de dez atividades didáticas embasadas nas alternativas metodológicas da Educação Matemática discutidas, inclusive, em D'Ambrosio (1996):

- Atividade nº 01 – *"Túnel do tempo: um passeio pela História da Trigonometria".*
- Atividade nº 02 – *"Redescobrindo uma técnica/instrumento para medir ângulos".*
- Atividade nº 03 – *"Dialogando com Tales por meio das sombras".*
- Atividade nº 04 – *"Usando tecnologia avançada de baixo custo".*
- Atividade nº 05 – *"Navegando pela Trigonometria por meio da TV".*
- Atividade nº 06 – *"Réguas para medir curvas: uma inovação no ensino de Trigonometria".*
- Atividade nº 07 – *"Resgatando o lúdico no ensino da Trigonometria".*
- Atividade nº 08 – *"Inspiração em Aristóteles: criação de experiências para o uso dos conceitos trigonométricos".*
- Atividade nº 09 – *"Um namoro que virou casamento: ela – as curvas traçadas na eletrônica, ele – as curvas trigonométricas".*
- Atividade nº 10 – *"Formando e deformando as Funções Trigonométricas no computador".*

Com efeito, foi percebido pelo pesquisador, nos protocolos das últimas atividades experimentais, indícios de dificuldade de aprendizagem das Funções Trigonométricas, tais como – esboçar o gráfico de funções do tipo $f(x) = a + b.sen(cx + d)$ sempre que *a≠0, b≠1* e *c≠1* e *d≠0*, sendo essa alvo de investigações, que ainda careciam de uma análise didática, buscando compreender, também a sua etiologia. Pois ter essas noções disponíveis, dependeria inclusive, de uma tranquila transição, permanência e continuação no Ensino Superior, em que ambas as noções (Trigonometria e Funções Trigonométricas) constituem-se parte de

uma base para auxiliar a compreensão do Cálculo Infinitesimal. Decorreu dessas identificações a segunda pesquisa científica de Fonseca (2011) que apontou os seguintes fatores, coparticipantes para desenvolver a aprendizagem significativa das Funções Trigonométricas:

- a necessidade de uma análise epistemológica da noção acima, responsável para dar sentido e significado à formulação de um plano de trabalho;

- a necessidade da escolha e implementação de uma teoria de aprendizagem, neste caso, a Teoria das Situações Didáticas, que valoriza o momento da ação como ponto de partida, torando o aluno sujeito e co-autor do processo, inibindo, desta forma, o comportamento de "não errar";

- a necessidade de desenvolvimento e implementação de uma engenharia didática, considerando, o computador um recurso potencialmente significativo para desenvolvimento e armazenamento da nova informação na Memória de Longo Prazo (MLP) que, em outras palavras, representam os subsunçores de Ausubel (1982);

Não obstante, as preocupações de Fonseca (2011) não estacionaram com esses resultados, verificando que o pesquisador finalizou a redação de sua segunda investigação sinalizando o seguinte objetivo:

> É minha intenção prosseguir novos estudos investigando como está acontecendo o processo de Ensino e Aprendizagem das Funções Trigonométricas na transição do Ensino Médio para o Ensino Superior, imaginando que se os problemas de aprendizagem Matemática não são superados pelos futuros professores de Matemática, como e quando os mesmos estariam aptos a ministrar aulas no Ensino Básico evitando o contágio de forma negativa de se aprender Matemática? (*ibidem*, p. 149)

Nesse sentido e, considerando tal preocupação, fez-se necessário mergulhar com mais profundidade nas dificuldades de aprendizagem, enfocando, sobretudo, as noções de Funções Trigonométricas.

1.2 – As dificuldades de aprendizagem como sinal das queixas da entrada para o Ensino Superior: perspectivas atuais.

O processo de ensino-aprendizagem, em sua forma mais ampla e natural, pressupõe, por princípio, conforme Nutti (2002), a comunicação interativa e contínua entre dois ambientes iniciais: o meio externo e o meio interno, sendo o primeiro, exterior à matéria do indivíduo e, o segundo, contrariamente. Por sua vez, em ambos ambientes, constantes modificações demarcam a experiência primeira. Com efeito, tal assertiva, anuncia a possibilidade de êxito em uma dada experiência, se, segundo Ausubel (1982) existirem três condições básicas: o indivíduo precisa de predisposição para aprender, a existência de subsunçores e o conteúdo dessa aprendizagem precisam ser potencialmente significativo.

Para Ausubel (1982), se um único aspecto constituinte dessas três condições estiverem fragilizados ou não disponíveis, pode-se instalar um processo de *dificuldade de aprendizagem* (DAp). Na concepção de Pain (1981), Fernández (1991), Romero (1995) e Scoz (1994), a *dificuldade ou problema de aprendizagem* é considerado um fenômeno escolar com negativo impacto ambiental e, nesse sentido, é suficiente para justificar a preocupação e o interesse de uma parte da comunidade científica, para proceder uma análise por meio da pesquisa.

Especificamente, essas dificuldades ainda despontam, segundo a OCDE (2013b), para duas disciplinas escolares: a Língua Materna e Matemática. Nesse sentido, ratifica-se que os números do último PISA 2012 (OCDE, 2013b) continuam classificando a disciplina Matemática no topo dessa investigação.

Como um marcador do desequilíbrio negativo do desenvolvimento escolar, a DAp é analisada por Pain (1981) a partir da influência de quatro fatores: orgânicos, específicos, psicogênicos e ambientais. A esse último, importa destacar que a autora define-o como condições objetivas ambientais que favorecem ou não a possibilidade do desenvolvimento da aprendizagem.

Dessa forma, para compreender como se dá a interação ambiental entre os meios externo e interno em favor da aprendizagem, Romero (1995) reúne sete teorias relacionadas às pesquisas educacionais, cujos interesses se debruçam sobre tal fenômeno escolar. Dentre elas, interessa a essa pesquisa as “Teorias sobre déficits de processos psiconeurológicos subjacentes”, para compreender o meio interno e, as “Teorias centradas na tarefa”, para analisar o meio externo, buscando

numa proposta de bricolagem entre elas, a iniciação de uma mobilização, que objetiva contribuir para a redução do desequilíbrio anunciado.

Dadas essas considerações, salienta-se o interesse da presente reflexão sobre as dificuldades de aprendizagem matemática (DAM), especificamente, as relacionadas às Funções Trigonométricas (FT).

A opção por esse foco está assentada sobre duas justificativas: a primeira refere-se às DAM dos aprendentes da Educação Básica, vivenciadas durante o exercício de 27 anos de docência, onde o desejo de ajudar o outro rumo à sua independência intelectual e, depois ambiental, ocupou e ainda ocupa, o cume da lista que transforma a atividade laboral, não em trabalho, mas em um genuíno prazer. A segunda, as FT, pelo intento de compreender os motivos dessa noção matemática e reunir o maior número de DAM da Educação Básica, segundo os estudos de Fonseca (2002, 2011) que partilham com as pesquisas de Mendes (1997); Brighenti (1994, 1998); Nacarato, Bredariol e Passos (2007); Sobrinho, Lima, Thomaz Neto (2004); Silva e Thomaz Neto (2006) parte dessa problemática.

Em larga escala, as DAM tem comprovação e repercussão internacional, a partir do PISA, quando, por exemplo, os números situam o Brasil em 58º lugar e a França em 25º, no *ranking* mundial, sendo que tais posições denunciam que ¼ da população não ingressa no Ensino Superior pelo pífio desempenho na disciplina Matemática, PISA 2012 (OCDE, 2013b). Na literatura científica, vários países têm desenvolvido pesquisas para compreender a(s) fonte(s) dessas dificuldades e, na medida do possível, desenvolver programas de intervenção a fim de diminuir o número de evasão e reprovação escolar. (WEBER, 2005).

Alguns exemplos desses esforços podem ser contemplados nos estudos de Resende e Mesquita (2013), justificando a DAM a partir de duas fontes: (1) nível de relação com a língua materna e (2) desenvolvimento e apropriação hierárquicos dos conteúdos “base”. Sobre este último, o estudo de Fonseca e Santos (2012), analisou, primeiramente, parte do meio (ambiente) externo, o institucional, e detectou na matriz curricular dos cursos de Licenciatura em Matemática, do Estado

de Sergipe, ausência de ingredientes que auxiliam na compreensão de como as DAM se desenvolvem.

Embasados nas perspectivas teóricas de Sternberg (2010) e Willingham (2011) – que alocam o fenômeno da aprendizagem como interesse particular da área de Psicologia e, agregando também à defesa de Fonseca (1995) e Gazzaniga *et al.* (2006), quando postulam que ainda assim, essa área tem recorrido às especificidades das Teorias Comportamentais, Teorias Psicodinâmicas, Teorias Cognitivas e, mais recentemente, das Teorias Neurocientíficas, especificamente, às Teorias da Neurociência Cognitiva para compreendê-lo – Fonseca e Santos (2012) investigaram em nível estadual, as matrizes curriculares de todos os cursos oficializados pelo MEC[2].

Os resultados dessa inquirição salientaram um número reduzido de teorias da aprendizagem, disponibilizadas ao longo da formação inicial do futuro professor de Matemática. Esses pesquisadores justificaram em tal estudo que, sem um amplo conhecimento teórico sobre os processos de aprendizagem, a mobilização de quaisquer métodos e técnicas fomenta o desenvolvimento das DAM, por meio dos obstáculos didáticos peculiares e contidos nas práticas de atividade docente.

Nesse sentido, atualmente, as pesquisas sobre as dificuldades de aprendizagem, particularmente, as DAM têm sido desenvolvidas em larga escala, nos Programas de Pós-Graduação em Psicologia ou em Neurociência, apesar de encontrar-se na literatura científica, trabalhos que partem de Programas de Pós-Graduação em Educação, Educação Matemática ou áreas afins.

Por natureza, as DAM são percebidas pelos professores e pesquisadores da disciplina, a partir do baixo desempenho, reprovação ou evasão escolar, considerando, por exemplo, as estatísticas dos SARESP[3] 2007 e SARESP 2008, que classificou o nível de proficiência na prova de Matemática como “Abaixo do Básico”, representado por 54,3% de um total de 309.178 alunos, se comparado aos 4,8% considerados no nível “Adequado” (São Paulo, 2008, 2009). Conforme Fonseca (2002), essas DAM são também declaradas pelos próprios aprendentes as

[2] Ministério da Educação e Cultura.
[3] Sistema de Avaliação do Rendimento escolar do Estado de São Paulo – SARESP.

suas famílias ou aos seus professores. Partindo desses pontos de vista, a figura abaixo intenta auxiliar a compreensão dos caminhos que podem justificar a compreensão das DAM, mais especificamente, das FT.

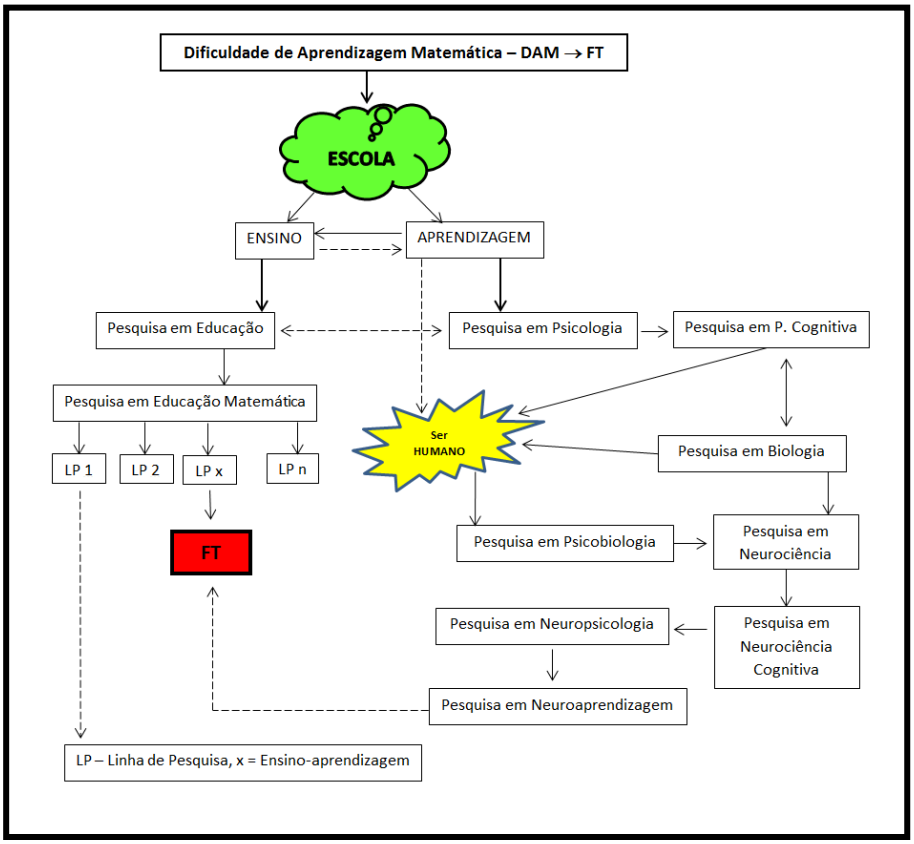


Figura 01: Caminhos para a compreensão da DAMFT.
Fonte: O autor (2015).

Com o intuito de amalgamar as justificativas que motivaram o desenvolvimento da presente pesquisa, pinçaram-se alguns resultados que foram encontrados em um das três áreas citadas acima, iniciando-se pelo fenômeno mais amplo, a DAp, nos programas de pesquisa em que este, por natureza, sinaliza um dos problemas da educação: os Programas de Pós-Graduação em Educação.

O levantamento que se segue não objetivou desenvolver uma extensa produção para mostrar uma estatística, mas, tão somente, demonstrar que o interesse pela pesquisa sobre a DAp, está posto em diferentes campos de pesquisa.

Iniciando-se pela base de dados do Programa de Pós-Graduação em Educação da USP[4], não foram encontrados trabalhos que dirijam atenção específica

[4] Universidade de São Paulo – Brasil.

a DAp e, dessa forma, decidiu-se, como um pretexto, buscar livremente sobre tal preocupação.

Com efeito, a pesquisa de Krepsky (2004), realizada no Programa de Pós-Graduação em Educação da URB[5], em nível de mestrado, salientou que as dificuldades de aprendizagem estão imersas num *"processo de aprendizagem, sendo que este se desenvolve num processo no qual se inter-relacionam as dimensões cognitivas, afetivas e sociais."* (*ibidem*, p.40). Esse achado permitiu a autora concluir que *"a aprendizagem, não é necessariamente um processo de prazer, ao contrário, para algumas crianças aprender significa ansiedade, desconforto, angústia, conflito, sofrimento e dor."* (ibidem, p. 102). Nesse sentido, acentua em suas conclusões que as dificuldades de aprendizagem seriam minimizadas se **o processo de aprendizagem escolar considerasse os sentimentos de prazer e satisfação**. **($CDAE_1$)**[6]

Já nos bancos de dados de teses e dissertações da USP, o Programa de Pós-Graduação em Psicologia, reúne desde 1970 – criação da área de concentração em Psicologia Escolar e Experimental (acPEE) e 1992 – criação da área de concentração em Neurociência e Comportamento (acNC), mais de 290 e 147 teses e dissertações, respectivamente, que debruçaram seus interesses sobre fenômenos escolares e comportamentais de onde foi pinçado, para exemplificar, as pesquisas de Guzzo (1987) e Cavalini (2008), do acPEE, e de Reis (2010) e Martins (2012), do acNC, sobre alguns aspectos da DAp.

Como uma espécie de marcadores, essas pesquisas demonstraram a partir de uma problemática externa, o campo da educação escolarizada, quais caminhos foram traçados para analisar o fenômeno da DAp. Dessa forma, a tese de doutorado de Guzzo (1987), intitulada "Dificuldades de aprendizagem: modalidades de atenção e análise de tarefas em materiais didáticos" comprovou, que nas tarefas em que os estímulos instrucionais eram em sua maioria, do tipo visual, encontrou-se

[5] Universidade Regional de Blumenau.

[6] Com o intuito de demarcar os sinais das Características para o Desenvolvimento da Aprendizagem Escolar – CDAE, optou-se por, ao final de cada informação encontrada a partir desse ponto, por sinalizá-las com $CDAE_n$, com $n \in IN$ e $n=[1; 5]$.

maior desenvolvimento das exigências de aprendizagem como cognição e memória. **($CDAE_2$)**

Cavalini (2008), em sua tese de doutorado “A utilização do WISC-III no diagnóstico das dificuldades de aprendizagem”, foi aplicado em 137 crianças do Ensino Fundamental de uma escola pública de São Paulo, indicadas pelos professores com DAp. O WISC-III é um tipo de teste psicológico, aplicado apenas por Psicólogos, utilizado no diagnóstico dos variados tipos de DAp. Essa pesquisadora, concluiu que por meio da análise dos subtestes, as causas da DAp foram, **em sua maioria, detectadas por fragilidades nas funções cognitivas percepção, atenção, memória e funções executivas**. **($CDAE_3$)**

A tese de doutorado de Reis (2010) foi incluída nesse breve levantamento, por relacionar aspectos educacionais que ajudam a argumentar em favor da inquirição em tela. A autora denominou sua investigação de “Estudo da distribuição da atenção viso-espacial em escolares”, que objetivou analisar o desenvolvimento da atenção viso-espacial em escolares (os alunos) entre 8 a 15 anos. A pesquisadora concluiu que existe diminuição do **tempo de reação aos estímulos visuais em função da idade, sobretudo, na situação de atenção dividida ($CDAE_4$)**. Baseando-se nesses resultados, a autora ratifica a importância de considerar o aspecto analisado para melhor desenvolver os objetivos educacionais.

Por último, pelo mesmo motivo que a anterior, a pesquisa de dissertação de mestrado de Martins (2012), “Ambiente educacional enriquecido: estudo da aplicação de oficinas de construção de brinquedos em centro de ciência” foi inserido nessa discussão por destacar a preocupação com o ambiente de aprendizagem salientando os componentes ambientais que influenciam no desempenho e na interação dos alunos, tais como – materiais manipulativos, jogos e atividades interativas, pois além de propiciarem um bom desempenho em relação aos alunos ditos normais, reintegrou ao convívio coletivo os alunos discriminados pelo rótulo de portadores de DAp. Cabe ainda dizer que o vínculo dessa pesquisa com a Neurociência, apesar de aparecer no título ainda de forma pouco conhecida, deve-se ao fato da **definição de ambiente enriquecido justificar-se pelo favorecimento da neurogênese, denominação para definir o processo de**

formação de novos neurônios, permitindo ao cérebro a propriedade de neuroplasticidade ($CDAE_5$). Em outras palavras, a capacidade de reconstituir-se, restaurando possíveis conexões neurais envelhecidas por desuso.

Assim, até esse ponto, visitou-se o campo científico da Educação, em seguida, da Psicologia e para o fechamento da tríade Educação-Psicologia-Educação Matemática, tentar-se-á localizar nos Programas de Pós-Graduação em Educação Matemática de pesquisas pelas DAM, focando-se as FT. No Brasil, existem quatro programas dessa natureza, sendo esse o critério adotado para proceder à garimpagem que se segue.

Por ser o programa que inaugurou o campo da Educação Matemática no Brasil em 1975, o Programa de Pós-Graduação da PUC/SP, reúne até esse momento, 586 teses e dissertações, sendo que 22 estudos abordam em seus títulos articulações entre as DAM, temas como: noção de incógnita e variável, função, trigonometria, funções trigonométricas. Dentre eles, Augusto (2008) conclui que uma das DAM repousa na articulação entre as noções de incógnita, variável e função. Christo (2006) ressalta que tal dificuldade é justificada na transição da aritmética para álgebra. Para Pelho (2003), esse problema é anterior e reside na passagem da linguagem natural para a linguagem matemática que exige clareza e rigor. A esse respeito Cruz (2005) afirma que a ausência de significados concretos (materiais manipuláveis, inclusive, relacionado à utilidade) para as "letras" relacionadas à aprendizagem das noções de variável é a principal causa das DAM.

Ainda nesse programa, com especificidade as FT, encontraram-se as pesquisas de Lobo da Costa (1997), Silva (2005), Borges (2009), Souza (2010), Ribeiro (2011) e Santos (2013), cujos interesses pelo campo repousam sobre as DAMFT[7] relacionadas a algum tópico apresentado na sala de aula. Além das anteriores, essas pesquisas contribuíram para a presente investigação quando:

Lobo da Costa (1997, p. 1, grifo do pesquisador), destaca seu interesse quando constatou que *"muitos dos alunos <u>não conseguiram identificar os gráficos das funções seno e cosseno</u>, colocados próximos a gráficos de funções de 1º e 2º*

[7] Objetivando-se mapear e marcar as Dificuldades de Aprendizagem Matemáticas relativas às Funções Trigonométricas – DAMFT, optou-se por, ao final de cada informação encontrada a partir desse ponto, por sinalizá-las com $DAMFT_n$, com $n \in IN$ e $n=[1; 14]$.

Grau", motivando a autora a estudar **formas alternativas** de ensino para as funções trigonométricas. **(DAMFT$_1$)**

Silva (2005) salienta que foi impulsionado pela opção dos livros didáticos ao abordarem o tema triângulo retângulo, bem como as possíveis relações são apresentadas de forma pronta e acabada e, sobretudo, desprovida de significado. Dessa forma, produziu uma sequência didática por meio da **manipulação figural** das construções geométricas no plano para produzir no aluno uma aprendizagem significativa do tema exposto. **(DAMFT$_2$)**

Borges (2009) anunciou que suas preocupações iniciais referiram-se as dificuldades conceituais percebidas tanto em seus alunos, como na literatura, como por exemplos, que *sen 30°* corresponde a ½ e a transição do triângulo retângulo para o círculo trigonométrico. Por conta dessas, focou sua atenção para minimizar os problemas de aprendizagem na transição do conceito de seno como razão trigonométrica para seno de um número real em um círculo trigonométrico. Em sua investigação, o autor alega que tal passagem não atende às necessidades dos alunos e se propõe a desenvolver uma sequência didática utilizando do *software Geogebra*. Em suas conclusões, retifica que **atividades manipulativas e o uso do computador** favoreceram o processo de aprendizagem e, por consequência, auxiliou melhor esse tipo de transição. **(DAMFT$_3$)**

Souza (2010), motivado, precisamente, pelos três estudos anteriores optou em sua pesquisa por diagnosticar as dificuldades de aprendizagem relativas às Funções Trigonométricas seno e cosseno entre estudantes do Ensino Médio. Segundo esse autor, essas dificuldades específicas, foram constatadas pelo SARESP 2007, em questões que avaliavam a aprendizagem das Funções Trigonométricas seno e cosseno, principalmente, na interpretação desses gráficos, bem como de suas propriedades para articular as representações algébrica e gráfica. Tais resultados foram suficientes para que o autor revisitasse essas noções por meio do *software Graphmatic*, permitindo-o demonstrar que a introdução dessas tecnologias – computador e *software*,

> [...] contribuiu para a evolução da aprendizagem e proporcionou um **aumento cognitivo** de conceitos relacionados à função seno e cosseno e, através de um processo dinâmico, que permitiu a articulação entre as representações algébricas e gráficas". (*ibidem*, p. 106 -107, grifo do pesquisador) **(DAMFT$_4$)**

Ribeiro (2011) relata que foi mobilizada pela própria prática profissional enquanto observa as DAM em seus alunos e também como seus colegas de trabalho lidavam com ela. Dessas observações, justifica sua opção pelas FT, à época, dado que as Funções Trigonométricas geralmente são posicionadas na distribuição dos conteúdos no último bimestre letivo. Nesse sentido, objetivou compreender as DAM relativas aos conhecimentos prévios dos estudantes em relação às FT. E, para tanto, utilizou-se da teoria da aprendizagem significativa de Ausubel, principalmente. Foram encontradas dificuldades de aprendizagem relativas as FT classificadas em factuais, conceituais, procedimentais e atitudinais o que possibilitou a pesquisadora concluir: o ensino das Funções Trigonométricas não mobiliza a **motivação** nos alunos. **(DAMFT$_5$)**.

Santos (2013) interessou-se pela DAM também pelas observações decorrentes do ambiente escolar, onde os alunos enfatizavam as FT por reunir uma carga conceitual difícil de ser assimilada. Para contrapor-se a essa realidade, a autora investigou formas de reduzir as queixas iniciais dos alunos introduzindo o *software Winplot* e a interdisciplinaridade entre Física e Matemática, a fim de que a aprendizagem da função seno seja melhor compreendida. Como conclusão, ratificou que ambas as estratégias – o *software* e a interdisciplinaridade – possibilitaram o alcance dos objetivos de sua investigação. **(DAMFT$_6$)**

Rumo ao segundo Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática do Brasil, o da UNESP – Rio Claro/SP, fundado em 1984, declara-se que não foram encontrados trabalhos que canalizassem esforços específicos à DAMFT, motivo pelo qual permitiu prosseguir com o levantamento no terceiro Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática do Brasil, o da UFMS, fundado em 2007.

O Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da UFMS, apesar de partilhar da linha de pesquisa em Ensino e aprendizagem, também, até o

presente momento, não investiu em pesquisas que focassem as DAMFT, motivo pelo qual permitiu prosseguir com o levantamento no quarto Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática do Brasil, o da UNIAN[8]/SP, fundado em 2008.

O primeiro estudo encontrado nesse programa foi representado por Goios (2010) que, não diferente dos pesquisadores anteriores, aponta as DAMFT para o entendimento de correspondência entre medidas de graus-radianos e as razões trigonométricas como números não têm unidade de medida. Então, guiado pelo interesse em compreender quais aspectos favorecem ou não o ensino de trigonometria em um ambiente com recursos digitais. Sua conclusão evidenciou que *"[...] quando o aluno fala sobre o OE* [função seno] *o dinamismo se sobrepõe ao estático auxiliando a compreensão deste conceito."* (*ibidem,* p. 123, grifo do pesquisador). **($DAMFT_7$)**

Em seguida, Alves (2011) relatou que seu interesse iniciou em sua prática docente ao ouvir dos alunos expressões de resistência as FT, sobretudo a quantidade de fórmulas "obrigadas a decorar". Esse estímulo impulsionou o autor a investigar os documentos oficiais que norteiam o ensino da trigonometria, para tentar entender, a relação entre as queixas iniciais de seus alunos com o que está institucionalmente programado. Em sua análise final, concluiu que uma das causas da DAMFT reside em *"decorrência do não uso de diferentes materiais que se completem, com a finalidade de proporcionar essa construção* [FT]*."* (*ibidem,* p. 104, grifo do pesquisador). **($DAMFT_8$)**

Em Orfão (2012), encontrou-se a reflexão sobre DAMFT, partindo, talvez, de uma das origens de tais causas – o ensino, já que é por meio da sala de aula que o aluno se depara com as diferentes noções matemáticas, especificamente, as da FT. O pesquisador, mesmo sem justificar a sua opção, decidiu analisar aspectos favoráveis e não favoráveis para o uso de tecnologia – computador e *software Geogebra* – no ensino das funções trigonométricas. Mesmo detectando ambos os tipos, ressaltou que os aspectos favoráveis se contrapõem aos não favoráveis, na medida em que

[8] Universidade Anhanguera de São Paulo – Brasil.

> Construir atividades no computador, oportunizaram aos professores e aos alunos vivenciarem uma nova maneira de aprender um conteúdo, diferente da maneira tradicional, e dar a ambas as partes a liberdade de exercer livremente a imaginação e a criatividade, o que pode ser considerado um passo fundamental na direção de institucionalizar o uso da tecnologia no cotidiano didático, favorecendo o domínio sobre as ferramentas tecnológicas. (*ibidem,* p. 113, grifo do pesquisador). **(DAMFT$_9$)**

Miashiro (2013), em sua experiência profissional, constatou que os alunos não discerniam as razões trigonométricas seno e cosseno no triângulo retângulo das suas extensões no círculo a elas relacionado, pois, sobretudo, as medições em radianos geravam deformações conceituais, erros e dúvidas. Nesse sentido, objetivou analisar quais seriam as *"contribuições de uma 'estratégia de ensino' para a aprendizagem significativa da transição das razões para as funções trigonométricas"* (*ibidem,* p. 15, grifo do pesquisador). Cabe salientar que, outra vez, assim como as pesquisas de Orfão (2012) e Goios (2010), a investigação de Miashiro (2013) incide sobre a perspectiva do ensino como sendo um dos prováveis lócus das DAMFT. Com efeito, Miashiro (2013) investiu na cominação de materiais concretos com o *software Cabri-Géomètre II* e alicerçado na Teoria da Aprendizagem Significativa (TAS) de Ausubel (1982), concluiu que

> [...] antes de aplicarmos qualquer estratégia de ensino, para uma aprendizagem significativa do conceito "ciclo trigonométrico", temos que confirmar se todos os conceitos subsunçores estão devidamente consolidados na estrutura cognitiva dos alunos, pois qualquer falha nesses conhecimentos (sistema cartesiano ortogonal, definição de lugar geométrico do círculo, conjunto dos números reais e medidas em radianos) poderá impedir a aplicação do princípio de reconciliação integrativa, ou seja, irá impossibilitar a combinação desses conceitos subsunçores. (*ibidem,* p. 150, grifo do pesquisador). **(DAMFT$_{10}$)**

Por último, foi encontrada a tese de Silva (2013), cuja motivação enfatizou as dificuldades de alunos e professores do Ensino Médio, sobre os gráficos cartesianos trigonométricos. Para compreender essas dificuldades, o pesquisador privilegiou os diálogos dos alunos envolvidos em um ambiente denominado de Contexto Interativo de Aprendizagem. Os resultados dessa investigação demonstraram a fertilidade da articulação, que privilegiou os estudantes como protagonistas dos discursos sobre a natureza dos gráficos representantes dos

fenômenos periódicos que, para tanto, delegou ao professor a responsabilidade de apresentar tarefas provocativas, mobilizando as discussões em grupo sobre variáveis e decomposição dos movimentos circulares. **(DAMCT$_{11}$)**

Em Sergipe, foram encontrados dois Programas de Pós-Graduação, onde parece ser possível encontrar alguma contribuição sobre a reflexão em tela: o Programa de Pós-Graduação em Educação e o Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática, ambos da UFS[9]. Neles, foram encontradas duas pesquisas do tipo Stricto Sensu que se interessaram pelas DAMFT, a saber: Fonseca (2002) e Fonseca (2011), respectivamente, citadas no início dessa redação.

Com efeito, para que se compreenda o movimento realizado por esse pesquisador, faz-se necessário, rapidamente, historiografar sua trajetória profissional e científica. Para tanto, recorreu-se ao levantamento de suas publicações mais notáveis nos anos de 2008, 2011, 2012 e 2013. Netas, é visível o interesse do professor-pesquisador pelas DAM, demarcadas pelo robusto investimento em sete cursos de Pós-Graduação Lato Sensu, além dos dois Stricto Sensu, mencionados acima: Gerência e Tecnologia da Qualidade – CEFET/MG[10] (1994), Ensino de Matemática – UFS (1995), Psicopedagogia Institucional – FPD[11] (1999), Psicopedagogia Clínica – FPD (2002), Educação Matemática – FA[12] (2009), Neuropsicologia – UNIFESP/CDN/SP[13] (2012) e em Neuroaprendizagem, Transtorno do Aprender e Psicanálise – IS/DF[14] (2013).

Nesse percurso, salienta Fonseca (2013a) que motivado pelo perfil do espírito científico denominado por Bachelard[15] (1996) e legitimado pelos Programas de Pós-Graduação existentes, procedeu a uma incansável busca pelas etiologias

[9] Universidade Federal de Sergipe – Brasil.
[10] CEFET/MG – Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais.
[11] FPD – Faculdade Pio Décimo.
[12] FA – Faculdade Atlântico.
[13] UNIFESP/CDN/SP – Universidade Federal de São Paulo/Centro de Diagnóstico Neuropsicológico/São Paulo.
[14] IS/DF – Instituto Saber/Distrito Federal.
[15] O espírito científico proíbe que tenhamos uma opinião sobre o que não compreendemos, sobre questões que não sabemos formular com certeza. Em primeiro lugar é preciso saber formular problemas. E diga o que disserem, na vida científica os problemas não se formulam de modo espontâneo. É justamente esse sentido do problema que caracteriza o verdadeiro espírito científico. Para o espírito científico, todo conhecimento é resposta a uma pergunta. Se não há pergunta, não pode haver conhecimento científico. Nada é gratuito. Tudo é construído. (BACHELARD, 1996, p. 18).

das DAM, o que permitiu ao pesquisador a migrar do mundo-macro para o mundo-micro, quando a cada descoberta, ele próprio se perguntava o porquê.

Em sua primeira empreitada Fonseca (2002), foi mobilizado pelos baixos índices na Aprendizagem Matemática dos alunos do IFS[16] e pela sua formação em Psicopedagogia, ocupada em questionar de onde se originam as causas das DAM. Para construir a problemática relativa à sua primeira pesquisa científica, selecionou a partir de uma lista de critérios, a Trigonometria por representar o conteúdo mais difícil de compreensão pelos alunos e, também, por não ter encontrado em nível nacional, um número significativo de trabalhos relacionados aos mesmos interesses, fato científico que despertou a atenção do autor.

Objetivando contribuir, para aumentar a força transformadora desse quadro, elaborou e testou dez atividades didáticas, fundamentadas nas linhas de pesquisa da Educação Matemática. Assim, recorreu à história (relógio de sol), à experimentação em laboratório (materiais reciclados, manipulação de materiais), às mídias de comunicação (TV e vídeo), as inovações tecnológicas (*software* e computador), à ludicidade e à interdisciplinaridade (eletrônica). Ao fim de sua experiência, concluiu que as DAMFT diminuíram e possibilitando aos aprendentes redimensionar a percepção em relação à disciplina Matemática, sobretudo, pela inserção nas aulas recursos que permitiram uma melhor comunicação, entre o meio interno e o meio externo por meio da associação estímulo-contexto-tarefa-prazer. **($DAMFT_{12}$)**

Incentivado pela décima atividade em sua pesquisa de 2002, que relacionava o *software Graphmatic,* as tarefas propostas nos protocolos, pode-se encontrar em Fonseca (2011), uma segunda oportunidade para especular com mais maturidade, as DAMFT, focando mais precisamente, as funções trigonométricas – noções trigonométricas apontadas pelos sujeitos da primeira pesquisa, como muito difíceis de serem compreendidas algebricamente e representadas graficamente. Cabe ressaltar que os investimentos dispensados às DAM, guiou o pesquisador para utilização de teorias da Psicologia Cognitiva, quando Davidoff (2001), postula que a base neuropsicológica da aprendizagem repousa, sem maiores detalhamentos,

[16] Nessa época, o IFS – Instituto Federal de Sergipe era representado pela antiga Escola Técnica Federal de Sergipe.

sobre atenção, percepção e memória, representantes parciais das funções cognitivas.

Foi neste sentido que, Fonseca (2011) constatou suas hipóteses, pois demonstrou ser possível estruturar uma sequência didática a partir de Brousseau (1998), assessorada pelos princípios da engenharia didática de Artigue (1988), atendendo aos pressupostos de Ausubel (1980), seguramente amparados em Davidoff (2001). Dessa forma, o êxito obtido na aprendizagem das funções trigonométricas pode ser institucionalizado quando se constatou a necessidade de uma teoria de aprendizagem para fundamentar a elaboração de **atividades didáticas** para o ensino dessas noções, por exemplo. **($DAMFT_{13}$)**

Dessa digressão e, pelo tipo de movimento acadêmico que o proponente pesquisador optou fazer, observa-se que a análise das DAM pode facilitar e daí emergir resultados mais atuais e adequados que se comparados às pesquisas onde a base psicológica não é considerada conforme defende Luria (1981), LeDoux (2001), Davidoff (2001), Kandel (1991), Gazzaniga *et al*. (2006) e Sternberg (2010), principalmente.

Essa conclusão, corroborada pelos estudos de Orfão (2012), Goios (2010) e de Miashiro (2013), instigou analisar a partir de um breve levantamento, as matrizes curriculares dos cursos de Licenciatura em Matemática, em algumas instituições brasileiras de Ensino Superior, com o objetivo de verificar qual a relação das DAM, nos/pelos estudantes com a formação inicial do professor. Pesquisou-se nas matrizes nas seguintes universidades: USP, UNIAN, UFS, IFS [17].

[17] Instituto Federal de Sergipe – Brasil.

Quadro 01

Base Teórica da Aprendizagem nos Cursos de Licenciatura em Matemática

Ensino Superior no Brasil					
Instituições	**Disciplina (s)**	**Carga horária da disciplina (CHD)**	**Caráter**	**Carga horária total do curso (CHT)**	**CHD %**
USP	**Psicologia da Educação**	**50 h**	**Eletivo**	**3155 h**	**1,58**
UNIAN	**Psicologia da Aprendizagem**	**40h**	**Obrigatório**	**2880h**	**1,38**
UFS	**Int. Psicol. Desenvol.**	**60h**	**Obrigatório**	**3045**	**1,97**
	Int. Psicol. Aprend.	**60h**	**Obrigatório**		**1,97**
IFS	**Psicologia da Educação**	**45 h**	**Obrigatório**	**2930 h**	**1,53**

Fonte: O autor (2015).

A leitura do quando acima, deflagra a que uma das causas da DAM pode estar relacionada com o baixo índice de teorias relacionadas à aprendizagem, na formação inicial dos professores, visto que, segundo Charlot (2005), só existe **ensino** se houver **aprendizagem**. Por sua vez, essa existirá se houver, conforme Gadotti (2005), **sentido** e, conforme Ausubel (1982) e Willingham (2011), **significado**. Essas duas condições representam, também, as exigências do cérebro para se interessar por uma determinada ação do meio externo. (GAZZANIGA *et al*., 2006)

Rotineiramente, ao ingressar num curso de Licenciatura em Matemática, é apresentada ao estudante uma matriz curricular elaborada a partir de eixos norteadores, reunindo, em cada um, suas especificidades. Baseando-se nas matrizes curriculares das universidades USP, UNIAN, UFS, IFS, por exemplo, verificou-se que o exercício da atividade docente, sobretudo, no exercício do ensino, seria importante que se conhecessem os processos de aprendizagem. Por sua vez, os conteúdos relacionados a esse núcleo, não aparentam possibilitar o alcance de tais processos, de modo que eles sejam incorporados às disciplinas subsequentes, por exemplo, Didática, Metodologia de Ensino, Laboratório de Ensino de Matemática e, por fim, os Estágios Supervisionados. Oferecendo ao futuro professor bases mais confiáveis para o exercício da docência.

Para as pesquisadoras Pain (1981), Fernández (1991) e Scoz (1994), antes de saber como ENSINAR, o estudante de Licenciatura em Matemática precisa saber o que é aprendizagem e como esta ocorre. É nesse sentido que se justifica a importância e necessidade do estudo teórico da aprendizagem, especificamente, a Aprendizagem Matemática. Essa é a base para o processo de articulação, entre a Educação Matemática e a Neurociência Cognitiva.

Por isso, a fim de não culpar o professor que ao fazer a opção pela carreira do magistério, poder-se-ia questionar, em nível institucional, quais são os parâmetros e entendimentos das Diretrizes Curriculares Nacionais – DCN, pois se iniciam a partir dessa esfera as orientações em que as Instituições de Ensino Superior – IES para construírem suas matrizes curriculares. E, se assim fosse continuado, poderiam ainda prosseguir questionando-se: em quais concepções de educação estão fundamentadas essas DCN? Pelo fato desta não ser o foco primordial dessa pesquisa, registra-se, então, que as DAM podem estar atreladas sistemicamente, em níveis macros – às políticas públicas e em níveis micros – ao funcionamento neurocognitivo.

A ânsia pela prática de ensino, verificada durante as aulas de algumas disciplinas do curso de Licenciatura em Matemática do IFS, por exemplo: Cálculo, pode ser compreendida e localizada nas entrelinhas da análise de Manrique (2009), que considerou mínimo o investimento institucional no campo dos saberes profissionais, permitindo-se inferir que, os estudantes tendem a não creditarem atenção e energia às disciplinas relacionadas ao mesmo, que pode ter início com a disciplina de psicologia da aprendizagem, bem como a suas decorrentes: didática, metodologia de ensino, estágios supervisionados, etc.

A experiência em cursos de Pós-graduação voltada à formação continuada, de professores de Matemática mostrou nesse trabalho que os alunos-professores, sempre que democratizam suas experiências docentes e adentram às salas de aula da Educação Básica, desenvolvendo (ou reproduzindo) técnicas de ensino sem a mínima consideração e articulação teórica, sobre as teorias da aprendizagem. Isso pode, também, estar contribuindo para que a noções matemáticas, especificamente, as trigonométricas estejam sofrendo deformações conceituais (de ordem epistemológicas) ou de transposição didática.

De certa forma, os relatos dessas práticas acabam sendo também uma possível fonte das dificuldades de aprendizagem dos alunos, pois se os dados de entradas não estão disponíveis num nível didático de claridade, é muito pouco provável que os aprendentes ou estudantes consigam decodificar ou processar simultaneamente, as competências institucionalmente esperadas, bem como as apresentadas pelo professor.

Logo, a DAM, pode ser originada a partir de diferentes ramificações do meio externo, por exemplo: a ausência de elementos teóricos de aprendizagem para abordar os conteúdos matemáticos, Fonseca (2011), do abandono das teorias da aprendizagem na formação inicial, Manrique (2009).

Decorre que, o desenvolvimento de métodos e técnicas de ensino, estão alicerçados em teorias Didáticas; por sua vez, recorrem às teorias da aprendizagem que, por excelência, competem à área da Psicologia e suas mais vanguardistas especializações: Neuropsicologia, Neurociência Cognitiva, Neuroaprendizagem; dado que é no cérebro que os dados de entrada são processados, reorganizados e devolvidos ao meio externo, pois as tarefas propostas para os alunos exigem que estes pensem e o ato de pensar é, segundo Willingham (2011), genuinamente cerebral.

Há uma indicação levada a pensar que, essa reflexão encontra guarida no trabalho de Andrade (2012) posicionada a favor e ratifica o entendimento de que os cursos de Licenciatura em Matemática têm privilegiado demasiadamente, os conteúdos das disciplinas específicas, em detrimento das teorias e processos de aprendizagem que o futuro professor deveria ter domínio, para poder facilitar a aprendizagem matemática de seus alunos.

Tendo cumprido, a breve análise anterior, acerca das matrizes curriculares dos cursos de Licenciatura em Matemática, em algumas instituições de Ensino Superior no Brasil e na França – a função de justificar a necessidade de maior preocupação com o fenômeno da aprendizagem que, por natureza e excelência, é inicialmente, considerado o principal objeto de pesquisa da área da Psicologia Educacional, pretende-se, a partir desse ponto discutir fontes mais atuais de concepções, abordagens e teorias de aprendizagem para melhor entendê-las.

Para tanto, o movimento da pesquisa na área da Psicologia Educacional sempre partiu de perspectivas teóricas e experimentais que, de alguma forma, relaciona o indivíduo ao ambiente. Como na pesquisa biológica que se reduz ao nível microscópico, novas subdivisões da Psicologia surgiram por meio da parceria com a Biologia, para analisar a microbiologia dos processos de aprendizagem.

Disso decorreu o nascimento da Neuropsicologia (Lúria, 1981), Neurociência Cognitiva (Gazzaniga *et al*., 2006), e, por fim, está nascendo, segundo Maluf (2011), a Neuroaprendizagem. Assim, este recorte foi inserido apenas para tentar justificar a importância do estudo das teorias da aprendizagem, conforme fluxograma da Figura 01 (Cf. p. 55).

Nesse contexto, a elaboração, desenvolvimento, propositura e institucionalização de quaisquer tipos de procedimentos pedagógicos, para o desenvolvimento da aprendizagem pressupõe embasamento teórico e isso serviria para sinalizar a necessidade das instituições de Ensino Superior em investir nessa perspectiva para que, inclusive, os futuros professores tenham condições teóricas de estruturarem seus planejamentos didáticos, selecionando atividades, exercícios ou tarefas fundamentais que mobilizem, progressivamente, os níveis de conhecimento presentes na Memória de Longo Prazo do aluno ou – os subsunçores de Ausubel – e, permitindo alcançar as expectativas institucionais, no que se refere à Aprendizagem Matemática dos conteúdos escolares, especificamente, as Funções Trigonométricas.

Diante de todas essas constatações, seria negligência, não valorizar o processo concreto-abstrato, ao menos para os alunos portadores de DAM, aliás, é no campo da Neurociência Cognitiva que isto está posto e muito bem fundamentado, portanto, será discutida no próximo item, essa questão.

1.2.1 – Marcadores, relações teóricas e análises das DAM.

Com o objetivo de apresentar um resumo e construir uma proposta para descrever um esquema inovador das DAM, será apresentado os quadros explicativos, intitulados *Lócus das Dificuldades de Aprendizagem Escolar (LDAE) e Lócus das Dificuldades de Aprendizagem Matemática/Funções Trigonométricas (LDAMFT)*. Nesses, estarão dispostos: identificação institucional da pesquisa e do pesquisador, dos marcadores, das relações com os campos da Neurociência Cognitiva (**R_{NC}**) e da Didática da Matemática (**R_{DM}**) e, por fim, da análise articulada.

Salienta-se que os marcadores representam as principais conclusões das pesquisas, encontradas nos Programas de Pós-Graduação em Psicologia, Neurociência, Educação e Educação Matemática. Como forma de iniciar o movimento de comparação (com ênfase na complementação), buscou-se identificar as possíveis relações desses marcadores com a Neurociência Cognitiva (**R_{NC}**) que investiga o fenômeno da aprendizagem no meio interno, bem como com a Didática da Matemática (**R_{DM}**), que investiga o mesmo fenômeno considerando o meio externo. Não obstante, o aprofundamento teórico desses campos será apresentado no capítulo III. Por último, como produto final, a análise articulada das DAM.

Contudo, antes mesmo de apresentar os quadros citados, faz-se necessário informar por meio do Quadro 02, a seguir, a *Circuitaria das Funções Cognitivas (fc)*[18] que será mencionada dentro de (**R_{NC}**) e nas análises.

[18] Contextualizações, fundamentações e discussões sobre essas funções, bem como todas as outras denominações do Quadro 01 (Cf. p. 67) serão abordados no capítulo III.

Quadro 02

Circuitaria das Funções Cognitivas (fc)

Função Cognitiva	fc_n	**Neurotransmissores envolvidos** (substância química)	**Siglas**	**Fórmula Molecular**	**Áreas cerebrais**
Sensação	fc_1	SEROTONINA	5-HT	$N_2OC_{10}H_{12}$	Canal de entrada[19]
Percepção	fc_2	ACETILCOLINA	ACh	$C_7H_{16}NO_2$	Área occiptal[20]
Emoção	fc_3	DOPAMINA SEROTONINA	DA 5-HT	$C_8H_{11}NO_2$ $N_2OC_{10}H_{12}$	Sistema Límbico
Atenção	fc_4	DOPAMINA	DA	$C_8H_{11}NO_2$	Tálamo
Memória	fc_5	ACETILCOLINA	ACh	$C_7H_{16}NO_2$	Hipocampo
Funções Executivas	fc_6	NORADENALINA	NAD	$C_8H_{11}NO_3$	Lobo frontal
Aprendizagem	fc_7	ACETILCOLINA SEROTONINA DOPAMINA	ACh 5-HT DA	$C_7H_{16}NO_2$ $N_2OC_{10}H_{12}$ $C_8H_{11}NO_2$	Hipocampo, Sistema Límbico e Tálamo

Fonte: Kandel (1991)

Seguindo a mesma ordem do levantamento das pesquisas sobre CDAE e DAM/FT no item anterior, tem-se:

[19] A função fc_1 está associada ao "canal de entrada", ou seja, o sentido que é estimulado.

[20] Essa área foi exemplificada partindo-se do princípio que o sentido estimulado foi à visão.

1.2.1.1 – Programa de Pós-Graduação em Educação da URB.

Esses quadros demonstram o que justifica a proposta do autor.

Quadro 03

Lócus das Dificuldades de Aprendizagem Escolar (LDAE) – **$CDAE_1$**

Área:	**EDUCAÇÃO**	
Programa:	Pós-Graduação da URB	
Ano:	2004	Formato da Pesquisa: **DISSERTAÇÃO DE MESTRADO**
Pesquisador:	KREPSKY	
Marcador:	**$CDAE_1$**	Para que as dificuldades de aprendizagem sejam minimizadas é necessário que **o processo de aprendizagem escolar considerasse os sentimentos de PRAZER e SATISFAÇÃO.** (KREPSKY, 2004)
Relações:	**R_{NC1}**	O **prazer e satisfação** só podem ser desenvolvidos se o sistema límbico (o emocional) for ativado. É preciso estimular a produção dos neurotransmissores SEROTONINA ($N_2OC_{10}H_{12}$) e ACETILCOLINA ($C_7H_{16}NO_2$), principalmente. (KANDEL, 1991)
	R_{DM1}	A TSD de Brousseau (1998) postula que a situação de ação, mobiliza o aluno envolvendo-o como sujeito participante da construção do conhecimento. Essa prerrogativa justifica a produção dos neurotransmissores citados em **R_{NC1}**. Para tanto, deve-se selecionar tipos de Tarefas (TAD – Chevallard, 1998) que sejam coerentes com as expectativas dos NFC de Robert (1998), partindo-se do NT, passando pelo NM para, então, tentar alcançar o ND.
Análise:	**A_1** – A produção dos diferentes tipos de neurotransmissores não é apenas estimulada pela alimentação ou medicamentos, mas, inclusive, pelas **atividades interativas** do sujeito com o meio. Assim, a partir das relações acima, pode-se concluir que é possível os diferentes tipos de Tarefas auxiliarem na produção de ($N_2OC_{10}H_{12}$) + ($C_7H_{16}NO_2$) que ativarão a circuitaria das funções cognitivas (fc_n), sobretudo, no caso do marcador **$CDAE_1$**, as funções fc_1, fc_2 e fc_3.	

Fonte: O autor (2015).

1.2.1.2 – Programa de Pós-Graduação em Psicologia da USP.

Quadro 04

Lócus das Dificuldades de Aprendizagem Escolar (LDAE) – **$CDAE_2$**

Área:	**PSICOLOGIA**	
Programa:	Pós-Graduação da USP, (acPEE)	
Ano:	1987	Formato da Pesquisa: **TESE DE DOUTORADO**
Pesquisador:	GUZZO	
Marcador:	**$CDAE_2$**	Quando as tarefas em que os estímulos instrucionais, eram em sua maioria, do tipo visuais, encontrou-se **maior desenvolvimento das exigências de aprendizagem como COGNIÇÃO e MEMÓRIA.** (GUZZO, 1987).
Relações:	**R_{NC2}**	A **cognição e memória**, na concepção de Izquierdo (2011) são desenvolvidas na memória de trabalho (MT) com grande apelo à memória de longo prazo (MLP), precisando que nessa, estejam disponíveis os conhecimentos prévios necessários (***os neurotransmissores receptores***, constituídos nas experiências anteriores) para o confronto, possibilidade de comunicação, ajustes e assimilação da nova noção que precisa estar posta em um ambiente interativo. Essas funções cognitivas se desenvolvem especificamente na região do hipocampo e para ativá-las faz-se necessário a estimulação por meio da produção da substância química ACETILCOLINA ($C_7H_{16}NO_2$), principalmente. (KANDEL, 1991)
	R_{DM2}	Do ponto de vista da DM, participam de **R_{NC2}** a TSD de Brousseau (1998), pois o cérebro só se interessa pelo que é "concreto e utilizável" estando em todas as etapas da TSD a possibilidade do armazenamento via memorização quando a situação de ação, mobiliza o aluno envolvendo-o como sujeito participante da construção do conhecimento; a TAD de Chevallard (1998) que valida a existência de uma praxeologia quando os tipos de Tarefas pertencem ao encadeamento [***tipo de Tarefa, técnica, tecnologia, teoria***] em favor de uma melhor transposição didática das noções matemáticas envolvidas; os NFC de Robert (1998) para mostrar que faz-se necessário respeitar a hierarquia da circuitaria cognitva, sincronizando essa as suas expectativas.
Análise:	**A_2** – As teorias da DM, mesmo não referenciando os estudos de Izquierdo (2011) e de Kandel (1991) a respeito de **cognição e memória**, têm buscado, em seu favorecimento, considerá-las ao longo de suas institucionalizações científicas quando demonstram preocupação com as DAM a partir dos estudos de Brousseau (1998), Chevallard (1998) e Robert (1998).	

Fonte: O autor (2015).

Quadro 05

Lócus das Dificuldades de Aprendizagem Escolar (LDAE) – **$CDAE_3$**

Área:	**PSICOLOGIA**	
Programa:	Pós-Graduação da USP, (acPEE)	
Ano:	2008	Formato da Pesquisa: **TESE DE DOUTORADO**
Pesquisador:	CAVALINI	
Marcador:	**$CDAE_3$**	A análise dos subtestes as causas da DA foram, **em sua maioria, detectadas por fragilidades nas funções cognitivas percepção, atenção, memória e funções executivas**. (CAVALINI, 2008).
Relações:	**R_{NC3}**	Para que uma dada informação (meio externo) chegue, segundo Izquierdo (2011), até a área hipocampal (MLP), é condição *sine qua non* que o resultado do julgamento das funções cognitivas percepção, atenção e memória (MT), seja, nessa ordem, conforme Davidoff (2001), positivos. Dessa maneira, existe a possibilidade, segundo Kandel (1991), das funções executivas serem acionadas, em favor dos objetivos embutidos na informação, se a MLP reagir ao conteúdo momentaneamente localizado na MT. Nesse caso, além de se fazer necessário a estimulação da produção de ACETILCOLINA, é preciso que anteriormente, seja, nessa ordem, estimulado a produção de SEROTONINA, DOPAMINA ($C_8H_{11}NO_2$) e NORADENALINA ($C_8H_{11}NO_3$). (KANDEL, 1991)
	R_{DM3}	A TSD desenvolvida por Brousseau (1998), talvez seja a teoria que mais contribui para minimizar as fragilidades das funções cognitivas mencionadas pelo marcador **$CDAE_3$**, pois insere o aluno, a partir de uma situação a-didática, no centro do desenvolvimento articulado das funções fc_2, fc_4, fc_5 *e* fc_6, justificadas do ponto de vista da NC na **R_{NC3}**.
Análise:	**A_3** – Apesar de serem invisíveis a olho "nu", os neurotransmissores relacionados podem ser estimulados didaticamente, sempre que toda *ação estratégica* do ensino esteja fundamentada numa teoria de aprendizagem, como por exemplo, a TSD (***estratégica de ensino***) que viabiliza o fortalecimento das funções fc_2, fc_4, fc_5 *e* fc_6, por meio das situações que, por Brousseau (1998), foram denominadas de a-didáticas, mas que para os alunos remetem a um estado de prazer.	

Fonte: O autor (2015).

Quadro 06

Lócus das Dificuldades de Aprendizagem Escolar (LDAE) – **$CDAE_4$**

Área:	**PSICOLOGIA**	
Programa:	Pós-Graduação da USP, (acNC)	
Ano:	2010	Formato da Pesquisa: **TESE DE DOUTORADO**
Pesquisador:	REIS	
Marcador:	**$CDAE_4$**	No que se refere as DA à pesquisadora concluiu que existe diminuição do **tempo de reação aos estímulos visuais em função da idade, sobretudo, na situação de *atenção dividida***. (REIS, 2010).
Relações:	**R_{NC4}**	Os estímulos visuais têm grande participação no **sistema atencional** dado a número elevado de fotoceptores que detectam a intensidade luminosa e as cores. Se não controlados podem interferir negativamente, no caso escolar, por exemplo, nas tarefas selecionadas aumentando a necessidade de utilizar a **atenção dividida** o que pode ocasionar a perda do foco. Contrariamente, tais estímulos ajudam ao aluno manter o foco interessando-se pelas tarefas, pois algumas cores em determinadas situações também favorecem a produção de neurotransmissores que atuam diretamente no sistema emocional e no sistema mnemônico, recaptando SEROTONINA, DOPAMINA e ACETILCOLINA produzida naquela situação. (GAZZANIGA et al., 2006).
	R_{DM4}	Nesse caso a abordagem de Robert (1998) e a TAD de Chevallard (1998) podem auxiliar na seleção das tarefas fundamentais que, quando articuladas a TSD desenvolvida por Brousseau (1998), talvez reúna elementos que aproveitem o potencial das cores e da intensidade luminosa que contribuem em favor da ***atenção concentrada*** justificando as perspectivas teóricas da NC na **$R_{NC4.}$**
Análise:	**A_4** – Verifica-se o quanto é complexo a constituição de uma tarefa para lograr a possibilidade do êxito desejado, visto a quantidade de detalhes que *"invisivelmente"* participam do processo de aprendizagem de uma dada noção. Dessa, resulta o quão importa aos educadores conhecer sobre as peculiaridades contidas no órgão responsável por regular todas as atividades do corpo humano: o cérebro. Assim, quanto mais for respeitado esse funcionamento, mas chances terão as situações didáticas planejadas para mobilizar nos estudantes a importância da consciência, por meio do processamento neurocognitivo, em busca da aprendizagem.	

Fonte: O autor (2015)..

Quadro 07

Lócus das Dificuldades de Aprendizagem Escolar (LDAE) – **$CDAE_5$**

Área:	**PSICOLOGIA**	
Programa:	Pós-Graduação da USP, (acNC)	
Ano:	2012	Formato da Pesquisa: **DISSERTAÇÃO DE MESTRADO**
Pesquisador:	MARTINS	
Marcador:	**$CDAE_5$**	Esse estudo concluiu que no que se refere as DA, uma de suas causa pode ser explicada pelo empobrecimento do ambiente onde os conteúdos são apresentados, pois tal variável dificulta **o favorecimento da neurogênese – processo de formação de novos neurônios – que permitirá ao cérebro a propriedade de neuroplasticidade.** (MARTINS, 2012).
Relações:	**R_{NC5}**	Sempre que o volume do fluxo sanguíneo no cérebro, em um certo momento de uma dada atividade possibilitada pelo meio ambiente externo, for aumentado significa que os níveis de oxigenação estão sendo necessários para ativar a circuitaria responsável pela realização do trabalho cognitivo estimulado. Durante esse processo, a quantidade de sinapses cresce em níveis exponenciais o que favorece a neurogênese e, consequentemente, a possibilidade de ocorrer a neuroplasticidade (LENT, 2001). Participam dessa propriedade neurocerebral neurotransmissores como ACETILCOLINA, DOPAMINA, SEROTONINA, NORADENALINA, entre outros. (KANDEL,1991)
	R_{DM5}	A TSD desenvolvida por Brousseau (1998), talvez seja a teoria que mais contribui para minimizar as fragilidades das funções cognitivas mencionadas pelo marcador **$CDAE_3$**, pois insere o aluno, a partir de uma situação a-didática, no centro do desenvolvimento articulado das funções fc_2, fc_4, fc_5 *e* fc_6, justificadas do ponto de vista da NC na **R_{NC3}**.
Análise:	**A_5** – Apesar de serem invisíveis a olho "nu", os neurotransmissores relacionados podem ser estimulados didaticamente, sempre que toda *ação estratégica* do ensino esteja fundamentada numa teoria de aprendizagem, como por exemplo, a TSD (***estratégica de ensino***) que viabiliza o fortalecimento das funções fc_2, fc_4, fc_5 *e* fc_6, por meio das situações que, por Brousseau (1998), foram denominadas de a-didáticas, mas que para os alunos remetem a um estado de prazer.	

Fonte: O autor (2015).

1.2.1.3 – Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da PUC/SP.

Quadro 08

Lócus das Dificuldades de Aprendizagem Matemática/FT (LDAMFT) – **$DAMFT_1$**

Área:	**EDUCAÇÃO MATEMÁTICA**	
Programa:	Pós-Graduação da PUC/SP	
Ano:	1997	Formato da Pesquisa: **DISSERTAÇÃO DE MESTRADO**
Pesquisador:	LOBO DA COSTA	
Marcador:	**$DAMFT_1$**	Essa pesquisa constatou que *"muitos dos alunos <u>não conseguiram identificar os gráficos das funções seno e cosseno, colocados próximos a gráficos de funções de 1º e 2º Grau</u>"*, motivando a autora a estudar **<u>formas alternativas</u>** <u>de ensino para as funções trigonométricas</u>. (LOBO DA COSTA, 1997, p. 1, grifo do pesquisador).
Relações:	**R_{NC6}**	Nesse caso, a palavra-chave extraída da citação de Lobo da Costa (1997) que permite articulação com a NC é a ***identificação*** ou reconhecimento. Lente (2001), explica que a ação cerebral de identificar ou reconhecer uma informação apresentada no meio externo requer a ativação da função cognitiva fc_4 – atenção. Por sua vez, essa, se encontra na intersecção entre as três primeiras, fc_1, fc_2, fc_3 com a fc_5. O principal neurotransmissor que deve ser liberado nas sinapses durante esse processo é a DOPAMINA, contudo como outras *fc* também participam do mesmo, SEROTONINA e ACETILCOLINA serão necessárias.
	R_{DM6}	Ao que tudo indica, as conclusões salientadas por Lobo da Costa (1997), permite inferir que os estudantes pesquisados tem dificuldade com tarefas que exigem, conforme Robert (1998), o NT. Talvez, as causas dessa deficiência repousem sobre a incompreensão epistemológica das noções anteriores (as funções de 1º e 2º graus, apontadas por Lobo da Costa) para que possam ser diferenciadas das funções trigonométricas já que, inclusive, associam modelos de outros fenômenos naturais, se comparadas às primeiras.
Análise:	**A_6** – O marcador em tela, **DAMFT1**, salientado pela **identificação ou reconhecimento de uma informação** dirigida pela resolução de uma tarefa, reforça ainda mais a validade dos princípios da NC, sobretudo, *a existência da MLP* que é evocada para servir de parâmetro no processo de comparação e diferenciação de uma dada informação e que, por sua vez, só será considerada caso fc_1, fc_2, fc_3 sejam adequadamente acionadas. Nesse sentido, existirá a superação de uma tarefa do NT, conforme postula Robert (1998), se as noções, conceitos, definições, e propriedades estiveram disponíveis no cenário das aprendizagens dos estudantes. Esse achado representa um indício suficiente para que as noções relacionadas por Lobo da Costa (1997) sejam revisitadas pelos estudantes sempre que não ultrapassarem a tarefas no referido nível de funcionamento do conhecimento.	

Fonte: O autor (2015).

Quadro 09

Lócus das Dificuldades de Aprendizagem Matemática/FT (LDAMFT) – **$DAMFT_2$**

Área:	**EDUCAÇÃO MATEMÁTICA**	
Programa:	Pós-Graduação da PUC/SP	
Ano:	2005	Formato da Pesquisa: **DISSERTAÇÃO DE MESTRADO**
Pesquisador:	SILVA	
Marcador:	**$DAMFT_2$**	O referido autor salienta que foi impulsionado pela opção dos livros didáticos ao abordarem o tema triângulo retângulo, bem como as possíveis relações são apresentadas de forma pronta e acabada e, sobretudo, **desprovida de significado**. Dessa forma, produziu uma sequência didática por meio da **manipulação figural** das construções geométricas no plano para produzir no aluno uma aprendizagem significativa do tema exposto.
Relações:	**R_{NC7}**	Nessa pesquisa, a articulação com a NC repousa sobre o marcador "desprovida de significado". Conforme Kandel (1991), o significado, em nível cerebral, é posterior ao sentido que o cérebro perceberá, por meio das múltiplas interpretações sensoriais, da informação exterior. O alcance, apropriação e a potencialização de um novo saber apresentado dependerão, por conseguinte, segundo LeDoux (2001), da ativação das estruturas que participam do sistema límbico que permitirão a sensação de bem-estar (o **prazer e satisfação)**. Para tanto, como já foi dito em **R_{NC1}**, precisa-se estimular a produção dos neurotransmissores SEROTONINA e ACETILCOLINA, principalmente. (KANDEL, 1991).
	R_{DM7}	Para a pesquisadora Artigue (1988), não há melhor lugar para encontrar sentido e significado senão, em uma análise epistemológica de uma noção em jogo. Nela, encontra-se as justificativas iniciais que mobilizaram o desenvolvimento de uma dada noção matemática. Como essas justificativas geralmente apontam para a busca de uma solução de problemas relacionados a fenômenos naturais em favor de algum tipo de benefício para a humanidade, o cérebro tende a se interessar por exposições em que sejam valorizadas, a partir da história, tais menções.
Análise:	**A_7** – Provavelmente, compreender a importância da articulação entre sentido e significado seja a tarefa mais importante para a elaboração de um planejamento didático, considerando que a aprendizagem dos estudantes constitua-se no bem maior dos objetivos da educação e depende desse impulso para sensibilizá-los, emocioná-los e atrair sua atenção. Nesse caso, as reações **R_{NC7}** e **R_{DM7}** participam de uma engrenagem na medida em que Artigue (1988) defende a necessidade de uma análise epistemológica que para a Kandel (1991) e LeDoux (2001) se constitui a base natural fazer emergir sentido e significado para a aquisição de uma nova informação.	

Fonte: O autor (2015).

Quadro 10

Lócus das Dificuldades de Aprendizagem Matemática/FT (LDAMFT) – **$DAMFT_3$**

Área:	**EDUCAÇÃO MATEMÁTICA**	
Programa:	Pós-Graduação da PUC/SP	
Ano:	2009	Formato da Pesquisa: **DISSERTAÇÃO DE MESTRADO**
Pesquisador:	BORGES	
Marcador:	**$DAMFT_3$**	**Dificuldades conceituais** dos tipos, ***sen 30°*** **corresponde a ½** e a **transição do triângulo retângulo para o círculo trigonométrico** foram verificadas pelo pesquisador que justifica que tais passagens não atendem as necessidades dos alunos, propondo uma sequência didática utilizando do *software Geogebra*. (BORGES, 2009).
Relações:	**R_{NC8}**	Considerando-se que os componentes do marcador acima (**Dificuldades conceituais**) compõem duas partes de um processo, a NC considera frágil a articulação entre eles, sempre que os primeiros, ***sen 30°*** e a **trigonometria do triângulo retângulo** carecerem da fc_7 . Para Izquierdo (2011) até que essa função tenha sido acionada, vale lembrar que a circuitaria das seis anteriores precisam ter sido desenvolvida de forma adequada. Caso contrário, não se têm disponíveis os subsunçores que Ausubel legitima como alicerce para que a outra parte do processo seja alcançada, **½** e a **trigonometria do círculo trigonométrico.** Em se tratando de NC, faz-se necessário a estimulação e manutenção da substância química ACETILCOLINA para dispor livremente da mesma. (KANDEL, 1991).
	R_{DM8}	Depois da etapa de sensibilização (percepção do sentido e significado de uma dada noção), a modulação para o armazenamento da informação depende do treino por meio do exercício, das repetições, atrelada à compreensão dos conceitos relacionados ao núcleo ou unidade conceitual, denominadas por Chevallard (1998) de Organizações Matemáticas Pontuais (OMP) que são caracterizada pela utilização de uma mesma técnica. A mudança para uma técnica mais sofisticada – decorrente de uma tarefa também mais elaborada que mobilizará outro Nível de Funcionamento do Conhecimento/NFC, segundo Robert (1988) – só deveria ser introduzida caso existisse e fosse validado o completo domínio da técnica inicial. Talvez, dado o volume de conteúdo e as questões de individualidade de cada estudante não permitam a contemplação e verificação de uma aprendizagem coletiva e, com isso, não seja possível o professor identificar se as dificuldades conceituais foram superadas ou não.
Análise:	**A_8** – Combinar os resultados das relações **R_{NC8}** e **R_{DM8}** é mais uma forma de fortalecer e aproximar as análises resultantes da comunicação interativa e contínua entre dois ambientes destacados inicialmente: o meio externo (**DM**) e o meio interno (**NC**), pois o diálogo entre eles permite observar que ações do meio externo interferem nas ações do meio interno e vice-versa. Portanto, quanto mais for conhecido desses dois meios, provavelmente, menos dificuldades conceituais se desenvolvam nos estudantes.	

Fonte: O autor (2015).

Quadro 11

Lócus das Dificuldades de Aprendizagem Matemática/FT (LDAMFT) – **$DAMFT_4$**

Área:	**EDUCAÇÃO MATEMÁTICA**	
Programa:	Pós-Graduação da PUC/SP	
Ano:	2010	Formato da Pesquisa: **DISSERTAÇÃO DE MESTRADO**
Pesquisador:	SOUZA	
Marcador:	**$DAMFT_4$**	Tais dificuldades foram identificadas na interpretação gráfica, bem como em propriedades para articular as representações algébrica e gráfica das FT. De modo que o investimento no *software Graphmatic*, permitiu alcançar a "aprendizagem e proporcionou um **aumento cognitivo** de conceitos relacionados à função seno e cosseno e, através de um processo dinâmico, que permitiu a articulação entre as representações algébricas e gráficas". (SOUZA, p. 106 -107, 2010).
Relações:	**R_{NC9}**	**$\approx R_{NC8}$**
	R_{DM9}	**$\approx R_{DM8}$**
Análise:	**$A_9 \approx A_8$**	

Fonte: O autor (2015).

Quadro 12

Lócus das Dificuldades de Aprendizagem Matemática/FT (LDAMFT) – **$DAMFT_5$**

Área:	**EDUCAÇÃO MATEMÁTICA**	
Programa:	Pós-Graduação da PUC/SP	
Ano:	2011	Formato da Pesquisa: **DISSERTAÇÃO DE MESTRADO**
Pesquisador:	RIBEIRO	
Marcador:	**$DAMFT_5$**	Essa pesquisadora verificou a existência de dificuldades de aprendizagem relativas às FT classificadas em factuais, conceituais, procedimentais e atitudinais o que possibilitou a pesquisadora concluir: o ensino das Funções Trigonométricas não mobiliza a **motivação** nos alunos. (RIBEIRO, 2011)
Relações:	**R_{NC10}**	Como motivação está relacionado a sentido e significado, espelha-se as relações e análises seguintes as mesmas das **$DAMFT_2$**. **$\approx R_{NC7}$**
	R_{DM10}	**$\approx R_{DM7}$**
Análise:	**$A_{10} \approx A_7$**	

Fonte: O autor (2015).

Quadro 13

Lócus das Dificuldades de Aprendizagem Matemática/FT (LDAMFT) – **$DAMFT_6$**

Área:	**EDUCAÇÃO MATEMÁTICA**	
Programa:	Pós-Graduação da PUC/SP	
Ano:	2013	Formato da Pesquisa: **DISSERTAÇÃO DE MESTRADO**
Pesquisador:	SANTOS	
Marcador:	**$DAMFT_6$**	Essa pesquisadora apontou que tais dificuldades decorrem de uma **carga conceitual difícil de ser assimilada**. Para superá-las, introduziu o *software Winplot* e a interdisciplinaridade entre Física e Matemática. (SANTOS, 2013)
Relações:	**R_{NC11}**	Observando o sinal apontado pela autora (carga conceitual), verificou-se que o mesmo reflete as análises das **$DAMFT_3$**. **$\approx R_{NC8}$**
	R_{DM11}	**$\approx R_{DM8}$**
Análise:	**$A_{11} \approx A_8$**	

Fonte: O autor (2015).

1.2.1.4 – Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da UNFESP – Rio Claro/SP.

Nota: não foram encontrados trabalhos que canalizassem esforços específicos às DAMFT.

1.2.1.5 – Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da UFMS.

Nota: não foram encontrados trabalhos que canalizassem esforços específicos às DAMFT.

1.2.1.6 – Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da UNIAN/SP.

Quadro 14

Lócus das Dificuldades de Aprendizagem Matemática/FT (LDAMFT) – **$DAMFT_7$**

Área:	**EDUCAÇÃO MATEMÁTICA**	
Programa:	Pós-Graduação da UNIAN/SP	
Ano:	2010	Formato da Pesquisa: **DISSERTAÇÃO DE MESTRADO**
Pesquisador:	GOIOS	
Marcador:	**$DAMFT_7$**	O referido pesquisador aponta às DAMFT para o **entendimento de correspondência entre medidas de graus-radianos e as razões trigonométricas como números não têm unidade de medida**. Sua conclusão, evidenciou que *"[...] quando o aluno fala sobre o OE* [função seno] *o dinamismo se sobrepõe ao estático auxiliando a compreensão deste conceito."* (GOIOS, 2010, p. 123).
Relações:	**R_{NC12}**	O mesmo ocorre com os sinais apontados por Gois (2010) e, assim, verificou-se que as **$DAMFT_3$** traduzem as análises subsequentes. **≈ R_{NC8}**
	R_{DM12}	**≈ R_{DM8}**
Análise:	**A_{12} ≈ A_8**	

Fonte: O autor (2015).

Quadro 15

Lócus das Dificuldades de Aprendizagem Matemática/FT (LDAMFT) – **$DAMFT_8$**

Área:	**EDUCAÇÃO MATEMÁTICA**	
Programa:	Pós-Graduação da UNIAN/SP	
Ano:	2011	Formato da Pesquisa: **DISSERTAÇÃO DE MESTRADO**
Pesquisador:	ALVES	
Marcador:	**$DAMFT_8$**	A partir de uma análise nos documentos oficiais Alves (2011) concluiu que uma das causas da DAMFT reside em *"**decorrência do não uso de diferentes materiais que se completem**, com a finalidade de proporcionar essa construção* [FT]*."* (ibidem, p. 104, grifos do pesquisador).
Relações:	**R_{NC13}**	O mesmo ocorre com os sinais apontados por Gois (2010) e, assim, verificou-se que as **$DAMFT_3$** traduzem as análises subsequentes. **≈ R_{NC8}**
	R_{DM13}	**≈ R_{DM8}**
Análise:	**A_{13} ≈ A_8**	

Fonte: O autor (2015).

Quadro 16

Lócus das Dificuldades de Aprendizagem Matemática/FT (LDAMFT) – **$DAMFT_9$**

Área:	**EDUCAÇÃO MATEMÁTICA**	
Programa:	Pós-Graduação da UNIAN/SP	
Ano:	2012	Formato da Pesquisa: **DISSERTAÇÃO DE MESTRADO**
Pesquisador:	ORFÃO	
Marcador:	**$DAMFT_9$**	O autor, em sua reflexão**, aponta para o ensino como sendo, talvez, uma das origens das causas DAMFT, já que é por meio da sala de aula que o aluno se depara com as diferentes noções matemáticas**, especificamente, as da FT. Em sua investigação, Orfão (2012), analisou os aspectos favoráveis e não favoráveis para o uso de tecnologia – computador e *software Geogebra* – no ensino das funções trigonométricas. Mesmo detectando ambos os tipos, ressaltou que os aspectos favoráveis se contrapõem aos não favoráveis, pois "oportunizaram aos professores e aos alunos vivenciarem uma nova maneira de aprender um conteúdo, diferente da maneira tradicional, e dar a ambas as partes a liberdade de exercer livremente a imaginação e a criatividade [...]". (*ibidem,* p. 113).
Relações:	**R_{NC14}**	Da mesma forma que em Gois (2010), tais sinais sugerem as relações percebidas no marcador **$DAMFT_3$** e, assim, verificou-se que podem também ser traduzir as análises subsequentes. **$\approx R_{NC8}$**
	R_{DM14}	**$\approx R_{DM8}$**
Análise:	**$A_{14} \approx A_8$**	

Fonte: O autor (2015).

Quadro 17

Lócus das Dificuldades de Aprendizagem Matemática/FT (LDAMFT) – **$DAMFT_{10}$**

Área:	**EDUCAÇÃO MATEMÁTICA**	
Programa:	Pós-Graduação da UNIAN/SP	
Ano:	2013	Formato da Pesquisa: **DISSERTAÇÃO DE MESTRADO**
Pesquisador:	MIASHIRO	
Marcador:	**$DAMFT_{10}$**	A partir de sua experiência profissional, constatou que os alunos não discerniam as razões trigonométricas seno e cosseno no triângulo retângulo das suas extensões no círculo a elas relacionado, pois, sobretudo, as medições em radianos geravam deformações conceituais, erros e dúvidas. Assim, investiu-se na cominação de materiais concretos com o *software Cabri-Géomètre II* e alicerçado na TAS de Ausubel (1982), concluiu que "[...] antes de aplicarmos qualquer estratégia de ensino, para uma **aprendizagem significativa do conceito "ciclo trigonométrico", temos que confirmar se todos os conceitos subsunçores estão devidamente consolidados na estrutura cognitiva dos alunos**, pois qualquer falha nesses conhecimentos (sistema cartesiano ortogonal, definição de lugar geométrico do círculo, conjunto dos números reais e medidas em radianos) poderá impedir a aplicação do princípio de reconciliação integrativa, ou seja, irá impossibilitar a combinação desses conceitos subsunçores". (MIASHIRO, 2013, p. 150, grifo do pesquisador).
Relações:	**R_{NC15}**	Sinais como *software* e subsunçores já foram relacionados anteriormente e, nesse caso, podem representar por meio de uma junção as relações e análise seguintes: **$\approx R_{NC7} + R_{NC8}$**
	R_{DM15}	**$\approx R_{DM7} + R_{DM8}$**
Análise:	**$A_{15} \approx A_7 + A_8$**	

Fonte: O autor (2015).

Quadro 18

Lócus das Dificuldades de Aprendizagem Matemática/FT (LDAMFT) – **$DAMFT_{11}$**

Área:	**EDUCAÇÃO MATEMÁTICA**	
Programa:	Pós-Graduação da UNIAN/SP	
Ano:	2013	Formato da Pesquisa: **TESE DE DOUTORADO**
Pesquisador:	SILVA	
Marcador:	**$DAMFT_{11}$**	Esse pesquisador enfatizou que as dificuldades de aprendizagem alunos e professores do Ensino Médio residem na construção de gráficos cartesianos trigonométricos. Para superá-las priorizou os diálogos dos alunos envolvidos em um ambiente denominado de Contexto Interativo de Aprendizagem. Os resultados demonstraram que os estudantes, quando provocados a partir de tarefas instigadoras, desenvolvem discursos sobre a natureza dos gráficos representantes dos fenômenos periódicos que auxiliaram a minimizar, em grupo, suas dificuldades sobre a percepção de variáveis e decomposição dos movimentos circulares que deram o sentido necessário para construir os gráficos propostos.
Relações:	**R_{NC16}**	**$\approx R_{NC7} + R_{NC8}$**
	R_{DM16}	**$\approx R_{DM7} + R_{DM8}$**
Análise:	**$A_{16} \approx A_7 + A_8$**	

Fonte: O autor (2015).

1.2.1.7 – Programa de Pós-Graduação da UFS.

Quadro 19

Lócus das Dificuldades de Aprendizagem Matemática/FT (LDAMFT) – **$DAMFT_{12}$**

Área:	**EDUCAÇÃO MATEMÁTICA**	
Programa:	Pós-Graduação em Educação	
Ano:	2002	Formato da Pesquisa: **DISSERTAÇÃO DE MESTRADO**
Pesquisador:	FONSECA	
Marcador:	**$DAMFT_{12}$**	Esse trabalho concluiu que a **ausência de variação da exposição do conteúdo articulada à carência do uso de recursos didáticos** contribuiu para a instalação das DAMFT. Para diminuí-las, foi inserido nas aulas recursos que permitiram uma melhor comunicação entre o meio interno e o meio externo, por meio da associação estímulo-contexto-tarefa-prazer.
Relações:	**R_{NC17}**	O Marcador da **$DAMFT_{12}$** salienta dois aspectos que muito interessa ao cérebro: **variação da exposição do conteúdo** e o **uso de recursos didáticos**. Dadas as semelhantes características, ao marcador **$DAMFT_2$**, deu-se por equivalentes as relações destacadas nesse quadro, bem como a análise final. Assim, **$R_{NC17} \approx R_{NC7}$**
	R_{DM17}	**$R_{DM17} \approx R_{DM7}$**
Análise:	**$A_{17} \approx A_7$**	

Fonte: O autor (2015).

Quadro 20

Lócus das Dificuldades de Aprendizagem Matemática/FT (LDAMFT) – **$DAMFT_{13}$**

Área:	**EDUCAÇÃO MATEMÁTICA**	
Programa:	Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática	
Ano:	2011	Formato da Pesquisa: **DISSERTAÇÃO DE MESTRADO**
Pesquisador:	FONSECA	
Marcador:	**$DAMFT_{13}$**	A principal causa das DAMFT verificadas nessa investigação foi à articulação entre as representações algébricas e gráficas das FT. Segundo o autor, a solução encontrada foi a implementação de uma teoria de aprendizagem que, nesse caso, articulou a TSD de Brousseau (1998) a TAS de Ausubel (1980), principalmente.
Relações:	**R_{NC18}**	Pela proximidade das características com as **$DAMFT_4$**, as relações encontradas também podem ser consideradas equivalentes a **R_{NC9}**.
	R_{DM18}	**$\approx R_{DM9}$**
Análise:	**$A_{18} \approx A_9$**	

Fonte: O autor (2015).

1.2.2 – Resultado final do mapeamento das DAM.

Quadro 21

Mapeamento das CDAE e DAMFT nos Programas de Pós-Graduação pesquisados.

PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO	MARCADORES	$f(R_{NCn}) = R_{DMn}$	ANÁLISES
EDUCAÇÃO (E)	**$CDAE_1$**	$f(R_{NC1}) = R_{DM1}$	**A_1**
PSICOLOGIA (P)	**$CDAE_2$**	$f(R_{NC2}) = R_{DM2}$	**A_2**
	$CDAE_3$	$f(R_{NC3}) = R_{DM3}$	**A_3**
	$CDAE_4$	$f(R_{NC4}) = R_{DM4}$	**A_4**
	$CDAE_5$	$f(R_{NC5}) = R_{DM5}$	**A_5**
EDUCAÇÃO MATEMÁTICA (EM)	**$DAMFT_1$**	$f(R_{NC6}) = R_{DM6}$	**A_6**
	$DAMFT_2$	$f(R_{NC7}) = R_{DM7}$	**A_7**
	$DAMFT_3$	$f(R_{NC8}) = R_{DM8}$	**A_8**
	$DAMFT_4$	$f(R_{NC9}) = R_{DM9}$	**A_9**
	$DAMFT_5$	$f(R_{NC10}) = R_{DM10}$	**A_{10}**
	$DAMFT_6$	$f(R_{NC11}) = R_{DM11}$	**A_{11}**
	$DAMFT_7$	$f(R_{NC12}) = R_{DM12}$	**A_{12}**
	$DAMFT_8$	$f(R_{NC13}) = R_{DM13}$	**A_{13}**
	$DAMFT_9$	$f(R_{NC14}) = R_{DM14}$	**A_{14}**
	$DAMFT_{10}$	$f(R_{NC15}) = R_{DM15}$	**A_{15}**
	$DAMFT_{11}$	$f(R_{NC16}) = R_{DM16}$	**A_{16}**
	$DAMFT_{12}$	$f(R_{NC17}) = R_{DM17}$	**A_{17}**
	$DAMFT_{13}$	$f(R_{NC18}) = R_{DM18}$	**A_{18}**
Totais	**18**	**18**	**18**

Fonte: O autor (2015).

Desse mapeamento, pode-se concluir que:

a. É possível identificar sinais de NC em todos os marcadores e, consequentemente, em todos os programas de Pós-Graduação pesquisados, conforme os Quadros 03 a 20 (Cf. p. 72-86);

b. Com base no Quadro 21 (Cf. p. 88), verificou-se que as relações da DM são funções imediatas nas relações iniciais com a NC;

c. Servindo-se das análises dos Quadros 03 a 20 (Cf. p. 72-86), bem como no Quadro 21, constatou-se que quaisquer análises posteriores à $\mathbf{A_9}$ podem ser interpretadas a partir das anteriores que amalgamaram as relações entre NC e DM para justificarem a etiologia das DAMFT, principalmente.

Com efeito, e, tendo cumprido os objetivos de construir uma reflexão impulsionada pelos estudos de Fonseca (2002, 2011) e atualizar as perspectivas sobre as causas das DAM que encontraram nas pesquisas embasadas pela Neurociência Cognitiva, o lócus natural, microbiológico e invisível aos olhos de pesquisadores, professores, pais e filhos que buscam encontrar explicação para a instalação e continuação das DAM, pretende-se iniciar o estudo da Transição do Ensino das Funções Trigonométricas Ensino Médio – Ensino Superior, considerando tanto os pressupostos teórico-metodológicos da Didática da Matemática bem como da Neurociência Cognitiva.

Assim, o capítulo seguinte objetiva apresentar um panorama sobre a problemática da Transição Ensino Médio – Ensino Superior, as hipóteses e as questões de pesquisa levando em conta, as perspectivas atuais sobre as DAM, sobretudo, as contribuições da Neurociência Cognitiva dada às descobertas e os avanços no que se refere ao desenvolvimento humano, em prol de uma melhor qualidade de vida.

CAPÍTULO II

Um panorama da Transição do Ensino das Funções Trigonométricas EM-ES: elementos norteadores da pesquisa.

Considerações iniciais

A primeira parte deste capítulo objetiva, inicialmente, apresentar um rastreamento minucioso – nos últimos cinco anos – sobre as pesquisas envolvendo Funções em geral, particularmente, Funções Trigonométricas. Em segundo lugar, intenta garimpar e mapear as investigações abordadas sobre a Transição do Ensino Médio (EM) e Ensino Superior (ES), com vistas a viabilizar os objetivos desta tese.

Neste sentido, optou-se por iniciar esse rastreamento nas instituições escolhidas, que fomentam a pesquisa brasileira em seus Programas de Pós-graduação, específicos na área de Educação Matemática: PUC – Pontifícia Universidade Católica/ São Paulo (desde 1975), UNESP – Universidade Estadual Paulista /Rio Claro (desde 1984), UFMS – Universidade Federal do Mato Grosso do Sul (desde 2007) e, mais recentemente, a UNIAN – Universidade Anhanguera de São Paulo (desde 2008).

Analisou-se também os principais anais dos congressos internacionais, já legitimados pela comunidade científica da Educação Matemática, a fim de complementar possíveis lacunas das inquirições anteriores, a exemplo do PME (*Psychology of Mathematics Education*), CERME (*Congress of European Research in Mathematics Education*), principalmente.

Em sequência, mobilizou-se a RDM (*Recherche en Didactique des Mathématiques* – FRANÇA) e o EMS (*Education Mathematics Studies* – EUA) por serem consagrados os principais periódicos internacionais, possibilitando pinçar possíveis articulações entre as Funções ou Funções Trigonométricas, com a Transição entre os dois níveis de ensino citados acima.

Isto posto, espera-se que, as escolhas acima, representem um fio condutor da consulta às fontes documentais, tentando justificar a notoriedade e

relevância desta pesquisa, bem como possa dar luzes ao cenário inicial da formação de professores de Matemática, no que se refere à contínua avaliação, em suas matrizes curriculares partindo das teorias de Artigue (2001), Dias (1998), Douady (1984), Fisher (1989), Bosch e Chevallard (1999), Robert (1997), Bass (1998) e Rogalski (1995) em prol da diminuição dos problemas de ensino-aprendizagem, particularmente, das Funções Trigonométricas nos referidos níveis de ensino.

Finalmente, foi discutido a problemática que parte de constatações resultantes de estudos anteriores e, também da presente investigação permitindo eleger as hipóteses de pesquisa e as questões norteadoras deste trabalho. Na sequência, foram apresentados o objetivos geral, os objetivos específicos e, por fim, a metodologia investigativa.

2.1 – O Estado da Arte:

Nos últimos dez anos do século XX, a produção científica brasileira no campo da Educação Matemática tem crescido consideravelmente. Esse fato pode ser verificado quando se avalia os anais dos congressos, os bancos de dissertações e teses, a publicação de artigos em periódicos, etc.

Vale ressaltar, que nesse campo existe uma variedade de linhas de pesquisa que ajudam a erguer o alicerce da Educação Matemática, sendo que o binômio Ensino-Aprendizagem é apontado como uma das suas inquietações iniciais.

Fez-se necessário essa observação para poder posicionar o interesse pela pesquisa no referido campo, já que é também na relação entre Ensino e Aprendizagem que se dá a construção do conhecimento. Com efeito, é na potencialização ou na fragilidade dessa constituição, que os estudantes terão uma **Transição EM-ES** adequada ou não, às expectativas pessoais e institucionais esperadas, conforme postula Chevallard (1992, 1994).

Nesse sentido, pode-se dizer de modo generalista, que o ser humano vive mergulhado em contínuos processos de **transição**. Por exemplo, o nascimento de uma criança é demarcado pelo nosso **primeiro tipo de transição** de um meio

interno – o útero, para um meio externo – o ambiente externo, caso seja referido em termos de **desenvolvimento humano**. A esse respeito, tanto Freud (1856-1939), Piaget (1896-1980) e Luria (1902-1977) dividem a continuação desse processo em fases, nas quais apresentam, respectivamente, a **transição entre as fases psicossexuais**, a **transição entre os estágios do desenvolvimento** e, por último, a **transição entre as fases do desenvolvimento neuropsicológico**.

Desta forma, percebe-se que anteriormente a qualquer estudo teórico sobre o processo de **transição**, esta já era estudada em termos de desenvolvimento humano, sendo estes os paradigmas fundamentais que permitiram o aparecimento de outros pontos de vistas mais voltados para relações pessoais e institucionais.

Cabe ainda destacar que, quando os autores acima classificaram em faixas o desenvolvimento humano, também se preocuparam com a passagem entre estas, apontando possíveis surgimentos de problemas, quando houvesse a parcial ou completa ausência de **experiências** relacionadas às mesmas.

Não é demais lembrar que a partir desses autores justificam-se, os objetivos da presente investigação, já que os processos de **transição** implicam também em questões do desenvolvimento humano integral, seja no âmbito biológico, psicológico, social, epistemológicos, cognitivo ou institucional.

Esses três últimos domínios estão diretamente ligados aos pressupostos teóricos de Gueudet (2008a), utilizados para analisar a **transição** entre os diferentes níveis de ensino na França. Segundo essa autora, as possíveis dificuldades dos estudantes para continuarem seus estudos na universidade, particularmente, em Álgebra Linear, deve-se a: às **dificuldades dos alunos decorrem do fato do ingresso na universidade carecer de conhecimento e dificuldades intrínsecas**; **dificuldades próprias à falta de flexibilidade de conhecimento dos alunos** e, por fim, **mudança da instituição**. Esses pressupostos serão, posteriormente, tratados em um tópico seguinte.

Imerso na perspectiva da **transição** entre o **EM-ES**, encontram-se, entre outros, o campo da Trigonometria, das Funções, mais particularmente, das Funções Trigonométricas que permitem a construção do alicerce para amalgamar os

estudos de iniciação ao Cálculo Diferencial e Integral na universidade possibilitando ao estudante da Licenciatura em Matemática uma bricolagem para subsidiar sua futura prática docente.

O destaque dos campos elencados é parte de um processo de pesquisa de Fonseca (2002, 2010, 2011, 2012a) quando se debruçou sobre os mesmos para desenvolver suas investigações sobre a aprendizagem significativa, em dois cursos de mestrado, da Universidade Federal de Sergipe. Na primeira ocasião, o autor demonstrou que o alcance de uma aprendizagem significativa se dá por meio de uma diversidade de atividades metodológicas, focadas num mesmo objeto, particularmente, a Trigonometria. Na segunda, ficou constatado que a aprendizagem significativa das Funções Trigonométricas é possível, desde que também se faça o emprego dos princípios da Engenharia Didática de Artigue (1988) articulados cuidadosamente, segundo postula Brousseau (1998), a uma Sequência Didática.

Desta forma, foi impulsionado pela questão aberta, deixada na conclusão de Fonseca (2011) para apresentar um levantamento de trabalhos, que de alguma forma, demonstraram preocupações com os três campos acima mencionados, bem como com a **transição** entre os dois referidos níveis de Ensino. Segundo o autor é

> [...] intenção prosseguir novos estudos investigando como está acontecendo o processo de Ensino e Aprendizagem das Funções Trigonométricas na **transição do Ensino Médio para o Ensino Superior**, imaginando que se os problemas de aprendizagem Matemática não são superados pelos futuros professores de Matemática, como e quando os mesmos estariam aptos a ministrar aulas no Ensino Básico evitando o contágio de forma negativa de se aprender Matemática? (FONSECA, 2011, p.149, grifo dessa pesquisa).

Com efeito, iniciou-se o rastreamento pelo território nacional por estarem mais disponíveis nesse momento. Ao fazer tal consideração, acrescentou-se também que, para tanto, utilizou-se inicialmente, o intervalo temporal de quatro anos por entender ser compatível com a mobilização mnemônica mais contemporânea no que tange à atualização de seus resultados para se configurar o desenvolvimento desse levantamento.

2.1.1 – O cenário nacional:

Respeitando a cronologia histórica, iniciou-se a primeira etapa desse levantamento pela PUC/SP. Sendo a instituição pioneira na implantação da Pós-graduação em Educação Matemática no Brasil, reuniu entre os anos de 1992 e 2014, cerca de 599 produções científicas, entre Dissertações de Mestrado e Teses de Doutorado. Não obstante, a esse número significativo de trabalhos, não foi localizado no espaço de 2011 – 2014 pesquisas que focassem seus interesses pela análise no Ensino-aprendizagem das Funções, Trigonometria, Funções Trigonométricas ou a Transição o **EM-ES.**

Essa lacuna serviu de pretexto para justificar a necessidade de alongar o período do rastreamento para cinco anos anteriores ao ingresso no Curso de Doutorado da UNIAN (2011). Desta forma, examinando o intervalo de 2010 – 2006 encontraram-se algumas investigações que permitiram elencar algumas preocupações iniciais de seus respectivos pesquisadores.

Ainda cabe explicar que a opção pelo conceito matemático de Funções foi inserida por demarcar o estudo entre duas variáveis, característica notória no estudo das Funções Trigonométricas. Além disso, para ajudar na compreensão da importância desse tema, nos Ensinos Médio e Superior.

Nesse sentido, iniciando pelas Teses de Doutorado, foi encontrada a pesquisa de Magalhães (2009) intitulada **"Mapas conceituais digitais como estratégia para o desenvolvimento da metacognição no estudo de funções"**, cujo principal objetivo foi *"analisar se o trabalho cognitivo gerado pela utilização de mapas conceituais alavanca o desenvolvimento de estratégias metacognitivas dos estudantes"* (*ibidem*, p. 08). Para alcançar esse intento, o autor utilizou-se dos pressupostos da Engenharia Didática de Artigue (1996), construindo seu quadro teórico apoiado na Teoria das Situações Didáticas (TSD) de Brousseau (1998), nos trabalhos sobre metacognição e estratégias metacognitivas, abordados por Flavell (1999), e nas pesquisas sobre mapas conceituais de Novak (1984) e Moreira (2006). Magalhães (2009), concluiu que a interface entre a TSD e o uso dos mapas conceituais digitais possibilitou aos alunos a mobilização de estratégias

metacognitivas para construir os mesmos, sendo essas estratégias influenciadoras positivamente no processo de aprendizagem.

Antecedente a essa pesquisa, localizou-se também a inquirição de Mariani (2006) denominada de **"Transição da Educação Básica para o Ensino Superior: a coordenação de registros de representação e os conhecimentos mobilizados pelos alunos no curso de Cálculo"** que objetivou, segundo a autora, *"investigar como a coordenação de registros representação semiótica contribui para explicitação dos conhecimentos mobilizados por alunos ingressantes no Curso de Cálculo, frente a tarefas organizadas com base no conceito de função"* (*ibidem*, p. 07). Para atingí-lo, a autora fez a opção pela metodologia da pesquisa qualitativa com *design* de estudo de caso, que privilegiou o planejamento das tarefas a partir de características vinculadas ao funcionamento cognitivo, realçando os diferentes tipos de conversão dos registros de representação semiótica. Para tanto, pautou-se na Teoria dos Registros de representação Semiótica de Duval (1995) e também no conceito de Contrato Didático de Brousseau (1986). Em sua análise, a pesquisadora concluiu que tarefas auxiliam a coordenação de registro do objeto função e, também, nas diferentes representações de limites e derivadas. Além disso, ficou comprovado que os registros da língua natural mostraram-se adequados quando se desejava perceber os conhecimentos, ditos "mascarados", por meio de algarismos mecânicos e convencionais. Este fato permitiu a pesquisadora dizer que, em geral, os estudantes não atribuem significado aos símbolos utilizados.

No mesmo período, o trabalho de Rossini (2006), demonstra preocupação articuladora sob o título **"Saberes docentes sobre o tema função: uma investigação das praxeologias"**. O objetivo dessa tese foi

> investigar a (re)construção do conceito de função em um grupo de professores de Matemática da Rede Pública Estadual de Ensino do Estado de São Paulo, ao desenvolverem coletivamente e aplicarem uma sequência didática para o ensino e aprendizagem do tema em uma sala de oitava série dessa rede. (*ibidem*, p. 18).

Para tanto, a pesquisadora adotou a metodologia ação-pesquisa, no intuito de tornar colaborativa a investigação em que interagem pesquisador e professores, bem como suas práticas em formação e em ação. Nesse contexto,

serviu-se da Teoria Antropológica do Didático, para construir a sua fundamentação teórica. Seu trabalho é concluído afirmando que os professores conseguem articular as organizações Matemáticas e Didáticas, para criarem novos conteúdos. Além disso, afirmou que os professores refletiram positivamente sobre as ações de seus alunos, sentindo-se mais valorizados pelo seu trabalho.

Visto vários trabalhos de Tese de Doutorado, a continuidade do levantamento é realizada nos bancos de Dissertações de Mestrado. Um dos primeiros trabalhos encontrados é o de Lucas (2009), cujo título foi denominado de **"Equações e Funções: descontinuidades conceituais"**. Seu objetivo, apesar de não ter sido exposto, consistiu em identificar e analisar as descontinuidades conceituais que conduzem a erros, no processo do cálculo das raízes das funções. Com o objetivo de alcançar essa finalidade, o autor, não explicitando em seu texto, descreve nas entrelinhas, que se utilizou da pesquisa qualitativa alicerçada em Duval (2003), sendo esta denominada de metodologia de análise de conteúdo. Em suas conclusões implícitas, afirma ter verificado que os sujeitos participantes abordavam uma função como uma equação, sempre que necessitam encontrar valores para sua variável independente, tratando-a como incógnita.

Já a investigação de Ardenghi (2008), **"Ensino e aprendizagem do conceito de função: pesquisas realizadas no período de 1970 a 2005 no Brasil"** apontou os caminhos da história para tratar do conteúdo em tela. Teve como objetivo *"compreender dificuldades de alunos sobre o conceito de função observadas em nossas experiências de ensino de Matemática, e também em pesquisas que tratam do referido tema"* (ARDENGHI, 2008, p. 06). Define a metodologia utilizada como estado da arte, inspirando-se em D'Ambrosio (1993), Messina (1999) e em Fiorentini (1994). Em suas conclusões, destaca que uma das dificuldades – o distanciamento entre a linguagem técnica e a realidade do aluno para abordar a noção de função –, por exemplo, está atrelada às concepções e orientações dos livros didáticos e que o professor deveria conhecer os resultados das pesquisas para melhorar a qualidade do ensino que permita uma aprendizagem significativa. Por último, apontou o uso de *softwares* como uma alternativa que tem diminuído as dificuldades de aprendizagem focadas, nesse conteúdo.

No caso da pesquisa de Imafuku (2008), **"Sobre a passagem do estudo de função de uma variável real para o caso de duas variáveis"**, o objetivo foi:

> verificar as dificuldades e saberes manifestados por estudantes relativos à **transição** do estudo das funções de uma variável para o caso de duas, no que diz respeito às variáveis dependentes e independentes e à interdependência entre elas, ao domínio e o gráfico, à relação entre o gráfico do domínio e o gráfico da função e, também quais manifestações são reveladas no estudo das derivadas parciais de primeira ordem. (*ibidem*, p. 07, grifo dessa pesquisa)

Segundo o autor, o estudo foi apoiado na Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Duval (2003) que, por meio de uma análise qualitativa de questionários, constataram algumas dificuldades associadas ao sistema de eixos 3D, compreensão do domínio e sua representação, conversão do registro da língua natural para algébrica e interpretação de gráficos que diminuem positivamente no estudo das derivadas parciais.

Paralelamente, foi encontrado também o trabalho de Rodrigues (2008) intitulado **"A compreensão de alunos, ao final do ensino Médio, relativa ao conceito de variável"**, cuja finalidade foi "*investigar a compreensão de alunos do terceiro ano do Ensino Médio a respeito do conceito de variável"* (*ibidem*, p. 08). Ressalta a autora, que se utilizou de uma ferramenta teórico-metodológica conhecida como modelo 3UV desenvolvida por Trigueros e Ursini (2001). Esta pesquisa é concluída discriminando algumas dificuldades discentes, quando lhes são oferecidos problemas que exigem a aprendizagem do conceito de variável e, por isso, parecem apontar algumas habilidades que deveriam ser mais exploradas pelo professor, para que se alcance a compreensão das mesmas.

Outra autora, Signorelli (2007), desenvolveu um estudo sobre **"Um ambiente virtual para o ensino semipresencial de funções de uma variável real: design e análise"**. Ressalta a autora que sua pesquisa objetivou elaborar e implementar um ambiente virtual, para um curso semipresencial numa instituição privada de São Paulo. Na metodologia design research, para analisar as atividades propostas, bem como a organização geral do ambiente. Apesar de não ter exposto uma teoria para fundamentar seu texto, destacou o Modelo de Estratégia Argumentativa de Castro *et al* (2004). Sua principal conclusão afirma que existem

dois problemas de cunho institucional: a falta de conhecimentos prévios de Matemática básica e de uma cultura de trabalhos on line.

De acordo com o período pré-estabelecido, 2010 a 2006, essa primeira etapa do rastreamento é concluída com o trabalho de Martins (2006), intitulado **"Análise da dialética ferramenta-objeto na construção do conceito de função"**. Apesar de não ser encontrado explicitamente no texto, nos parece que o objetivo dessa pesquisa foi compreender como é construído o conceito de função, partindo-se da dialética ferramenta-objeto, conforme eleita a teoria de Douady (1984) como fundamentação teórica principal. Inspirado em Sierpinska (1992), apropria-se de cinco condições para desenvolver a aprendizagem do conceito de função, elaborando, dessa forma, uma sequência didática pautada nos princípios da Engenharia Didática de Artigue (1996). Na conclusão, afirma ter validado as hipóteses iniciais, no que se refere mobilização e generalização do conceito de função e que a dialética ferramenta-objeto é um recurso eficiente na construção do mesmo.

Sobretudo, por entender ser importante destacar com brevidade outros trabalhos que, de alguma forma, abordaram o campo das funções no Programa de Pós-graduação em Educação Matemática da PUC/SP, resta ainda citar alguns deles. Maia (2007) pesquisou sobre **"Função Quadrática: um estudo didático de uma abordagem computacional"**. Angiolin (2009) investigou a **"Trajetórias Hipotéticas de Aprendizagem sobre Funções Exponenciais"** e Bica (2009) apresentou um estudo sobre as **"Funções afins em livros didáticos: relações entre aspectos visuais e textuais"**.

Isto posto, a tabela abaixo apresenta um panorama numérico dessa primeira fase do levantamento.

Tabela 01

Rastreamento nos bancos de Dissertações e Teses do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da PUC/SP (desde 1975)

Períodos	2006	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014	Totais
Doutorado	02	—	—	01	—	—	—	—	—	03
Mestrado Acadêmico	01	01	03	01	—	—	—	—	—	06

Fonte: PUC/SP. Banco de Dissertações e Teses. Disponível em: < http://www.pucsp.br/pos/edmat/>. Acesso em 07 agosto 2014.

Na segunda etapa do presente rastreamento, direcionou-se a atenção para o Programa de Pós-graduação em Educação Matemática da UNESP – Universidade Estadual Paulista /Rio Claro (desde 1984), mas não foi encontrado nenhum trabalho relacionado aos objetos de busca, conforme é apresentado na tabela abaixo:

Tabela 02

Rastreamento nos bancos de Dissertações e Teses do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática UNESP/SP (desde 1984)

Períodos	2006	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014	Totais
Doutorado	—	—	—	—	—	—	—	—	—	00
Mestrado Acadêmico	—	—	—	—	—	—	—	—	—	00

Fonte: UNESP. Banco de Dissertações e Teses. Disponível em: < http://www.rc.unesp.br/igce/pgem/new/index.php>. Acesso em 07 agosto 2014.

Enquadrou-se na terceira etapa, os trabalhos produzidos pela UFMS – Universidade Federal do Mato Grosso do Sul que desde 2007 iniciou o terceiro Programa de Pós-graduação em Educação Matemática do Brasil.

Considerando que este programa tem apenas seis anos de existência, resolvemos fazer o levantamento em todos os anos que apontou produções. Assim, constatamos que no intervalo de 2009 a 2014 foram contabilizados 45 pesquisas, em forma de Dissertações de Mestrado em que nenhuma delas sinalizou em seus títulos, termos que se articulassem nessa investigação. Cabe dizer que não existem ainda registros de pesquisas em níveis de Doutorado.

Para uma melhor visualização numérica dos resultados, descreveu-se na tabela abaixo uma paisagem inicial:

Tabela 03

Rastreamento nos bancos de Dissertações e Teses do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática UFMS (desde 2007)

Períodos	2006	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014	Totais
Mestrado		—	—	—	—	—	—	—	—	00

Fonte: UFMS. Banco de Dissertações. Disponível em: < http://www.edumat.ufms.br/>. Acesso em 09 agosto 2014.

Por fim, a quarta etapa, é demarcada pelas pesquisas produzidas no Programa de Pós-graduação em Educação Matemática da UNIAN – Universidade Anhanguera de São Paulo, cujo andamento foi iniciado em 2008 e que já acumula entre Teses e Dissertações, 168 trabalhos de pesquisa. A seguir, depois do levantamento desenvolvido nesse acervo, optou-se por desvelar alguns desses trabalhos, considerando que outros já foram analisados no capítulo anterior, evitando assim, uma repetição.

Aliando-se à tecnologia, o trabalho de Sales (2009) intitulado **"Explorando função através de representações dinâmicas: narrativas de estudantes do ensino médio"**, investigou *"as narrativas produzidas pelos estudantes diante de uma abordagem matemática sobre funções utilizando ambiente de geometria dinâmica"* (*ibidem*, p. 08). Utilizou como aporte teórico as considerações de Bruner (1997), para tratar sobre a centralidade do pensamento narrativo em cognição humana; com o intuito de compreender a função das narrativas na aprendizagem matemática, bem como entender de que forma a evocação de histórias contribuiriam para a construção de conhecimentos e significados matemáticos. Como metodologia, utilizou-se do *design-based research methodologies com especificidade em* um *design experiments* onde alunos do Ensino Médio desenvolviam atividades em dois micromundos (representações gráficas de funções) de forma dinâmica criados no Cabri-Géomètre. De acordo com essa pesquisadora, na conclusão da investigação, dois pontos ratificaram suas hipóteses: houve espontaneidade na identificação de diferentes propriedades e tipos

de funções; as narrativas decorrentes das histórias estavam imersas de “sentidos” que facilitavam a descrição dos comportamentos matemáticos das funções.

Pelo lado da História, Oliveira (2009) nos ajuda a compreender por meio do seu estudo **“A abordagem do conceito de função em livros didáticos ginasiais: uma análise em tempos modernos (décadas de 1960 e 1970)”**,

> a abordagem para o ensino de função adotada em livros didáticos de Matemática para o ginásio durante as décadas de 1960 e 1970, período em que se caracterizou o Movimento da Matemática Moderna (MMM) no Brasil. (*ibidem*, p. 10)

Este se fundamentou nas perspectivas teóricas de Bloch (2002), Certeau (2007), Chartier (1990), Chervel (1990), Choppin (2004), Viñao Frago (2007), principalmente, para discorrer sobre o ofício do historiador e a produção da história, a "cultura escolar como objeto histórico" e os constituintes de uma disciplina escolar, o livro didático como fonte de pesquisa e os currículos; as reformas, as mudanças educacionais e as suas relações. Como conclusão, apontou que existe certa padronização relativa a algumas propriedade ou formas de anunciar o conceito de função. Destaca também que *“a ênfase na linguagem simbólica, o rigor na abordagem do tema, a preocupação com a abstração, a contextualização, o uso dos exercícios/atividades para a abordagem de conteúdos.”* (OLIVEIRA, 2009, p. 203) caracterizavam os aspectos que mais diferenciavam as coleções de livros analisadas.

Por apresentar um título vanguardista, o trabalho de Angelini (2010) “**Funções: um estudo baseado nos três Mundos da Matemática**” focou-se no objetivo de *“identificar imagem de conceito e definição de conceito (TALL; VINNER, 1981) sobre o conceito de função e características dos Três Mundos da Matemática (TALL, 2004), presentes em oito estudantes da 2a série do Ensino Médio de São Paulo”*. (*ibidem*, p. 08). Ao que tudo indica, sua metodologia foi exploratória e de campo, por meio de análise diagnóstica utilizando-se de questões pré-elaboradas que relacionavam várias representações de uma função. Servindo-se do aporte teórico de *(Tall; Vinner, 1981) e de* Tall (2004) para, segundo o autor, *“explicar o desenvolvimento cognitivo de quem aprende matemática, desde os anos iniciais até a matemática avançada”* (ANGELINI, 2010, p. 59). Seu estudo é concluído confirmando as hipóteses iniciais de que os estudantes não relacionam os diferentes tipos de

representação de uma função, priorizando, sobretudo o Mundo Corporificado em detrimento do Mundo Simbólico. Desse modo, sugeriu que os estudantes deveriam retomar a aprendizagem do conceito de função utilizando-se, por exemplo, do quadro teórico dos Três Mundos da Matemática para que se possibilite uma aprendizagem articulada.

Ainda em 2010 encontroram-se dois trabalhos sobre transição. O primeiro deles foi o de Cabelo (2010), **"Relações institucionais para o ensino da noção de juros na transição ensino médio e ensino superior"** que intentou:

> apresentar as possíveis relações institucionais para o ensino da noção de juros na transição Ensino Médio e Ensino Superior por meio de documentos oficiais, análise de livros didáticos e de alguns planos de ensino de universidades federais e particulares. (ibidem, p. 06).

O autor assevera que foi utilizada a abordagem antropológica de Chevallard e Bosch (1999) como referencial teórico central, cujo complemento pautou-se nas pesquisas de Robert (1997), sobre os três níveis de conhecimentos esperados dos estudantes, e de Douady (1984; 1992), sobre articulações de domínios de quadros. Justificou a opção pelo método da pesquisa documental, dada à natureza dos seus objetivos relacionados às expectativas institucionais. Em suas conclusões, revelou que existe pouca relação entre o conhecimento esperado do estudante diante das relações institucionais e livros didáticos, no que diz respeito à noção de juros. Essa constatação é consoante com a ausência de articulação entre o que os estudantes trazem do Ensino Médio e o que é exigido no Ensino Superior, para promover uma apropriação adequada aos novos conhecimentos.

O segundo trabalho **"A noção de matriz na transição entre o Ensino Médio e o Superior"** foi desenvolvido por Simão (2010), cuja finalidade foi identificar a partir da noção de matriz o que se espera como conhecimento prévio, ao menos mobilizável desse conteúdo matemático, na transição entre o Ensino Médio e o Superior, sobretudo para o estudo da disciplina Álgebra Linear. Do mesmo modo que Cabelo (2010) utilizou a metodologia da pesquisa documental, bem como do referencial teórico. Os resultados apontaram que tanto a noção de matriz quanto, as suas operações, propriedades são desenvolvidas no Ensino Médio como ferramenta

explicita, podendo esse trabalho servir de apoio para uma introdução da Álgebra Linear no IR^n contida na matriz curricular do Ensino Superior.

Apesar da mudança de período, a pesquisa desenvolvida por Faro (2011) representa, na ordem cronológica, o terceiro estudo sobre transição na UNIAN. Intitulado de **"Os conhecimentos supostos disponíveis na transição entre o ensino médio e o ensino superior: o caso da noção de sistemas de equações lineares"**, objetivou:

> verificar se as dificuldades dos estudantes do Ensino Superior em relação a esse objeto matemático estão associadas à falta de conhecimentos prévios que, em geral, são supostos disponíveis pelos professores do Ensino Superior. (ibidem, p. 31).

A leitura de seu texto possibilitou verificar que, tanto o referencial teórico quanto a metodologia, seguem a mesma conduta dos trabalhos de Cabelo (2010) e de Simão (2010). Após as análises dos resultados, Faro (2011) concluiu positivamente, que existe coerência entre as relações pessoais e institucionais do Ensino Médio que são ponderadas pelo Ensino Superior. Neste sentido, afirmou que a formação dos concludentes do Ensino Superior está adequada quando se pretende apresentar as noções de sistemas lineares no Ensino Médio, dado o constante resgate desse conteúdo nas disciplinas de Geometria Analítica e Álgebra Linear no Ensino Superior.

A finalização dessa etapa é demarcada pelo estudo de Pinto (2011), "**Sequência didática no aprendizado de taxa de variação média de função para alunos de licenciatura em matemática**" que objetivou *"estruturar, aplicar e analisar uma sequência didática de taxa de variação média para alunos da 1ª série de Licenciatura em Matemática de uma universidade privada de São Paulo"* (*ibidem*, p. 04). Para tanto, apoiou-se teoricamente na abordagem socioconstrutivista, na teoria das Situações Didáticas e na abordagem metodológica da Engenharia Didática. Conforme o autor, na conclusão de seu trabalho, verificou-se a eficácia que uma sequência didática possibilita para introduzir o conceito de taxa de variação média de uma função. No entanto, faz-se necessário que a concepção e aplicação de um teste diagnóstico para a proposição de uma sequência didática mais próxima das necessidades dos alunos.

Ainda no cenário das Dissertações de Mestrado, também foram encontrados trabalhos que se referiram à trigonometria ou às Funções Trigonométricas, tais como: Goios (2010), desenvolveu um estudo denominado **"Potencialidades didático-pedagógico para um objeto de aprendizagem: Uma análise através da Teoria da Cognição Corporificada para o ensino de trigonometria"**; Órfão (2012) que batizou sua pesquisa como **"Professores de matemática em um grupo de Estudos: Uma investigação sobre o uso de tecnologia no ensino de funções trigonométricas"**; Alves (2012) que se focou na **"Análise de documentos que norteiam o ensino de trigonometria no Estado de São Paulo"** e Hueb (2014) que resolveu analisar a **"Trigonometria: Expectativas Institucionais para a prática docente"**.

No mesmo nível de pesquisa, houve investimento sobre o domínio das funções com os estudos de: Bernardo (2011), **"Os registros de representação no ensino de função do 1º grau: Uma proposta para o caderno do aluno do Estado de São Paulo"**; Pereira (2013), **"O conceito de função: A utilização do software Simcalc e as narrativas apresentadas por alunos de licenciatura em matemática"** e Ramos (2014), **"Um experimento apoiado na teoria dos registros de representações semióticas sobre o ensino de função linear afim em um ambiente computacional"**.

E, por fim, o estudo de Silva (2012), intitulado de **"A noção de função quadrática na transição entre os ensinos fundamental, médio e superior"**, aplicou os mesmos pressupostos teórico-metodológicos de Simão (2010), Cabello (2010) e Faro (2011), concluindo que se faz necessário, professores e alunos, utilizarem as noções e técnicas referentes à função quadrática mobilizadas nos Ensinos Fundamental e Médio de forma articulada, para utilizá-las no Ensino Superior, permitindo-se abordar situações contextualizadas, que por sua vez, necessita estar acessível ao nível técnico que acionará nível mobilizável e consequentemente, o disponível.

Já no palco das Teses de Doutorado, verificaram-se dois estudos sobre transição, um trabalho relativo à função e um dirigido às Funções Trigonométricas, a saber:

- Transição: Andrade (2012) que decidiu analisar as **“Expectativas Institucionais relacionadas à transição entre o ensino médio e ensino superior para o caso da noção de função exponencial”** e Avila (2014) que abordou a **“Noção intuitiva de conjuntos: um ambiente tecnológico de ajuda ao estudo na transição entre o ensino médio e o superior para um curso de tecnologia da informação”**.
- Função: Gouveia (2014) debruçou-se em **“A noção de função: Uma abordagem centrada em situações de aprendizagem”**.
- Funções Trigonométricas: Silva (2013) refletiu sobre **“Corporeidade e gráficos cartesianos: a variável tempo em fenômenos periódicos”**.

Esse quantitativo demonstrou como ainda são incipientes, inclusive, nessa instituição, os investimentos sobre a transição entre os diferentes níveis de ensino e principalmente, quando se considera as noções de Funções Trigonométricas.

Com efeito, um resumo numérico foi apresentado na tabela abaixo:

Tabela 04

Rastreamento nos bancos de Dissertações e Teses do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática UNIAN (desde 2008)

Períodos	2006	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014	Totais
Doutorado			—	—	—	—	01	01	02	04
Mestrado			—	02	04	03	03	02	02	16

Fonte: UNIAN. Banco de Dissertações. Disponível em: < http://www.unian.br/pos/educamat/disserta_mes.asp>. Acesso em 07 novembro 2012.

Valendo-nos do cenário nacional restrito às instituições que oferecem um Programa de Pós-graduação em Educação Matemática, conforme assinalado nas tabelas anteriores, permitiu-se apresentar um resumo do mapeamento inicial, conforme a tabela abaixo:

Tabela 05

Panorama geral do levantamento nas fontes Nacionais de Educação Matemática (bancos de Dissertações e Teses nos Programas de Pós-Graduação em Educação Matemática do Brasil)

Instituições	VADT	VRDT (%)	QAF	QAT	QAFT	QATr	QRF (%)	QRT (%)	QRFT (%)	QRTr (%)
PUC/SP	599	100	8	0	0	1	2,16	0	0	0,81
UNESP	434	100	0	0	0	0	0	0	0	0
UFMS	45	100	0	0	0	0	0	0	0	0
UNIAN	168	100	8	3	3	6	4,76	1,78	1,78	3,57
Totais	1246	100	16	3	3	7	6,92	1,78	1,78	4,38

Fonte: a pesquisa e as Tabelas 01, 02, 03 e 04.

Legenda: VADT: Valor absoluto do número das Dissertações e Teses produzidas desde a implementação até a atualidade;

VRDT: Valor relativo do número das Dissertações e Teses produzidas desde a implementação até a atualidade;

QAF: Quantidade absoluta sobre Funções;

QAT: Quantidade absoluta sobre Trigonometria;

QAFT: Quantidade absoluta sobre Funções Trigonométricas;

QATr: Quantidade absoluta sobre Transição;

QRF: Quantidade relativa sobre Funções;

QRT: Quantidade relativa sobre Trigonometria;

QRFT: Quantidade relativa sobre Funções Trigonométricas;

QRTr: Quantidade relativa sobre Transição;

Os dados observados na tabela acima deflagram a situação contemporânea, primordialmente, das pesquisas que refletem sobre as noções de trigonometria ou Funções Trigonométricas, bem como a transição entre Ensino Médio-Ensino Superior.

Dessa forma e, considerando os problemas apontados no capítulo anterior sobre as dificuldades de aprendizagem na disciplina Cálculo I do Ensino Superior decorrentes, nesse caso, da aprendizagem das Funções Trigonométricas desenvolvidas no Ensino Médio, o estudo proposto no presente trabalho de tese, sinaliza a importância de mobilizar esforços para contribuir com a constituição de um quadro científico, que auxilie em nível institucional, o desenvolvimento de reflexões e decisões que possibilitem minimizar o provável descompasso entre todas as etapas escolares.

2.1.2 – O cenário internacional:

O rastreamento na literatura aponta a França como um dos primeiros países que sinalizou interesse, a partir de pesquisadores no campo da Didática da Matemática, pela temática da transição EM-ES. O trabalho desenvolvido em 2004, pela pesquisadora francesa Michèle Artigue demonstrou, em linhas gerais, a preocupação em identificar como os desafios desse fenômeno escolar podem ser minimizados considerando a pesquisa em didática e as possíveis inovações desse domínio.

Artigue (2004) considerou quatro grandes desafios enfrentados pela transição do EM-ES: a massificação do ensino, o confronto das mudanças tecnológicas com a sala de aula de Matemática, a descrença científica por parte dos estudantes e a educação concebida como mercadoria. No entanto, destaca a autora que tais desafios se distanciam de uma análise matemática e didática e, por isso, considera possível construir apenas uma reflexão parcial. Contrariamente, à Matemática, considerada como uma construção hierarquicamente organizada, permitindo-se avanços intra-interdisciplinares, pode ela mesma, auxiliar tal análise caso seja também compreendida como uma cultura.

Com efeito, a pesquisadora evoca o trabalho de Hall (1998 apud ARTIGUE 2004) que definiu a cultura Matemática em três níveis:

> - o *nível formal, refere-se* às crenças e concepções acerca da Matemática, bem como as ferramentas e os métodos que a validam;
> - o *nível informal, refere-se* aos esquemas de ação e de pensamento, bem como às formas alternativas (não explícitas) de estruturar o pensamento matemático, associado à articulação entre à experiência e à prática;
> - o *nível técnico, refere-se* à axiomática, ou ainda, técnicas e teorias institucionalizadas que representam a parte explícita do conhecimento matemático.

Para dar cabo de uma análise que compreendesse tais níveis da cultura Matemática, Artigue (2004) postula que os programas de ensino, os textos oficiais e os livros didáticos são os legítimos representantes das fontes primordiais, não

obstante, destacar também as ferramentas de avaliação e registros das observações imediatas do “funcionamento” dos alunos e de toda uma classe.

Nesse sentido, frisa Artigue (2004), sutis condições, na ocasião de introdução das noções matemáticas podem conduzir os alunos a busca de alternativas (estratégias) que permitam “testar” suas hipóteses, em função de circunstâncias previstas e apresentadas nas fontes oficiais. Ainda assim, salienta essa pesquisadora, que a diversidade de alternativas metodológicas pode tornar mais difícil a hierarquização dos saberes, associado à individualidade dos diferentes professores em vista de tais alternativas. De certa forma, em defesa dos professores, Artigue (2004), afirma que as dificuldades encontradas pelos professores residem na formação universitária para conduzir um ensino do tipo pluridisciplinar.

À luz desse cenário, Artigue (2004), entende que a cultura pode ser caracterizada para os estudantes como o diálogo entre diversos domínios e problemas abordados superficialmente, dificultando, dessa forma, que os alunos operacionalizem, estabilizem e estruturem seus conhecimentos. Tais dificuldades ressalta a autora, podem estar sendo fortalecidas por determinadas práticas pedagógicas.

Levando em consideração essa perspectiva, o caráter de atualização e profundidade do trabalho, desenvolvido no ano de 2008, por outra pesquisadora francesa, Ghislaine Gueudet, permitiu, de um lado – refletir sobre um panorama internacional, possibilitando a articulação entre três concepções teóricas diferentes, por pertencerem, nessa ordem, aos EUA, França e Romênia, do outro – pinçar as analogias decorrentes das propriedades matemáticas comuns entre as disciplinas de Álgebra Linear (analisada pela autora) e Cálculo I (analisada pela pesquisa em tela) e, por fim, identificar resultados validados para fortalecerem as análises, a serem desenvolvidas no presente trabalho de investigação.

Acerca dos questionamentos sobre a transição entre diferenciados níveis de ensino, o trabalho desenvolvido por Gueudet (2008a) enfoca, no cenário internacional, a transição EM-ES preocupando-se primeiramente com a *“entrada para a Universidade e, em particular, os desafios de ensinar Álgebra Linear no início*

da Universidade" (ibidem, 2008, p. 1, tradução do pesquisador) e, em segundo lugar, com o uso de recursos *on line* para aprender e ensinar Matemática, em todos os níveis de ensino.

Essa autora reflete sobre duas possibilidades: a primeira diz respeito ao papel da Geometria, no ensino-aprendizagem da Álgebra Linear para nortear o estudo das dificuldades na entrada da Universidade; a segunda refere-se à utilização integral de recursos susceptíveis à Didática da Matemática como, por exemplo, bases de exercícios *online*.

Cabe destacar que a autora utilizou-se de diferentes abordagens teóricas, para exemplificar problemas encontrados em sua pesquisa, a saber: cognitiva, sociocultural e institucional articuladas teoricamente aos princípios da Ergonomia Cognitiva, Teoria das Situações Didáticas e a Teoria Antropológica do Didático. Sobretudo, realça a importância da pesquisa privilegiando a documentação dos professores e alunos, pois desvela lacunas difíceis de serem percebidas por outras metodologias de pesquisa.

Gueudet (2008a) acentua que vários são os olhares para compreender as questões inerentes à transição entre níveis de ensino, porém destaca três posicionamentos iniciais para construir sua própria forma de análise, focalizando-se na disciplina Álgebra Linear.

Primeiramente, considera-se que as **dificuldades dos alunos decorrem do fato do ingresso na Universidade carecer de conhecimento e dificuldades intrínsecas**. Essa perspectiva resulta das análises epistemológica e cognitiva sobre a transição. Segundo Gueudet (2008a, p. 3), essas conclusões apoiam-se na Teoria APOS (ação-processo-objeto-esquema) construída por Dubinsky e Mcdonald (2001) e por Trigueros e Oktac (2005), na Teoria dos Status dos Conceitos Ensinados de Robert (1998) e Dorier (1997a) e, finalmente, na noção de modelo intuitivo de Fischbein (1987) e Gueudet-Chartier (2000).

O segundo olhar converge para as **dificuldades próprias à falta de flexibilidade de conhecimento dos alunos**. Gueudet (2008a) explica que esse conhecimento é o mais complexo, porém há necessidade de uma organização em

rede, permitindo a mudança entre variados níveis de conhecimentos. Para tanto, toma por base a prática dos matemáticos que demonstram conhecimento organizado.

Como exemplo, mostra que na Álgebra Linear a flexibilidade pode ser encontrada entre a articulação de desenhos (modelos representacionais associados à Geometria), bem como na implementação de métodos de raciocínio geométrico. Isso não exclui a possibilidade de identificação de novas formas de flexibilidade, imprescindíveis para o ingresso na Universidade.

E, em terceiro, fundamenta-se no argumento de que o foco está na **mudança da instituição durante a transição EM-ES, considerando as especificidades deste último fomentado pelas Universidades**, pois se apoiando em Chevallard (2002, 2002a), Gueudet (2008a) reafirma que o mesmo conhecimento produzido em duas instituições diferentes, resulta numa Organização Matemática (OM) diferente ocasionando rupturas susceptíveis a causarem dificuldades de aprendizagem.

Outro fator apontado pela autora é que a entrada em uma nova instituição tem um significado peculiar para o estudante na medida em que encontrará professores especialistas, em geral, matemáticos, cujas práticas e expectativas universitárias compõem uma variedade especial de características o que consequentemente impõe ao aluno-ingresso, o desenvolvimento de uma postura diferenciada, onde o papel deste deverá ser transformado para o de acadêmico, ocasionando possíveis problemas para o mesmo, dada a dificuldade de adaptar-se a esse novo formato.

Neste sentido, Gueudet (2008a) desvela que o conteúdo camuflado por trás desse quadro repousa sobre os sistemas e expectativas institucionais implicitamente, apresentadas no contrato de ensino das Universidades, que não situam os alunos-ingressos em relação ao Ensino Médio que desfrutaram. Para ela, essa responsabilidade deveria ser compartilhada entre o acadêmico e o professor, mesmo que as organizações matemáticas fossem similares.

Inquietada com o anúncio desses três posicionamentos tratados acima, Gueudet (2008a) propõe aprofundar-se a discussão priorizando os seguintes aspectos:

● os **novos conhecimentos**, discutidos a partir da Teoria APOS (ação-processo-objeto-esquema), bem como do estatuto das noções conceituais, dos modelos intuitivos entre Álgebra Linear e Geometria e, por último, uma avaliação das articulações de pesquisas a partir de uma abordagem epistemológca;

● as **novas flexibilidades**, focando-se em desenhos, registro gráfico e modelos figurativos – exemplificando o caso da Álgebra Linear, ações didáticas e, apresentação de um projeto intitulado BRAISE (*Base Raisonnée d'Exercices* – Exercícios para Fundamentação de Base, tradução dessa pesquisa);

● uma **nova instituição**, preocupando-se em discutir a necessidade de uma estruturação do conhecimento pelas instituições, a questão da diversidade e heterogeneidade dos profesores da Universidade, o contrato didático e as avaliações da Universidade e, finalmente, o equilíbrio das contribuições da abordagem institucional.

Acerca do primeiro aspectos, inicia sua reflexão alegando que as dificuldades encontradas pelos alunos-ingressos na Universidade podem ser atribuídas ao fato de que o conhecimento é concebido como *"soft*[21]*"* ou, mais coerentemente, com um nível de abstração mais elevado que os do Ensino Médio. Segundo Gueudet (2008a), essas assertivas resultam de pesquisas vinculadas ao Pensamento Matemático Avançado, que conforme seus investigadores estão relacionados ao aparecimento de fenômenos decorrentes experiências matemáticas conceituais abstratas originadas de uma abordagem dedutiva.

Com efeito, a autora salienta que esses pesquisadores compreendem o termo "conceito abstrato", todos aqueles não acessíveis por meio dos cinco órgãos do sentido, embora para outros tenham diferentes interpretações. Essa inquietação estimulou a autora a elucidar o significado do termo abstrato que será encontrado abundantemente no ingresso do Ensino Superior, particularmente, na Álgebra

[21] Entenda-se como "suave", tradução dessa pesquisa.

Linear. Desta forma, esse entendimento será examinado a partir de três exemplos de pesquisa, a saber:

1. **Decomposição genética dos espaços vetoriais**: essa nomeação tem origem na Teoria APOS (ação-processo-objeto-esquema) desenvolvida por uma equipe de pesquisadores norte-americanos, alicerçando-se na epistemologia genética de Piaget, cuja principal propriedade está ligada ao fato de que a forma de como o conhecimento é aprendido depende da própria estrutura desse conhecimento. Isto posto, Gueudet (2008a) afirma que

> Ao realizar uma decomposição genética do conhecimento, é possível determinar uma ordem de apresentação dos conceitos de otimização da aprendizagem. Então o primeiro passo de uma pesquisa com base neste referencial teórico é uma análise do conhecimento em jogo, permitindo propor uma decomposição que irá destacar as diferentes concepções que os alunos possam ter. (ibidem, 2008, p. 4, tradução dessa pesquisa).

Para exemplificar, a autora pinça a definição de subespaço, cujo objetivo é internalizar ações[22] e encapsular o processo conforme a Teoria APOS:

> [...] considere o subconjunto de R^4 definido por F = {(t, 0, u+v+2t, u), em que t, u, v reais}. Para verificar se F é um subespaço de R^4, um estudante que está no projeto de ação irá realizar todas as verificações correspondentes à definição geral de subespaço: F é não vazio, e calculando as coordenadas de uma combinação linear de dois vetores de F, vemos que esta combinação linear ainda pertence a F. Quando um indivíduo repetir certas ações, e refletir sobre essas ações, está internalizando e tornando-se um processo mental. (GUEUDET, 2008a, p. 5, tradução dessa pesquisa).

Comenta ainda que algum acadêmico pode prever o resultado de uma ação sem executar todas as fases citadas. Para tanto, poderia utilizar-se do argumento da linearidade e da representação paramétrica que caracteriza os elementos de F, prevendo assim, o resultado. Outro ponto que a teoria entende como favorável repousa sobre a possibilidade do acadêmico refletir sobre o próprio processo como um todo. Para clarificar essa noção, Gueudet (2008a), exemplifica:

> Um estudante que reconhece F no subespaço gerado pelos vetores (1,0,2,0), (0,0,1,-1), (0,0,1,0) recorreu para a concepção-objeto (não

[22] "Uma ação é uma transformação de objetos que um indivíduo pode fazer, respondendo indicações que dão os passos a seguir" (GUEUDET, 2008a, p. 5, tradução dessa pesquisa)

> é a única manifestação possível deste projeto, e o ato de colocar a descrição dada por uma F representação paramétrica de um sistema de vetores de geração, certamente coloca em jogo outros elementos de uma encapsulação do processo [...]). (ibidem, 2008, p. 5, tradução dessa pesquisa).

A autora revela que a Teoria APOS foi, inicialmente, vinculada ao ensino nas Universidades, embora os movimentos de interiorização e encapsulação ocorram em todos os níveis, que quando não desenvolvidos sobrecarregam o ensino superior, dada à exigência de estarem disponíveis em favor da aprendizagem dos conceitos abstratos. Pelo visto a prática do exercício para verificar axiomaticamente a estrutura de espaço vetorial não é desenvolvida na maioria das vezes (GUEUDET, 2008a). Isso o ajudaria ampliar a capacidade de utilização de métodos mais econômicos para resolver uma questão similar de espaço vetorial.

Com efeito, Gueudet (2008a) encontra em sua garimpagem vínculos entre os princípios da Teoria APOS e ação didática, resultados dos trabalhos desenvolvidos na América do Norte, em cursos universitários. Segundo ela, os pesquisadores norte-americanos adotam, além da fundamentação epistemológica, uma estrutura denominada de **ciclo de ensino ACE**: *atividade, discussão em classe, exercícios*.

Nessas instituições, um tema matemático é apresentado inicialmente por meio de uma atividade. Segundo a descrição de Gueudet (2008a, p. 6), *"esta é consistente com a ideia de que a aprendizagem precoce é a ação sobre os objetos"*. São cuidadosamente selecionadas e desenvolvidas por meio da utilização de softwares, onde em pequenos grupos, os alunos são orientados a escreverem programas simples, acerca das diferentes fases das ações desempenhadas. Decorrido um tempo suficiente, o professor organiza a sala de aula para que os resultados dos pequenos grupos sejam partilhados com os demais, propiciando aos alunos um espaço democrático para que seus esforços contribuam no processo de internalização e encapsulamento dos conceitos relacionados. A conclusão do ciclo dá-se por meio de exercícios tradicionais.

Apesar de gratificante, Gueudet (2008a) salienta que, segundo os autores norte-americanos, embora a pesquisa tenha tido um impacto positivo na aprendizagem alcançada pelos alunos, acerca de alguns conceitos da Álgebra

Linear, esta realidade é tecnicamente difícil de conseguir. Geralmente, os alunos limitam-se à visualização de objetos estáticos, sendo encorajados a processarem mentalmente os resultados.

2. **A Álgebra Linear formalizada, unificada, generalizada: estatuto das noções**: essa pesquisa foi desenvolvida na França a partir dos anos oitenta, com predominância de Dorier (1997 a 2000). Gueudet (2008a) postula que a valorização da perspectiva epistemológica domina toda a investigação e está alicerçada numa análise contundente da origem histórica da Álgebra Linear. Repousa sobre essa análise o estatuto das noções conceituais, bem como os desafios iniciais dos estudantes ingressos no Ensino Superior.

Gueudet (2008a) enfatiza que a investigação desenvolvida por Dorier situa-se historicamente entre o século XVIII e a segunda metade do século XIX, sendo este período demarcado como um movimento de unificação. À resolução de equações lineares e de determinantes, reduzia-se inicialmente, para cálculos de engenharia e, posteriormente, avançaria para uma teoria mais geral, realçando particularidades da Álgebra Linear. Por outro lado, desenvolve-se paralelamente, uma combinação entre a Geometria e a Álgebra por meio do Cálculo Vetorial.

Neste sentido, registra que assim como outras, a superação do obstáculo relacionado à representação da dimensão três, ocorre com a evolução da Geometria durante meados do século XIX, favorecendo o surgimento da Geometria Não-euclidiana. Particularmente, essa ampliação para a dimensão *n* promove uma reconciliação entre o aspecto analítico e o campo da Geometria das equações de onde originam duas correntes: as Equações Lineares e o Cálculo Vetorial, favorecendo, desta forma, a unificação de problemas lineares em dimensões finitas. Mesmo assim, a Álgebra Linear não se apresenta em sua moderna forma axiomática.

De acordo com Gueudet (2008a), esse novo formato demarcou o segundo movimento de transformação, forjado somente no final do século XIX. A forma axiomática fez-se necessária para tornar possível a unificação dos métodos, para resolver problemas de infinitas dimensões alargando certa perspectiva sobre o olhar geométrico do espaço das funções, por exemplo.

Esses dois movimentos são apontados por Gueudet (2008a) como possíveis origens das dificuldades do ensino de Álgebra Linear, pois a autora deduz que sua criação não decorreu da resolução de problemas, mas de questões ligadas à reorganização do conhecimento matemático.

Com efeito, a pesquisadora acredita que essa trajetória histórica está relacionada à introdução de Robert (1998) ao defender o estatuto das noções matemáticas para ensinar. Ao selecionar uma noção, o professor deveria se perguntar como proceder, para encaixar esta no conhecimento já apresentado, pois essa é a sua função, bem como, defende Gueudet (2008a, p. 7, tradução dessa pesquisa), *"determinar o estatuto de uma noção por meio de análise de programas, mas também por meio de análises epistemológicas".*

Gueudet (2008a), ao incorporar no seu texto o diálogo entre Dorier e Robert, legitima que a Álgebra Linear é uma teoria generalista, reunindo e transportando um novo formalismo, ao tempo que possibilita uma ampliação do termo "conceito abstrato": *"o estatuto da Álgebra Linear é o estatuto mais abstrato definido por Robert. Além disso, esse estatuto não decorre da escolha do ensino, mas de profundas razões epistemológicas"*. (ibidem, 2008, p. 8, tradução dessa pesquisa).

Segundo Gueudet (2008a), Robert em 1997 busca uma rota diferençada para a compreensão do termo "conceito abstrato" introduzindo a sua **noção de nível de conceptualização**. Para Robert (1997), esse diz respeito a

> um patamar em um campo do conhecimento matemático (campo conceitual), correspondendo a uma parte coerente desse campo, caracterizado por objetos matemáticos apresentados de uma certa forma, teoremas sobre esses objetos, métodos associados a estes teoremas e problemas que os alunos podem resolver com os teoremas do nível considerado, utilizando-se desses métodos. (ibidem, 1997, apud GUEUDET, 2008a, p. 8, tradução dessa pesquisa)

Mesmo assim, conforme encontrado em Gueudet (2008a), não há uma hierarquia absoluta entre os níveis de conceptualização, mas as pesquisas de Robert destacam o nível formal, unificador e generalizante que acabam funcionando como um desenho ordenado de estatuto das noções.

A opção por essa visão teórica em Álgebra Linear tem sido adotada por pesquisadores que se concentram nas dificuldades dos alunos a respeito do obstáculo do formalismo

> Para esses acadêmicos a Álgebra Linear é um catálogo de noções muito abstratas que não podem ser representadas; no mais, eles são esmagados por uma avalanche de novas palavras, novos símbolos, novas definições e de novos teoremas. (Dorier *et al*., 1997, apud GUEUDET, 2008a, p. 8, tradução dessa pesquisa)

A fim de dar visibilidade práxica, Gueudet (2008a), nos mostra que esses acadêmicos não conseguem exemplificar espaços vetoriais e muito menos, são incapazes de discorrer sobre do que se constituem as noções da Álgebra Linear. Para ela, tais dificuldades são produtos do caráter formal, generalista e unificador da Álgebra Linear.

Em busca da origem da assimilação sistemática dos níveis de conceptualização de Robert – formal, unificador e generalizante – Gueudet (2008a) vai beber em Rogalski resultados de pesquisas, em grande escala experimental, desenvolvidas na Universidade de Lille, defendendo que tal necessidade está diretamente relacionada à educação integral do aluno em função das escolhas feitas que refletiam em perspectivas muito diferentes de educação. Isso ajudará a compreender a relação entre o estatuto das noções e a ação didática.

Ao que tudo indica, a autora analisa que desde o Ensino Fundamental, as crianças desenvolvem raciocínios inerentes à sistemas lineares, contudo seguem uma orientação que desvia da noção central de classificação. Concomitantemente, as atividades envolvendo o raciocínio lógico objetivam familiarizá-las como o formalismo.

Para Gueudet (2008a), esse, é imposto como forma oficial de estabelecer, inicialmente, resultados gerais para os sistemas lineares (preferencialmente, utilizando-se a passagem de coordenadas) com vista à preparação da teoria geral (formalismo). Decorrente disso são oferecidos para os alunos problemas lineares de outros campos (possíveis aplicações), evitando assim a natureza unificadora e generalista da Álgebra Linear.

3. **Álgebra Linear e Geometria: modelos intuitivos**: nesse terceiro exemplo, serão considerados que os conceitos de Álgebra Linear são abstratos, sendo o significado desse adjetivo, conforme Gueudet (2008a) alicerçado nos modelos de Fischbein. Utilizando-se do pensamento fischbeinriano, a autora explica que o ser humano tende a vincular a necessidade de verificar algo com o pensamento, tal e qual fazemos com os olhos. Decorre desse raciocínio em muitos casos, enxergar com os olhos torna-se impossível e, por isso, a necessidade de desenvolver a capacidade para lidar com as **noções intuitivas**, interesse particular da Teoria de Fischbein.

Postula a autora que o referido teórico conceitua "intuição" como um tipo específico de conhecimento, tendo essa, a função de responder à carência natural de certeza. Neste sentido, foi desenvolvido por Fischbein, um modelo para analisar as intervenções resultadas de intuições matemáticas. Segundo ele,

> Um sistema B é modelo de sistema em A se, com base num certo isomorfismo, produzir uma descrição ou uma solução em A, exista um consistente correspondente em B e vice-versa. (Fischbein, 1987, apud GUEUDET, 2008a, p. 9, tradução dessa pesquisa)

Dada esta condição, dentre outros distintos modelos, Gueudet (2008a) apropria-se dos modelos "abstratos" – já que este fornece um modelo matemático de um fenômeno concreto – e intuitivo – que possibilita as mesmas características de uma realidade concreta embora, muitas vezes, ultrapasse-a. A figura abaixo busca retratar essa discussão e compor, mais à frente, as células iniciais de um mapa conceitual que permitirá visualizar todo esse contexto:

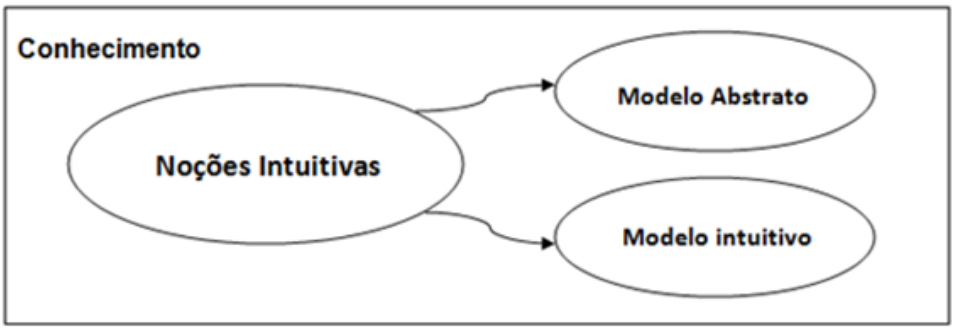


Figura 02: Relação entre Conhecimento, Noções Intuitivas e tipos de modelos.

Inquietada entre a oposição "abstrato e concreto", a autora descobre também que numa obra de 1997, relacionada à Álgebra Linear escrita por

Harel (2006) existe uma relação entre os elementos dessa oposição, com a noção de modelo introduzida por ele a partir do **princípio da concretização**. Apoiada em Harel (2006), a autora descreve que a *"abstração de uma estrutura a partir de um modelo necessita que os elementos do modelo tenha aos olhos do aluno certa natureza concreta."* (GUEUDET, 2008a, p. 9, tradução dessa pesquisa).

Esse princípio levou Harel (2006) a desenvolver um tipo particular de "ensino experimental", para que os conceitos básicos da Álgebra Linear fossem apresentados sob a ótica de espaços geométricos, sendo este a fonte de incentivo para Gueudet (2008a) incorporar suas investigações em seu campo de pesquisa, considerando os fundamentos teóricos de Fischbein relativos à noção de modelo.

Gueudet (2008a) explica, também, que se faz necessário ter claro que os fundamentos teóricos de Fischbein foram importantes para o desenvolvimento de sua pesquisa, mas se tornaram diferençados, na medida em que a sua compreensão acerca do significado do adjetivo "abstrato" foram clarificadas. Por isso, utilizou-se da definição de "conceito abstrato" sutilmente distinto de **"modelo abstrato"**, pois na opinião da pesquisadora não é possível ver com os próprios "olhos" as noções da Álgebra Linear, já que nessa ideia fischbeiriana, conservariam cognitivamente as características do concreto tornando-o intuitivo. Para ela *"um conceito abstrato não é intuitivo (nem com certeza concreto)".* (GUEUDET, 2008a, p. 9, tradução dessa pesquisa). Aqui, reside para Vleeschouwer (2010), a dualidade entre concreto-abstrato.

Para tanto, introduziu em sua investigação dois tipos de **modelos intuitivos** denominados de **"modelos geométricos"** e **"modelos figurativos"** que constituem os ostensivos gráficos de Bosch e Chevallard. Importa a Gueudet (2008a) ressaltar que *"geometria é uma teoria matemática de um modelo abstrato de espaço físico"* (ibidem, 2008, p.9, tradução dessa pesquisa), evitando-se a utilização de um termo tão geral ao ponto de considerar a Álgebra Linear uma Geometria.

Ainda assim, demonstra preocupação na articulação entre o **modelo intuitivo** e o **modelo abstrato**, pois alguns pesquisadores poderiam caracterizá-la como paradoxal, o que para a autora corresponde à ligação entre a Geometria e a

realidade física, que permite a ampliação das “intuições geométricas”, possibilitando o conhecimento geométrico à semelhança de uma realidade concreta. Por sua vez, os **modelos figurativos** serão importantes por estarem associados aos modelos geométricos, admitindo sua visualização e com isso, intuitivamente, tornando concreto algumas situações da realidade física.

Segundo Gueudet (2008a), Fischbein classifica ainda dois outros modelos a partir do **modelo intuitivo** – os **modelos analógicos** que estão contidos em uma área de conhecimento diferente da original e os **modelos paradigmáticos** que podem ser compreendidos como representativos de uma classe.

Esses modelos têm sido utilizados para compreender a origem histórica da Álgebra Linear. Cita ainda nomes de outros pesquisadores que se utilizaram, principalmente, do **modelo analógico**, para aprofundar conhecimentos no campo da soma de funções quadráticas, das séries, da ortogonalidade, do cálculo da norma e até mesmo, do Teorema de Pitágoras, aproximando-se desta forma, da natureza unificadora da Álgebra Linear, tratada anteriormente. Como resultado dessa subdivisão, a figura seguinte, amplia a quantidade de células para que se tenha uma visão panorâmica do itinerário traçado até este ponto:

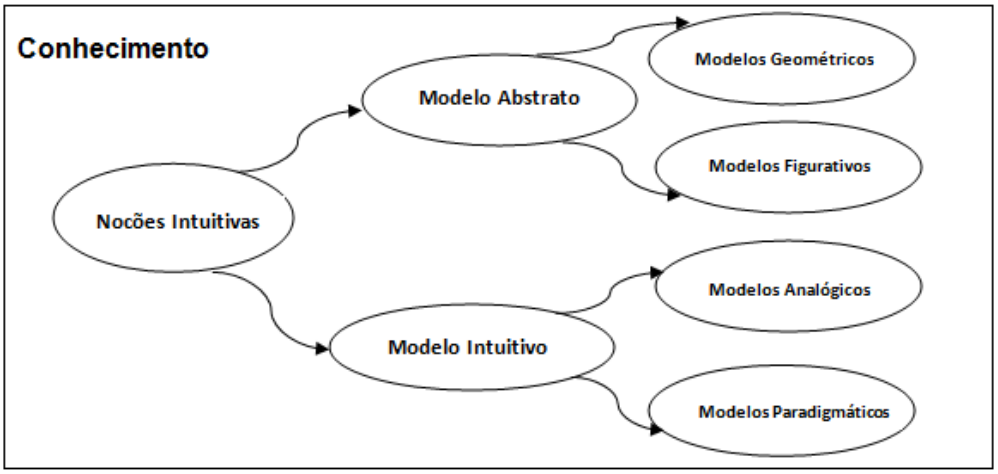


Figura 03: Relação entre Conhecimento, Noções intuitivas e subdivisões entre os modelos

Esses achados impulsionaram a autora decidir pelo aprofundamento dos **modelos paradigmáticos**, cuja semelhança aproxima-se do **modelo empírico** proposto por outros teóricos, a exemplo de Sensevy e Santini e, especialmente,

Cartwright que define a palavra **modelo** como uma **lei científica** representando uma fábula moral de um determinado tema, sobre o arquétipo cognitivo que dá sentido aos conceitos em jogo. (GUEUDET, 2008a).

Conforme postula a pesquisadora, encontra-se nos primórdios da Álgebra Linear a utilização dos **modelos paradigmáticos**, especificamente, no trabalho de Grassmann publicado em 1844, intitulado "Teoria da Extensão". Explica Gueudet (2008a) esse tipo de modelo foi encontrado a partir de uma quantidade significativa de figuras geométricas e aplicações à Geometria presentes em todo o livro para a introdução de uma noção ou exposição de uma propriedade algébrica, asseverando que

> este modelo é essencial para o raciocínio, ele é que permite o funcionamento dos conceitos apresentados. É tão importante que Grassmann utilizou varias vezes na teoria geral dos termos que devem ser reservados para a geometria. (GUEUDET, 2008a, p. 10, tradução e grifo dessa pesquisa).

À época, a teoria de Grassmann foi absorvida por outros teóricos, sendo que Peano, resolveu publicar em 1888 a obra intutulada "Cálculo geométrico segundo a Teoria da Extensão de Grassmann". (GUEUDET, 2008a)

Neste sentido, torna-se difícil questionar, a partir desta análise histórica, a importância do **modelo paradigmático** para o desenvolvimento do raciocínio matemático, mesmo que outras formas expressivas tentem uma hegemonia, pois de acordo com Gueudet (2008a), dificilmente sairia-se dele.

A pesquisadora declara que, ainda na metade da década passada, em uma de suas análises de conteúdos relacionados a Álgebra Linear nos livros didáticos universitários do período, encontrou modelos geométricos relacionados a análise histórica descrita acima. Esses eram do tipo paradigmático, capazes de auxiliarem a aprendizagem dos conceitos abstratos (espaços vetoriais IR^2 e IR^3), bem como resolução de problemas. A autora esclarece que o **modelo paradigmático** de um espaço euclidiano E constitui-se em IR^2 e IR^3 euclidianos.

Dentre muitas, Gueudet (2008a), apresenta uma questão do cálculo de distâncias euclidianas entre

> [...] um elemento de E a um subespaço de E é muitas vezes apresentada nos livros didáticos baseados no exemplo da distância de um vetor a um plano euclidiano IR^3. Da mesma forma que a noção de distância associada a uma norma, como pode ser visto no exercício abaixo:
>
> Seja E um conjunto (não necessariamente um espaço vetorial). Uma aplicação: d: E xE $\longrightarrow$ IR^+ é chamada distância se satisfaz as seguintes propriedades:
> *a)* $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x=y$
> *b)* $d(x,y)=d(y,x)$
> *c)* $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$
> 1) Mostre que se E é um espaço euclidiano, a aplicação d: E x E $\longrightarrow$ IR^+ definida por $d(v,w)= |v-w|$ define uma define uma distância associada a norma.
> 2) Justifique esta definição considerando que E = IR^3 dado por um produto escalar canônico.
> Extraido de Grifone (1990), p.297
>
> (ibidem, 2008, p. 10, tradução dessa pesquisa)

Acrescenta ainda que os problemas euclidianos de medidas em IR^2 e IR^3 são desenvolvidos por meio do modelo paradigmático de isometrias de um espaço euclidiano qualquer. Contudo, assegura que IR^2 e IR^3 euclidianos estão presentes em poucos livros didáticos, porém, menos frequentemente, como modelos analógicos nos exemplos de resolução de exercícios de outras áreas (aplicações), funções, séries e, particularmente, polinômios. (GUEUDET, 2008a).

Preocupada com a dificuldade dos acadêmicos na disciplina de Álgebra Linear, relacionada a um déficit de modelos geométricos bem definidos, a exemplo dos espaços vetoriais IR^2 e IR^3 euclidianos, Gueudet (2008a) afirma que esses podem ser interpretados como um sinal da carência de um modelo derivado a partir da Geometria apresentada no Ensino Básico. Aqui a autora, de certa forma, nos mostra como a fragilidade na articulação entre os conteúdos do Ensino Básico acentua as dificuldades na transição para o Ensino Superior. Para Vleeschouwer (2010), essas decorrem, por sua vez, da dualidade entre concreto-abstrato.

Segundo Gueudet (2008a), isso pode ser verificado quando é solicitada ao acadêmico uma base de um plano em IR^3 para eles e os mesmos descrevem um único vetor como solução. Gueudet (2008a) aponta essa dificuldade como resultada dos estudos da Geometria Espacial, muito embora a ausência de um modelo

geométrico seja percebida para além da terceira dimensão. O que para ela constitui um paradoxo, pois acreditava que o modelo geométrico paradigmático de IR^2 e IR^3 euclidianos fosse útil para a compreensão dos espaços euclidianos em geral.

Em sua pesquisa, por meio da resolução de questões inerentes a polinômios e o Teorema de Pitágoras com base no modelo geométrico paradigmático de IR^2 e IR^3 euclidianos, verificou que as ligações entre eles e Geometria não são articuladas. Mesmo assim, afirma que um novo vocabulário é introduzido sem considerar as fragilidades encontradas, a exemplo da noção de produto escalar, bem como a dupla afim-vetor. Dito isso, Gueudet (2008a) registra que 50% dos entrevistados resolveram corretamente as questões propostas.

Depois de uma rigorosa análise sobre todas as entrevistas, a pesquisadora conclui que é possível considerar os vários tipos de modelos (geométricos, analógicos, paradigmáticos e figurativos) para conceber uma proposta de ensino em Álgebra Linear. Neste sentido, sugere que o uso de modelos analógicos poderiam auxiliar nas escolhas semelhantes as dos cursos de Engenharia da Universidade de Lille, que privilegiam a unificação. Enquanto que a utilização dos modelos paradigmáticos geométricos e modelos figurativos associados contribuiriam na formalização dos requisitos de visualização desse ensino, baseados na Teoria APOS.

Ressalta ainda, que a análise epistemológica dos espaços IR^2 e IR^3 euclidianos são equivalentes e contribuem para o desenvolvimento de um modelo geométrico no auxílio da formulação de ações didáticas, adequadas para favorecer a aprenizagem da Álgebra Linear. Da mesma forma, este modelo poderia atuar como um modelo analógico para os espaços de polinômios e séries, por exemplo, bem como um modelo paradigmático no ensino de outros espaços euclidianos, que parece ser um lugar adequado, na utilização de modelos geométricos da Álgebra Linear elementar.

Gueudet (2008a) frisa ainda que o estudo de IR, IR^2 e IR^3 euclidianos é central para os Cursos de Licenciaturas em Matemática e é contundente ao afirmar que

> ‘uma boa apropriação de IR, IR^2 e IR^3 do ponto de vista algébrico, analítico e geométrico’ é uma dos quatro objetivos principais fornecidos nos projetos de plataforma comum para o nível de Licenciatura atulamente em discussão. (ibidem, 2008, p. 13, tradução dessa pesquisa)

Desta forma, considera que uma adequada transição para o Ensino Superior serviria-se dos espaços IR, IR^2 e IR^3 euclidianos, como ponto de entrada no estudo dos conteúdos da Álgebra Linear.

Considerando esses três exemplos apanhados por Gueudet (2008a) para destacar a peculiariedade e, ao mesmo tempo, a diversidade que os estudos sobre a transição são tratados internacionalmente, pretendemos ainda compreender por meio dessa pesquisadora como eles estão articulados e quais as ações didáticas são sugeridas, para minimizar os paradoxos da transição.

Nesta empreitada, Gueudet (2008a), realça três dos principais aspectos para analisar o conhecimento amalgamado no processo de transição, cujo objeto repousa sobre os “conceitos abstratos”:

> **conceitos associados** de objetos encapsulados a partir de processos, eles mesmos interiorisados a partir de ações elementares no caso da Teoria APOS; **conceitos unificadores, generalizadores e portadores** de um novo formalismo próximo dos termos de estatuto das noções; **conceitos que necessitam de recursos de modelos intuitivos**, em particular como os intemmediários entre o conceito de ostensivo gráfico, próximo dos termos de modelos intuitivos. (ibidem, 2008, p. 13, tradução e grifo dessa pesquisa)

Ao que tudo indica, cada um dos conceitos aponta uma dificudade particular e, por isso, concordamos com a pesquisadora, quando presume que esses podem tornar-se complementares, já que se classificam como os primeiros estudos de transição focados na Álgebra Linear.

Em todas as três análises a autora, é incisiva ao sublinhar que o problema epsitemológico encontra-se no topo da hierarquia, pois a ***“Álgebra Linear é uma teoria axiomática”*** (GUEUDET, 2008a, p. 13, tradução e grifo dessa pesquisa), pois conforme a decomposição genética sugerida pela Teoria APOS para o conceito de espaço vetorial recomenda-se que os padrões de coordenação precisam de

esquemas para juntos verificar o funcionamento dos axiomas, das operações externas e internas. Por outro lado, sustenta-se em Fischbein (1987) afirmando que *"qualquer teoria axiomática requer a utilização de um modelo intuitivo para apoiar o raciocínio"* (GUEUDET, 2008a, p. 13, tradução dessa pesquisa).

Orientados pelo trabalho dessa pesquisadora, admitiremos também que ***"o encontro com as teorias axiomáticas é uma caracteística da entrada para o Ensino Superior que talvez tenha sido insulficiente enfatizado nos estudos para a transição do Ensino Superior"*** (GUEUDET, 2008a, p. 14, tradução e grifo dessa pesquisa).

Isto posto, para buscar alternativas de solução às políticas educacionais da França, particularmente, para o ensino de Álgebra Linear, impulsionou a reforma da Matemática Moderna que promovia um ensino prematuro das teorias axiomáticas, além da Álgebra Linear, pois os ingressos no Ensino Superior não sabiam o significado de um axioma e, nem mesmo, uma teoria axiomática.

Para Gueudet (2008a), um dos problemas associados a essa descoberta estaria relacionado à ausência de vínculo entre os axiomas da Geometria e os da Álgebra Linear, tendo a primeira possibilidade de oferecer um lugar mais confortável para o desenvolver os conhecimentos da segunda, sobretudo – os axiomas, embora, destaca a autora, existam dificuldades no desenvolvimento da Geometria apresentada no Ensino Médio e a Geometria axiomática.

Ao mesmo tempo, assinala também que o aspecto unificador é provavelmente, o mais característico, pois nele os estudantes teriam mais condições de operar não somente espaços vetoriais do tipo IR^n, mas os espaços das sequências, polinômos, funções, entre outros. Assim, os modelos intuitivos, vinculados fortemente à Geometria, permitiriam a utilização de modelos geométricos abrindo o caminho para a utilização dos modelos figurativos.

Apesar dessa perspectiva, essa autora aponta algumas dificuldades encontradas no ensino da Álgebra Linear: *"Dificuldade para lidar de forma eficaz com a definição de esapço vetorial, dificuldade na produção de exemplos*

específicos de tais espaços, dificuldade de utilizar um modelo geométrico para estabelecer um resultado..." (GUEUDET, 2008a, p. 14, tradução dessa pesquisa).

No entanto, contrapõe-se à possível solução de desenvolver uma diversidade de atividades didáticas, pois para ela essa opção é inviável, já que as três abordagens epistemológicas tratadas anteriormente, mesmo não se sobrepondo uma a outra, sugerem, de certa forma, uma reforma completa do ensino da Álgebra Linear. Para a pesquisadora as tentativas de articulação dessas abordagens são bem vindas, porém não é o bastante iniciar o estudo da Álgebra Linear pelos espaços euclidianos IR^2 e IR^3, pois segundo a mesma, não promove uma construção característica e introdutória sobre a definição de espaços vetoriais.

Sendo assim, Gueudet (2008a) é categórica ao afirmar que construir uma possível articulação requer do professor ou de uma equipe de professores, um trabalho analítico específico de uma experiência concreta, do tipo estudo de caso.

Em suma, sua análise sobre a aquisição de novos conhecimentos conclui que **nenhuma das abordagens epistemológicas destacam todos os aspectos de um determinado conhecimento, mas alguns dele**. Neste sentido, recomenda que as possíveis tentativas de reformulação curricular pautada nos resultados das três abordagens analisadas por ela devem estar imersas numa revisão cuidadosa, exaustiva e em equipe, dadas as características peculiares que este tipo de trabalho exige.

O segundo aspecto tratado pela autora para analisar a transição do EM-ES, refere-se às **novas flexibilidades**. Segundo Gueudet (2008a) existem pesquisas que apontam para as dificuldades dos alunos, relacionadas à ausência de flexibilidade, ao se depararem com nomenclaturas diferentes em situações já esperadas, considerando as práticas dos matemáticos. Isto pode ser percebido a partir da leitura de Robert (1998) incorporada ao seu texto, quando afirma que se encontram nos próprios programas, provas que a Matemática ensinada para as crianças e adolescentes do Ensino Básico, assemelha-se àquela utilizada pelos matemáticos especialistas ou profissionais para fazer Matemática.

Sendo a padronização estruturalista que ergue o edifício dos conhecimentos matemáticos, não se pode refutar que esta se pressupõe bem organizada. Neste sentido, não se encontram isolados uns dos outros, funcionando como uma espécie de rede organizada de conhecimentos e conceitos.

Conforme Gueudet (2008a), cada vez que conhecimentos já estabelecidos se deparam com situações novas, comportam-se como uma rede de nerônios, apelando para memórias que facilitam o reconhecimento de condições semelhantes, produzindo adequadamente, sinapses coerentes que viabilizarão modos diferentes de raciocínio, configurações e registros, bem como flexibizá-los entre si.

Desta forma, a dificuldade de resolver um problema passa a ser vista não mais como ausência de conhecimento, mas como uma carência consolidada de uma rede de conhecimentos disponíveis[23]. Esse modo de analisar as dificuldades de aprendizagem Matemática dos alunos permitiu à pesquisadora verificar que tais ausências impedem o aluno de enxergar diferentes modos de raciocínio, que permitissem elencar um rol de tentativas para a resolução de problemas e controlá-los.

Para a autora, esses fatos irão caracterizar a ausência de flexiblidade, que permitiria deslocar-se de um quadro para o outro, apresentando registros diferenciados, pois no contexto da Álgebra Linear, não somente as quetões que se utilizam do emprego dos desenhos, representam uma forma de flexibilidade. Podemos encontrá-la, segundo a pesquisadora, nos modos de pensar ou de expresão oral, por exemplo.

Quanto ao uso do desenho, Gueudet (2008a) afirma ser uma necessidade, segundo todos os estudos sobre Álgebra Linear. Encontrou um contundente fundamento na tese de Pavlopoulou (1994) que se baseou nos registros de representação semiótica de Duval (1996), distinguindo três formas de registros: gráfico, em tabelas e da escrita simbólica.

[23] O termo “rede” é emprestado das Neurociências que segundo Lent (2002), é explicado a partir da formação da memória de longo prazo e uma série contínua de estímulos sensoriais para o desencadeamento das sinapses químicas. Seria impossível tratar do conceito de conhecimentos disponíveis sem admitir as contribuições das Neurociências.

Gueudet (2008a) apoia-se na pesquisa de Pavlopoulou (1994) para reafirmar que a dificuldade da conversão entre os registros encontrados pelos alunos, localiza-se inicialmente nos livros didáticos que enfatiza a escrita simbólica e, algumas vezes, o gráfico omitindo explicações da transição entre eles.

Para ela, a semelhança entre sua pesquisa e a do referido autor é crucial, diferenciando-se apenas, quando a autora faz a opção por modelos figurativos, para abordar os desenhos que poderão ser considerados inadequados, se tratados como exemplos iniciais, criando dificuldades para os alunos e, provavelmente, erros conceituais. Exemplifica a autora ao questionar *"sejam u, v, w três vetores dois a dois não colineares. Podemos afirmar que a família {u, v, w} é livre?"* (GUEUDET, 2008a, p. 16, tradução dessa pesquisa).

Neste caso, segundo a pesquisadora, os alunos representam os três vetores como uma base de IR^3, incorrendo no erro que a família é livre. Essa dificuldade repousa sobre a interpretação dos modelos, pois para o aluno o modelo figurativo proposto pelo professor está sempre associado ao modelo geométrico euclidiano do IR^3 que, por sua vez, é considerado pelo professor apenas como um modelo paradigmático do espaço euclidiano. É nesse contexto que residem as dificuldades dos alunos, pois não vinculam o modelo paradigmático aos casos gerais, mantendo-se presos ao modelo geométrico.

Gueudet (2008a) refere-se a esse caso com preocupação dizendo que

> é uma razão central a complexidade do uso de modelos figurativos em Álgebra Linear. A utilização de tais modelos, para além do caso do espaço geométrico de dimensão 2 e 3 exige uma a passagem através de modelos geométricos. **O uso de um modelo intermediário indica a necessidade de implementar uma forma de flexibilidade complexa**. (ibidem, 2008, p. 16, tradução e grifo dessa pesquisa)

Depois de considerar alguns estudos no campo da Álgebra Linear, como por exemplo, a pesquisa de Dorier (1997 a 2000), o trabalho de Pavlopoulou (1994), a experiência de Rogalski (1997), as conclusões de Dias (1998), a investigação de Hillel (1997) e a de Sierpinska *et al* (1997), onde todos preocuparam-se com as transições internas da Álgebra Linear, que de certa forma interfere na transição do

EM-ES, Gueudet (2008a) se posiciona afirmativamente, diante da noção de perspectiva para iniciar uma forma geral de flexibilidade, embora existam situações que se fazem necessário uma forma específica de flexibilidade, caso particular da articulação das equações cartesianas-paramétricas da Álgebra Linear. Para tanto, introduz-se a noção de modelo de raciocínio geométrico.

Essas diferenças entre flexibilidade geral e específica, a autora explica alicerçando-se nos resultados de pesquisa de Sierpinska *et al* (1997), que utiliza dos conceitos vygotskyano como pensamento prático e pensamento teórico para erguer a sua própria teoria. Segundo Gueudet (2008a), o pensamento teórico apresenta as seguintes propriedades:

> *o raciocínio é baseado em conexões semânticas e lógica entre os conceitos, as ligações entre os conceitos são feitas com base nas relações estruturais, devido a conceitos mais gerais* [em contraposição ao pensamento prático em que as] *ligações são associações empíricas, ou referências a exemplos específicos. Pensamento prático é orientado para a acção, enquanto o pensamento teórico é mais expressa através de textos. Os matemáticos usam ambas as formas de pensar, ambos são necessários.* (ibidem, 2008, p. 19, tradução dessa pesquisa)

O que temos percebido em nossa prática e, por isso, concordamos com a autora é, talvez, a forma ingênua ou despreparada dos estudantes quando se utilizam apenas de pensamentos práticos, especificamente, no início do Ensino Superior. Gueudet (2008a), exemplifica esse fato a partir da pesquisa de Sierpinska *et al* (1997) quando retrata suas observações no decorrer de atividades usando o *cabri* para o desenvolvimento da noção de mapa linear.

O referido estudo aponta a incongruência entre o usufruto dos tipos de pensamento, pois em sua maioria manifestam-se como práticos, em detrimento de circunstâncias que apelam para uma reflexão teórica. Talvez, a principal dificuldade esteja relacionada à linguagem do que no pensamento teórico, juntamente, com os sistemas semióticos são objetos de reflexão. Contrariamente, esses mesmos elementos (linguagem e sistemas semióticos) são considerados pelo pensamento prático como transparentes, o que, conforme explica Gueudet (2008a), favorece distorções na manipulação das definições teóricas.

Considerando suficiente a digressão apresentada pela autora, referindo-se as novas flexibilidades, foi possível resumir o discurso direcionando-o para a indicação de que **existem formas de flexibilidade específicas para a Álgebra Linear e formas gerais de flexibilidade.** Tomando-se essa última, para inferir sobre o caso particular das noções das Funções Trigonométricas, a pesquisadora orienta considerar e desenvolver a experiência matemática dos alunos, bem como o tempo que será destinado a supervisão por ele mesmo, que nesse caso, dependerá das escolhas feitas pela instituição de ES.

Por fim, Gueudet (2008a), adverte e pontua que as dificuldades com a transição EM-ES podem derivar das características cognitivas dos estudantes, ainda imaturos para manejarem suas dificuldades instínsecas ou insulficientemente flexíveis.

De maneira mais evidente, o terceiro e último aspecto que Gueudet (2008a) considerou para analisar a transição EM-ES, repousou sob o foco de uma **nova instituição**, ressaltando que as abordagens matemáticas – conteúdo e forma – encontradas no EM são diferentes daquelas desenvolvidas no ES, sobretudo, quando se considera a apresentação de outras técnicas para resolverem, muitas vezes, tarefas similares as do EM. Recorrendo a Artigue (2004), Gueudet (2008a) salienta que tais diferenças são justificadas pelo fato de que cada instituição possui a sua própria cultura Matemática.

Esse contexto está imerso nas organizações praxeológicas de Chevallard (2002, 2002a), pois os tipos de Tarefas e técnicas constituem o bloco prático, que encontra no bloco teórico – a tecnologia e a teoria – as explicações, justificativas e formas de controlá-lo. Dessa forma, a autora observa que a análise da transição sob esse ponto de vista, auxilia no rastreamento das dificuldades dos estudantes e na implementação de novas técnicas, para justificar a opção por abandonar as técnicas supostamente aprendidas no EM, mas que não estão respaldas para resolverem as tarefas indicadas para o ES.

Gueudet (2008a), introduz o trabalho de Bosch *et al* (2004 apud GUEUDET, 2008a), para melhor compreender as dificuldades mencionadas, já que esse autor verificou nas instituições de EM da Espanha que, de modo geral, existe

uma correspondência biunívoca entre cada tipo de Tarefa e cada tipo de técnica. Frisa-se ainda que não existe uma articulação entre os diferentes tipos de Tarefas e, muito menos, não são propostas tarefas abertas. Esses autores destacados por Gueudet (2008a) observaram também que na transição para o ES não está considerado como uma estratégia didática o retorno aos tipos de Tarefas mobilizadas no EM, desconsiderando as expectativas institucionais desenvolvidas antes do ingresso na universidade.

Dentre outras importantes perspectivas, Gueudet (2008a) recupera a pesquisa de Castela (2004 apud GUEUDET, 2008a) para balizar diferentes pontos de vista de expectativas institucionais, para formas de ensino desenvolvidos na França, exemplificando o caso em que os estudantes dos cursos superiores são submetidos às avaliações que, por sua vez, são organizadas pelos respectivos professores, que consideram um bloco concentrado de conteúdos, cuja natureza das questões selecionadas são semelhantes às desenvolvidas em sala de aula privilegiando, dessa forma, o emprego das mesmas técnicas supostamente aprendidas.

Essa conduta observa pela pesquisadora Castela (2004), exige dos estudantes a tomada de iniciativas que favorecem a apropriação de uma autonomia capaz de dar cabo à resolução de qualquer tipo de Tarefa no ES, levando-se em conta que a imersão durante dois anos iniciais do curso conduzirão os estudantes à aprovação no final dos estudos, ampliando, nesse sentido, a resolução de novos problemas.

Ao que tudo indica, as conclusões apontadas por Gueudet (2008a) relativas aos novos conhecimentos, novas flexibilidades e uma nova instituição, permite inserir as perspectivas da presente pesquisa sobre a transição, pois auxiliam, na articulação anunciada entre a Didática da Matemática e a Neurociência Cognitiva, já destacadas até o momento.

Com efeito, as orientações de Artigue (2004) e de Gueudet (2008a), permitiu concluir que as análises reunidas convergem para as diferentes expectativas institucionais, em que a alternância das questões culturais entre o EM e o ES, sobretudo, os conhecimentos prévios relativos às noções das Funções

Trigonométricas, podem ou não serem considerados nos níveis mobilizáveis e disponíveis pelos alunos que ingressam nas diferentes universidades.

Em seguida, foi também considerado nesse rastreamento, um breve levantamento de outros estudos que foram desenvolvidos e publicados nos anais de congressos da área, bem como revistas internacionais divulgadas nos últimos anos, primordialmente, que abordam partes do objeto de pesquisa em tela. O objetivo não é alongar a discussão, mas, tão somente, mostrar o desenho de uma geografia, cuja cronologia permite, inclusive, dar à temática da transição, o grau de preocupação em diferentes países.

Dentre eles, destaca-se o CERME (*Congress of European Research in Mathematics Education*) que no intervalo de 1999 a 2013, reuniu cerca de 20 trabalhos que trataram da transição na Alemanha, Bélgica, Dinamarca, Espanha, França, Irlanda Itália, Suécia e Turquia, conforme pode ser apreciado no Quadro 22 a seguir:

Quadro 22

Rastreamento nas fontes Internacionais de Educação Matemática (anais do CERME*)*

CERME - Congress of European Research in Mathematics Education			
Ano	País de origem do autor	Autor	Título do Trabalho
1999	-	-	-
2001	Itália	MASCHIETTO	The transition from algebra to analysis: the use of metaphors in a graphic calculator environment.
2003	-	-	-
2005	Espanha	CARRILLO, CLIMENT e MUNOZ	The transition from initial training to immersion in practice: the case of a mathematics primary teacher.
2007	Irlanda	MEEHAN	Student generated examples and the transition to advanced mathematical thinking.
2009	Turquia	*ATHANASIOU e PHILIPPOU*	The effects of changes in the perceived classroom social culture on motivation in mathematics across transitions.
	Suécia	*STADLER*	The transition between mathematics studies at secondary and tertiary levels: individual and social perspectives.
	Bélgica	*VLEESCHOUWER*	Secondary-tertiary transition and students' difficulties: the example of duality.
2011	Dinamarca	*GYONGYOSI, SOLOVEJ e WINSLØW*	Using CAS based work to ease the transition from calculus to real analysis.
	Suécia	*STADLER*	The secondary-tertiary transition: a clash between two mathematical discourses.
	França	*VANDEBROUCK*	Students' conceptions of functions at the transition between secondary school and university.
	Bélgica e França	*VLEESCHOUWER e GUEUDET*	Secondary-tertiary transition and evolutions of didactic contract: the example of duality in linear algebra.
	Espanha	*ZSIDN e DURAND-GUERRIER*	Transition secondary-tertiary level education via Math-Bridge.
2013	Alemanha	*BIEHLER e KEMPEN*	Students` Use of Variables and Examples In Their Transition From Generic Proof To Formal Proof.
	França	*CHESNAIS e MUNIER*	Learning and Teaching Geometry at the Transition from Primary to Secondary School in France: The Cases of Axial Symmetry and Angle.
	Espanha	*ABREU, CRAFTER, GORGORI e PRAT*	Understanding Immigrant Students' Transitions as Mathematical Learners from a Dialogical Self Perspective.
	Irlanda	*BREEN, O'SHEA e PFEIFFER*	The Use of Unfamiliar Tasks in First Year Calculus Courses to Aid the Transition from School to University Mathematics.
	Alemanha	*HOFFKAMP, SCHNIEDER e PARAVICINI*	Mathematical Enculturation – Argumentation and Proof at the Transition from School to University.
	Dinamarca	*WINSLOW*	The Transition from University to High School and the Case of Exponential Functions.

Fonte: Acervo do autor (2015).

Outra fonte que permitiu verificar os investimentos científicos sobre a transição foi o PME (*Psychology of Mathematics Education*), constituído por um grupo internacional de pesquisadores-educadores matemáticos, criado em 1976, que se reúnem anualmente em diferentes países, para discutir resultados de pesquisas sobre aspectos do ensino e aprendizagem da matemática, pautando-se nos fundamentos da Psicologia, inclusive. Em seus 38 anais foi localizado apenas no volume 02, da edição de 2010, ocorrida no Brasil, o trabalho intitulado *"A comparative study of the secondary-tertiary transition"*. Rapidamente, vale destacar que, segundo Dias, Artigue, Jahn e Campos (2010), autoras desse estudo, um dos motivos que ocasiona problemas na referida transição, repousa sobre a existência invisível de influências contextuais, que por sua vez, decorrem das diferenças culturais, considerando seus diversos tipos e níveis de socialização.

Dando continuidade ao rastreamento por meio dos principais periódicos internacionais, dentre eles, a revista francesa RDM (*Recherche en Didactique des Mathématiques*) e a revista norte-americana EMS (*Education Mathematics Studies*), verificou-se que na RDM, no intervalo de 1980 a 2014, não há publicação de trabalhos que reflita sobre a transição EM-ES. No entanto, no território francês, foi encontrado um trabalho de Ghislaine Gueudet, em 2005, nos anais da 13ª Escola de Verão de Didática da Matemática da França, denominado de *"La transition secondaire-supérieur: résultats de recherches didactiques et perspectives "*.

Em situação contrária a RDM, no periódico EMS observou-se que, o volume 67 editado em 2008, publicou um artigo dessa pesquisadora francesa intitulado *"Investigating the secondary-tertiary transition"*, onde Gueudet (2008b) considerou vários estudos desenvolvidos sobre essa temática, permitindo esboçar alguns tipos de rupturas e evoluções, em longo prazo, que poderiam atenuar os problemas da passagem do EM para o ES. Essas rupturas foram observadas dentro dos conceitos matemáticos abordados (rupturas epistemológicas), na introdução de novos objetos semióticos e das tarefas propostas (rupturas "didáticas") e nas organizações matemáticas associadas (rupturas praxeológicas). Com vista a evoluções futuras, Gueudet (2008b) destacou dois pontos analisados, a partir de vários projetos pedagógicos inovadores: primeiramente, o investimento em diversas ferramentas gráficas tecnológicas e, em

segundo lugar, o estudo de possibilidade para introdução de novos modos de avaliação na universidade considerando os modos de avaliações da escola secundária.

Desta forma, foi possível fazer uma rápida demonstração da importância do estudo da transição EM-ES, destacando, sobretudo, os esforços dispensados pelos pesquisadores, atualmente, em Educação Matemática de todo o mundo. Nesse processo, ficaram constatadas que ainda, são tímidas as investigações sobre as noções de Funções Trigonométricas, priorizando a transição entre os níveis de ensino mencionados acima. Mas, ainda assim, os trabalhos analisados possibilitaram iluminar os cenários que investigam a transição EM-ES, em suas diversas naturezas que associaram, por vezes, as principais dificuldades dos estudantes ao ingressarem no Ensino Superior.

Concluindo, pode-se dizer que as reflexões teóricas aqui reunidas, primordialmente, os estudos de Artigue (2004) e Gueudet (2008a), possibilitaram posicionar a presente investigação, no cenário das pesquisas que tratam da transição EM-ES. Em segundo lugar, considerando-se as investigações em Álgebra Linear, a verificação que se faz necessário aumentar os investimentos científicos enfocando-se a transição EM-ES, mesmo que esforços sejam feitos para compreender as dificuldades dos estudantes, já atuantes no Ensino Superior, conforme postula Artigue (2004), muitos dos problemas estão associados às questões culturais de cada país e, este, continua sendo minimamente tratado.

Essa lacuna tem sido diminuída pelo trabalho de Dias *et al* (2005), que insere as diferenças culturais percebidas no ensino da noção de função entre o Brasil e a França, para analisar a transição EM-ES.

Dentro desse panorama, será apresentado a seguir a problemática, os objetivos e a metodologia da nossa pesquisa.

2.2 – Problemática da pesquisa:

Os marcadores das DAMFT[24] mapeados no capítulo 01, cumpriram as funções de mostrar as preocupações de alguns pesquisadores brasileiros, acerca da implementação das noções das Funções Trigonométricas no Ensino Médio, refletida na transição entre esse e o Ensino Superior, situar as possíveis etiologias dessas dificuldades a partir das pesquisas em Neurociência Cognitiva, apontar algumas direções, que favorecessem a minimização dos problemas causados por tais dificuldades, bem como permitiram a identificação de sinais da Neurociência Cognitiva e suas implicações na área da Didática da Matemática.

Por outro lado, o último estudo desenvolvido por Fonseca (2011), além de participar da análise mencionada, sinaliza uma ampliação focada na transição do Ensino das Funções Trigonométricas EM-ES prevendo, inclusive, o retorno dos futuros professores de Matemática à Educação Básica, possivelmente, contagiados pelos problemas de Aprendizagem Matemática, não resolvidos no Ensino Superior.

Por fim, apesar do levantamento no cenário nacional ter apresentado na Tabela 5 (Cf. p. 106) que menos de 10% das pesquisas brasileiras são direcionadas aos temas Funções, Trigonometria, Funções Trigonométricas ou Transição EM-ES, o cenário internacional aponta a transição EM-ES, como sendo um fenômeno didático que merece atenção, sobretudo, quando Artigue (2004) e Gueudet (2008a) frisam a questão cultural, como um elemento que tem sido negligenciado por vários países.

Tais considerações possibilitaram delinear a problemática dessa pesquisa, caracterizando a Transição do Ensino das Funções Trigonométricas EM-ES como principal objeto de estudo. Por sua vez, esse objeto está imerso nas expectativas institucionais, nas percepções dos professores tanto do Ensino Médio como do Ensino Superior, nas condições de aprendizagem existentes e disponíveis dos estudantes, quando se prioriza as noções das Funções Trigonométricas. Contrariamente ao que se pensa, tal problemática pode conduzir a exemplos em que as DAMFT estão atreladas às abordagens direcionadas às noções em tela, no que

[24] *Dificuldades de Aprendizagem Matemática/Funções Trigonométricas.*

se refere à Organização Matemática das Funções Trigonométricas, bem como aos princípios da Neurociência Cognitiva, norteadores da aprendizagem.

Inspirando-se em Gueudet (2008a) que abordou considerações sobre o modo de pensar dos estudantes e a respeito do papel da Geometria no ensino-aprendizagem da Álgebra Linear, para orientar as dificuldades dos mesmos, vez que a transição EM-ES não prepara para a universidade, bem como nas relações $\mathbf{R_{NC}}$ destacadas nos Quadros 03 a 20 (Cf. p. 72-86) e nas expectativas institucionais para a disciplina de Cálculo I, cujos conhecimentos relativos às noções das Funções Trigonométricas precisam estar disponíveis para a compreensão dos novos conhecimentos (limites, derivadas e integrais), observou-se que possíveis considerações fundamentadas nos princípios da Neurociência Cognitiva poderiam respeitar, conforme postula Artigue (2004), as questões culturais que estão imersas quando são reunidas na sala de aula, dessa disciplina uma concentração de variedade de concepções institucionais do Ensino Médio.

Nesse sentido, concorda-se com os pressupostos de Artigue (2001) quando é reforçada a necessidade de revelar a importância de abordar as disciplinas da Matemática superior, por meio de suas múltiplas faces, privilegiando a formação de prováveis futuros matemáticos ou professores de Matemática, bem como os estudantes em que suas relações com a Matemática serão do tipo, periféricas. Por isso, repousa num inconsciente coletivo que o acesso à Matemática formal, por parte dos estudantes, é uma expectativa que exige, inclusive, de todos os estudantes, independente do seu nível de entrada no Ensino Superior, uma mobilização para que estes tenham contato e possam aprender uma Matemática sofisticada.

Todas essas considerações justificam a importância de investigar, questionar, analisar e refletir sobre as concepções e processos de aprendizagem existentes, nessa nova etapa da escolaridade – o Ensino Superior – e, também, etapas anteriores como o Ensino Fundamental e o Ensino Médio.

Com efeito, verificou-se a partir desse estudo inicial e dos resultados das macroavalições (SARESP, IDEB, PISA, ENADE) que tanto os estudantes do Ensino Médio, quanto do Ensino Superior são portadores de dificuldades de aprendizagem,

mais especificamente, as relacionadas às noções das Funções Trigonométricas, pelo fato de, possivelmente, não desenvolverem as competências e expectativas institucionais, imprescindíveis para alcançarem o êxito mínimo desejado pelo mundo do trabalho e, por outro lado, os professores podem não dispor de recursos adequados para auxiliá-los, sendo um deles, a formação que considere o processamento cerebral da informação a partir dos fundamentos da Neurociência Cognitiva.

Salienta-se que provavelmente por questões culturais de percepção, essas dificuldades dos estudantes possam encontrar justificativas, no fato de não considerar e não mobilizar os seus conhecimentos matemáticos prévios, provocando uma possível apatia, diante da exposição de novos conhecimentos. Esse quadro pode ser interpretado como os reflexos da qualidade e concepções do Ensino de Matemática em todas as etapas escolares.

Sendo assim, a presente pesquisa espera contribuir para novas reflexões que vislumbrem alternativas didático-metodológicas no cenário da Matemática escolar, uma vez que as contribuições da Didática da Matemática, especificamente, as análises das relações institucionais e pessoais esperadas e existentes via a Teoria Antropológica do Didático e a abordagem dos Níveis de Funcionamento do Conhecimento possibilitará identificar os elementos norteadores em diferentes núcleos culturais, considerando, para tanto, os conhecimentos prévios dos estudantes.

E, para complementar essa expectativa, buscar nas possíveis articulações com os princípios da Neurociência Cognitiva fundamentos que convençam e permitam as instituições (programas, livros didáticos e macroavaliações) considerarem-nos como a forma mais contemporânea de compreender os caminhos rumo ao alcance da Aprendizagem Matemática. Em outras palavras, que essas instituições passem a considerar as expectativas naturais, as neurocognitivas, existentes na neuroanatomofisilogia do cérebro. Além disso, esse esforço representa também mais uma alternativa para sinalizar no Ensino Médio, como as noções relativas às Funções Trigonométricas podem se tornar ferramentas livremente, manipuladas quando solicitadas, pelo Ensino Superior.

Dessa forma e, considerando essa exposição de motivos, os marcadores das DAMFT, o estudo desenvolvido por Fonseca (2011) e o levantamento apresentado na Tabela 5 (Cf. p. 106), ficou constatado que existe a dificuldade de aprendizagem relativa às noções das Funções Trigonométricas na transição EM-ES, fatos que justificaram e mobilizaram o interesse pelo desenvolvimento da presente investigação.

Nessa perspectiva, os estudos desenvolvidos por Gueudet (2008a) revelaram que existe uma ruptura na transição EM-ES no processo de ensino-aprendizagem de diversas noções matemáticas. Por hipótese (H), acredita-se que: H1 – Existe uma ruptura na transição do Ensino de Funções Trigonométricas do EM-ES. Por sua vez, essa conjectura fundamenta-se em suas possíveis causas, ou seja, o Ensino das Funções Trigonométricas, no ES consideram disponíveis os conhecimentos desenvolvidos no EM. No entanto, desconfia-se que a aplicação dos princípios da Neurociência Cognitiva (NC) na construção de atividades matemáticas favorece o aprendizado. Isso permitiu delinear H2 – o Ensino das Funções Trigonométricas no EM-ES não leva em conta esses princípios.

Tais suposições foram investigadas sob as seguintes questões de pesquisa (Q):

Q1 – Quais são as possíveis causas dessa ruptura?

Q2 – A institucionalização de atividades matemáticas baseadas nos princípios da NC pode auxiliar no processo de neutralização dessa ruptura?

No próximo item, serão descritos os objetivos geral e específicos da pesquisa.

2.3 – Objetivos da Pesquisa:

2.3.1 – Objetivo Geral:

O objetivo geral desta pesquisa é analisar a Transição do Ensino das Funções Trigonométricas EM-ES sob a ótica da articulação entre os quadros da Didática da Matemática e da Neurociência Cognitiva.

A possibilidade de alcance desse intento, além de contribuir com os movimentos científicos em prol da melhoria dos processos de ensino e aprendizagem da Matemática escolar, esclarecerá alguns cenários acadêmicos tanto da formação inicial como continuada dos professores, sempre que o encontro com as dificuldades de aprendizagem dos estudantes sinalizarem, inclusive, para as noções das Funções Trigonométricas, podendo encontrar recursos e inspiração para diagnosticar os conhecimentos prévios dos mesmos, que são importantes para alavancar os novos conhecimentos. Assim, os professores terão disponíveis, por meio da verdade científica, elementos modernizados que versam sobre as expectativas naturais do cérebro, para acionar o mecanismo de aquisição da informação, sobretudo, quando essa estiver sob os códigos da Matemática escolar e, mais especificamente, tratar das noções das Funções Trigonométricas.

Associado a essa expectativa, talvez, os resultados desta investigação possibilitem às instituições repensarem suas escolhas quando forem estruturar uma Organização Matemática, dos diversos domínios dessa disciplina oportunizando aos estudantes para acessarem seus conhecimentos prévios, com vista à possibilidade de empregá-los em suas estratégias para resolução dos variados tipos de Tarefas, selecionadas para mobilizarem ou introduzirem novos conhecimentos, novas noções.

No que diz respeito às noções das Funções Trigonométricas, campo matemático tratado nessa investigação, os conhecimentos prévios da elaboração mental a elas associados referem-se à disponibilidade e domínio do conceito e definição das razões trigonométricas fundamentais no triângulo retângulo, seno e cosseno de um ângulo, propriedades e relações entre essas razões, representação racional (decimal ou fracionária), leitura de tabelas trigonométricas, resolução de problemas que recorram às operações entre essas razões, passagem dessas razões para o círculo trigonométrico, relação de equivalência (articulação) entre as unidades de medidas angulares grau e radiano, definição e propriedades das Funções Trigonométricas seno e cosseno, representação gráfica das funções circulares seno e cosseno, enfatizando-se a compreensão de todos os coeficientes trigonométricos *a, b, c* e *d* na função $f(x) = a + b.sen(cx + d)$, por exemplo, determinação do período, imagem, domínio e monotonia dessas funções, aplicação

das propriedades na resolução de equações e inequações trigonométricas, resolução de problemas por meio das equações e inequações trigonométricas. Sendo todo esse elenco desenvolvido no Ensino Médio, são requisitados pelo Ensino Superior, especificamente, na disciplina de Cálculo I, para determinar o estudo da monotonia das funções circulares, visando-se precisar a inclinação das assíntotas horizontais que, por sua vez, otimizarão as análises funcionais rumo ao estudo das derivadas e suas propriedades matemáticas.

Desse entendimento, decorreram os objetivos específicos, cuja função foi eleger ações que auxiliassem responder as questões de pesquisa Q1 e Q2, subsidiando assim, a possibilidade de validação das hipóteses H1 e H2.

2.3.2 – Objetivos Específicos:

Antes mesmo de listar os objetivos, cabe ainda destacar que, além dos investimentos científicos de Fonseca (2002, 2011), outro argumento para justificar a escolha do objeto matemático, Funções Trigonométricas, repousa sobre o fato desta noção permitir múltiplas representações, bem como ter uma ampliação resultado da passagem do triângulo retângulo para o círculo trigonométrico, sendo ambos trabalhadas no Ensino Médio e aplicadas no Ensino Superior. Esses e os pontos anteriores impulsionaram os seguintes objetivos específicos:

Bloco I:

- Mapear e identificar as Dificuldades de Aprendizagem Matemática (DAM) como os sinais que motivaram o interesse para analisar o fenômeno da Transição do Ensino das Funções Trigonométricas EM-ES;

- Caracterizar o fenômeno da Dificuldade de Aprendizagem Matemática (DAM) a partir da pesquisa em Neurociência Cognitiva;

- Analisar os resultados desse levantamento considerando a abordagem da Neurociência Cognitiva e os pressupostos teórico-metodológicos da Didática da Matemática;

Bloco II:

- Fazer um lavantamento das pesquisas produzidas no Brasil e também no exterior que enfatizem a problemática da transição EM-ES, buscando possíveis articulações com as Funções, Trigonometria ou Funções Trigonométricas.

- Compreender como as perspectivas teóricas a respeito da transição EM-ES.

Bloco III:

- Estudar como os quadros teóricos da Didática da Matemática e da Neurociência Cognitiva utilizadas nessa pesquisa que, respectivamente, foram representadas pela Teoria Antropológica do Didático, Níveis de Funcionamento de Conhecimento e Perspectivas da Neurociência Cognitiva.

Bloco IV:

- Desenvolver uma análise epistemológica das noções relativas às Funções Trigonométricas fundamentais, seno e cosseno.

Bloco V:

- Desenvolver uma análise institucional tanto no Brasil como na França, priorizando o sistema de tarefas e práticas, tanto no Ensino Médio como no Ensino Superior que enfoquem as noções das Funções Trigonométricas. Essa análise repousará sobre as exigências institucionais para viabilizar o ensino e a aprendizagem das referidas noções, por meio dos documentos oficiais, livros didáticos e macro avaliações.

Bloco VI:

- Analisar e selecionar um conjunto de três tarefas relativas às noções das Funções Trigonométricas, que tenham sido trabalhadas no Ensino Médio de forma a mobilizá-las para o ingresso do Ensino Superior possibilitando o diagnóstico e identificação dos Níveis de Funcionamento do Conhecimento dos estudantes, seus conhecimentos prévios, bem como a verificação dos princípios da Neurociência Cognitiva, primordialmente, a evocação e recuperação da Memória de Longo Prazo (MLP).

Por fim, essa pesquisa enfocou as noções das Funções Trigonométricas primeiramente, apresentadas no Ensino Médio, para:

- Analisar quais as possíveis alternativas que considerem os conhecimentos relativos às noções das Funções Trigonométricas para fundar uma base introdutória das noções do Cálculo I: limites, derivadas e integrais.

- Apresentar, por meio da seleção das tarefas relativas às noções das Funções Trigonométricas, a importância de mobilizar os Níveis de Funcionamento do Conhecimento dos estudantes, partindo-se de seus conhecimentos prévios.

Para que essas ações sejam passíveis de desenvolvimento, fez-se necessário considerar a metodologia abaixo.

2.4 – Metodologia da Pesquisa:

Para dar cabo dos objetivos apresentados acima, desenvolveu-se uma pesquisa nos formatos documental e experimental, cujas análises enfocaram o objeto de pesquisa anteriormente anunciado.

Os objetivos do bloco I foram contemplados pelo estudo apresentado no capítulo I, que considerou as contribuições teóricas garimpadas na literatura que refletiam sobre as Dificuldades de Aprendizagem Escolar, sobretudo, as relacionadas à disciplina Matemática. Em seguida, buscou-se nos trabalhos dos pesquisadores da área de Neurociência Cognitiva elementos que permitissem atualizar a concepção de aprendizagem e, também, a caracterização das Dificuldades de Aprendizagem Matemática.

Tendo cumprido essa etapa, rastrearam-se trabalhos de pesquisas nos bancos de Dissertações e Teses, de algumas universidades brasileiras, cujos Programas de Pós-Graduação se aproximavam, de alguma forma, dos interesses dessa investigação. Assim, pesquisou-se nos bancos da Universidade de São Paulo, Universidade Regional de Blumenau, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, Universidade Estadual Paulista/Rio Claro, Universidade Federal do Mato Grosso do Sul, Universidade Bandeirante de São Paulo e, por último, Universidade Federal de Sergipe sobre as Dificuldades de Aprendizagem Matemática, principalmente, enfocando as Funções Trigonométricas.

Como resultado, identificaram-se algumas Características para o Desenvolvimento da Aprendizagem Matemática Escolar (CDAME), bem como a identificação das Dificuldades de Aprendizagem das Funções Trigonométricas (DAMFT). Ambos, CDAME e DAMFT, funcionaram como marcadores dos sinais capturados nos trabalhos de pesquisa, cujo intento foi possibilitar a construção das primeiras articulações teóricas, entre os pressupostos teórico-metodológicos da Didática da Matemática e a abordagem da Neurociência Cognitiva.

No caso dos objetivos dirigidos ao bloco II, realizou-se um novo levantamento nos bancos de Dissertações e Teses apenas nos Programas de Pós-Graduação do Brasil, cujos dados obtidos permitiram produzir as Tabelas 1, 2, 3, 4 e 5 (Cf. p. 99-106) de onde se pode concluir que existe um número pouco significativo de pesquisas que relacionem o estudo da transição EM-ES, sobretudo, tratando-se das noções relativas às Funções Trigonométricas; sendo esse um dos fatos que demarcou o ineditismo da presente investigação. Além disso, os excertos pinçados, tanto desse levantamento como das contribuições de Gueudet (2008a), desvelaram por meio dos seus resultados pistas que favoreceram o amadurecimento das reflexões dessa pesquisa, muitas vezes reforçando as hipóteses H1 e H2.

Os quadros teóricos formados pela Didática da Matemática e da Neurociência Cognitiva, constituintes dos objetivos do bloco III, foram construídos por meio de leituras articuladas de suas principais fontes. Para a Teoria Antropológica do Didático – TAD recorreu-se, principalmente, aos textos do pesquisador matemático francês Yves Chevallard e, da mesma forma, as orientações da pesquisadora francesa Aline Robert que tratou da abordagem Níveis de Funcionamento de Conhecimento. Quanto aos fundamentos teóricos da Neurociência Cognitiva, buscou-se reunir uma ampla variedade de estudiosos, vez que aumentaria as contribuições para tratar da temática. Dentre eles, destacam-se as contribuições do austríaco Eric Kandel, dos norte americanos Michael Gazzaniga, Joseph LeDoux e Daniel Willingham, do brasileiro Roberto Lent, do argentino Ivan Izquierdo, do entre outros.

A fase seguinte, os objetivos do bloco IV, foi contemplada por meio de um levantamento bibliográfico em fontes de História da Matemática, História da Astronomia, História da Física, primordialmente. Recriou-se uma espécie de quebra-

cabeça, pinçando de cada uma dessas áreas elementos que permitiram descrever a análise epistemológica, enfatizando-se a natureza e primórdios das noções das Funções Trigonométricas fundamentais, seno e cosseno. Isso contribuiu para selecionar as tarefas que formaram o protocolo experimental. Além disso, corroborou para a compreensão da hierarquização do conhecimento matemático, bem como para as análises institucionais que serão tratadas no próximo item.

Os objetivos do bloco V foram subdivididos a fim de serem melhores contemplados. Primeiramente, as propostas institucionais (relações institucionais esperadas) para o ensino das noções das Funções Trigonométricas no Ensino Médio, tanto no Brasil como na França, foram tratadas via documentos oficiais do Estado de São Paulo e do Ministério de Educação da França, respectivamente. Para o Ensino Superior, optou-se pelos planos de ensino de uma universidade pública do Estado de São Paulo (USP) e da Universidade Claude Bernard Lyon I (UCBL I)[25]. A documentação de ambos os níveis de ensino foram analisados sob as lentes da TAD.

No caso brasileiro, esses documentos estão respaldados e publicados por meio do decreto lei 1996, para legitimar a Lei de Diretrizes e Bases 9394/96, dirigida a Educação Nacional que teve em 2001 a sua complementação através do Plano Nacional da Educação (Lei 10172, BRASIL, 2001). Em sua essência, anuncia os objetivos e prioridades da educação brasileira, mostrando a importância de avaliá-lo para verificar a diminuição dos desníveis socioambientais, englobando-se a democratização de todo o ensino, decorrendo dessa perspectiva, a implementação dos Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN's.

Sendo assim, a seleção dos citados documentos oficiais respaldou-se nas novas orientações, que foram utilizadas para buscar atingir os objetivos na avaliação nacional e, nesse sentido, os Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1997, 2000, 2002, 2002a, 2006), satisfazem as exigências do Ministério Brasileiro da Educação. Raciocínio análogo subsidiou as escolhas dos documentos oficiais para o Ministério Francês da Educação.

[25] Especificamente, do Instituto Nacional de Ciências Aplicadas de Lyon – INSA Lyon.

Num segundo momento, desenvolveu-se a análise das relações institucionais existentes no Ensino Médio via um livro didático aprovado no Programa Nacional do Livro Didático para o Ensino Médio – PNLEM, caso do Brasil e, um livro didático aprovado pelo Ministério de Francês de Educação, caso da França. As justificativas legais e de seleção dos livros seguem, também, os mesmos princípios empregados para os documentos oficiais nos dois países. Para o Ensino Superior a análise foi desenvolvida por meio de um livro didático, tanto no Brasil como na França em que constem os conteúdos da disciplina Cálculo Diferencial e Integral I indicados no plano de ensino do curso de Licenciatura em Matemática da USP, dada a ausência do mesmo no curso de Licenciatura em Matemática da UCBL I, recorrendo-se dessa forma, aos cursos de Engenharias oferecidos pelo INSA Lyon.

Tais exames foram inspirados considerando-se parte da grade de análise desenvolvida na tese de doutorado de Dias (1998), de forma que, optou-se pelas variáveis das tarefas que preservassem o sincronismo com o quadro teórico apresentado na presente pesquisa: Técnicas e tecnologias associadas à tarefa; Teorias associadas às tecnologias; Ostensivos de representação escrita; Não ostensivos associados; Nível de Funcionamento do Conhecimento[26].

Por fim, para alcançar os objetivos do bloco V a última fase, repousou sobre a investigação das macroavaliações que permitiram entender as relações pessoais esperadas dos estudantes, sendo as provas dos três últimos anos do Exame Nacional do Ensino Médio – ENEM e as três provas do Exame Nacional de Desempenho de Estudantes – ENADE, ambas brasileiras, aplicadas aos estudantes do Ensino Superior. No caso da França, só existe o exame equivalente ao ENEM chamado de ***Baccalauréat*** – BAC[27], ficando o Ensino Superior excluído desse contexto. Tais investigações foram compreendidas por meio da TAD.

[26] Apesar de Andrade (2012) também ter utilizado a grade de análise de Dias (1998) e utilizar a denominação “Níveis de conhecimento esperado dos estudantes”, classificando-os como técnico, mobilizável e disponível, optou-se nessa pesquisa, por preservar a designação original concebida por Robert (1998), “Níveis de Funcionamento do Conhecimento”, para tratar dos mesmos níveis.

[27] Na França o *Baccalauréat* é um diploma nacional certificando o fim dos estudos secundários gerais, tecnológicos ou profissionais. Em outras palavras, é um pré-requisito para o ingresso no Ensino Superior, equivalendo-se no Brasil ao Exame nacional do Ensino Médio – ENEM.

Para finalizar as análises, desenvolveu-se, considerando as análises institucionais e a análise epistemológica um protocolo experimental que reuniu três tarefas que caracterizam os três Níveis de Funcionamento de Conhecimento de Robert (1998) – técnico, mobilizável e disponível, cujos objetivos foram descritos anteriormente. Inicialmente, esse protocolo foi aplicado a um conjunto (Grupos A e B) singular de estudantes universitários, pelo fato de ser formado por estudantes brasileiros e franceses que fazem parte de um projeto de intercâmbio entre o Brasil e a França gerenciado pelo INSA Lyon.

Numa segunda oportunidade, aplicou-se também o mesmo protocolo para estudantes unicamente brasileiros, respectivamente, em turmas de Licenciatura em Matemática e Engenharia de uma universidade e, exclusivamente em uma turma de Engenharia numa segunda universidade. O propósito foi, tão somente, fazer uma breve estatística dos resultados sem fazer as mesmas considerações teóricas dos grupos do intercâmbio que sofreram influências culturais por participarem da experiência, consequentemente, desenvolvendo estratégias particulares de adaptação que influenciaram nos resultados (dados numéricos), quando comparados ao segundo grupo (sem intercâmbio). Os resultados foram analisados sob a ótica de Robert (1998) e, também, dos princípios da Neurociência Cognitiva, primordialmente, a evocação e recuperação da Memória de Longo Prazo (MLP).

Isto posto, e, com os dados das relações institucionais esperadas e existentes, bem como das relações pessoais esperadas dos estudantes e das análises neurocognitivas, obteve-se por meio do cruzamento desses dados, um delineamento da compatibilidade do nível entre essas relações, ou seja, apontar quais os possíveis conhecimentos prévios são exigidos dos alunos para o alcance das propostas analisadas.

Na sequência, foi descrito e discutido uma breve evocação do referencial teórico escolhido para fundamentar a presente investigação.

CAPÍTULO III

Quadros teóricos para a conformação de uma perspectiva sobre a Transição do Ensino das Funções Trigonométricas EM-ES: enlaces entre a Didática da Matemática e a Neurociência Cognitiva.

Considerações iniciais

Dentre as opções teóricas, disponíveis para fundamentar as análises sobre a transição do Ensino Médio para o Ensino Superior (EM-ES), enfocando os conhecimentos desenvolvidos no Ensino Médio sobre as Funções Trigonométricas (*conhecimentos prévios*) como possíveis suportes para a introdução de novos conhecimentos no Ensino Superior, centrou-se, na primeira etapa dessa investigação sobre os fundamentos da Teoria Antropológica do Didático – TAD por entender-se que reúne elementos possivelmente capazes de radiografar e tornar visíveis as relações latentes no cenário da Atividade Matemática (AM) que, nesse olhar, podem justificar a instabilidade das perspectivas institucionais e pessoais quando se reflete sobre o fracasso escolar em Matemática.

Sendo a TAD, uma teoria pertencente ao campo de pesquisa da Didática da Matemática, considera as noções de relações institucionais e pessoais, a noção de praxeologia, a noção de ostensivos e não ostensivos, ecologia e os níveis de co-determinação, segundo definições de Chevallard (1992, 1994, 1998, 2002, 2002a, 2007, 2007a) e Bosch e Chevallard (1999) definem como necessários para analisar a AM em quaisquer circunstâncias.

Neste sentido, cabe ainda salientar que a TAD viabilizará, com precisão, o reconhecimento das praxeologias existentes nos documentos oficiais e também as expectativas institucionais, as expectativas tanto dos professores do Ensino Médio como do Superior acerca dos conhecimentos anteriores dos estudantes referentes à noção de Funções Trigonométricas, na passagem entre essas duas etapas escolares.

Por esses motivos e, a partir das noções de ostensivos e não ostensivos vimos à necessidade de agregar uma abordagem auxiliar a TAD, teoria central da

pesquisa, por entendermos que juntas possibilitarão mais consistência acerca do objeto em análise. Destacaremos a noção dos três Níveis de Funcionamento do Conhecimento (NFC) dos estudantes idealizados por Robert (1997, 1998).

Esse enfoque concebido por Robert (1997, 1998), ilumina o cenário das articulações entre os NFC, relativos à noção de Funções Trigonométricas e, além disso, dá possibilidade para compreensão das mudanças ocorridas por meio das exigências institucionais, respectivas à transição das fases escolares anteriores.

Neste contexto, é esperado pelos estudantes do referido nível escolar que, através da flexibilidade cognitiva dos conteúdos matemáticos possam ampliar, com autonomia, diversos tipos de tarefas (escolares ou profissionais) sugeridas e que determinem ocasionalmente a utilização de noções matemáticas, em particular, as de Funções Trigonométricas.

Essa mesma pesquisadora defende que tal autonomia vincula-se diretamente, de uma flexibilidade cognitiva que, dentro da área de Matemática, foi associada à capacidade de manipular uma variedade de ostensivos e evocar os não ostensivos associados.

Dessa forma, acredita-se que para dispor livremente dessa autonomia, é esperado dos estudantes, conforme Robert (1997, 1998), o NFC classificado como disponível, já que se faz necessário os diversos contextos matemáticos envolvidos numa tarefa dada.

Diante desse preâmbulo e, da teoria apanhada para alicerçar a pesquisa em tela, deu-se continuidade a redação apresentando um breve resumo sobre as mesmas para que se tenha uma melhor compreensão dos argumentos que nelas repousam para analisar a transição do Ensino Médio para o Ensino Superior sempre que seja referido às Funções Trigonométricas.

Por pensar nesse sentido, na força mobilizadora da TAD, bem como no alcance de seus pressupostos teóricos para compreender a AM, iniciou-se a exposição teórica pela referida abordagem. E, para concluir essa etapa, tomou-se os NFC para efetivar o primeiro vínculo teórico entre as teorias da Didática da Matemática selecionadas para tal empreitada científica.

A segunda etapa repousa sobre as perspectivas teóricas da Neurociência Cognitiva, introduzida nessa pesquisa por investigar a natureza do fenômeno da cognição e da aprendizagem. Ambos os fenômenos assessoram e sediam a AM processada no cérebro (meio interno) do aluno, importando compreender como esse conhecimento está ou não sendo considerado pelas teorias da Didática da Matemática, TAD e NFC, sobretudo, por essa última, vincular aos seus postulados a denominação *flexibilidade cognitiva*, terminologia específica da Neurociência Cognitiva.

Apesar de sua longa história, a área da Neurociência Cognitiva obteve essa denominação no final da década de 1970, conforme seu criador Gazzaniga (2006), a partir dos estudos direcionados as funções cerebrais mais complexas como a cognição, linguagem, memória e aprendizagem.

As investigações buscavam analisar onde e como tais funções cerebrais ou cognitivas se estabeleciam no encéfalo, para que o comportamento humano fosse, cada vez melhor explicado. Para tanto, investimentos em equipamentos para explorar o cérebro permitiu o desenvolvimento da análise do tipo molecular para explicar como essas funções cognitivas se comunicam, processando a informação proveniente do meio externo.

Fundamentando-se em Kandel (1991), sabe-se que células especiais denominadas de neurônios são responsáveis pela síntese de proteínas e por meio dos seus mensageiros, os neurotransmissores, processam a informação nas sinapses neuronais. Sendo a informação classificada como “intencional”, sobretudo, as escolarizadas e direcionadas para a AM, interessa analisar se os NFC diluídos nas tarefas propostas nos documentos oficiais cumprem as condições naturais para que o conteúdo (informação) seja, primeiramente, sensível, percebida, classificada como positiva, focada e posteriormente, processada pelo cérebro, a partir da articulação entre as memórias (curto e longo prazo – conhecimentos prévios), funções executivas e aprendizagem.

Por esse motivo, justifica-se a inserção das contribuições da Neurociência Cognitiva, por ser inédita tal articulação e, também, por ser o cérebro o

órgão mais importante da cognição, justificando as raízes da pretendida autonomia intelectual propostas nas diferentes tarefas no Ensino Médio e no Ensino Superior.

3.1 – Quadros Teóricos da Didática da Matemática:

3.1.1 – A Teoria Antropológica do Didático – TAD

Ao ingressar na instituição “escola” o indivíduo (portador do ***meio interno***, o cérebro) já encontra uma estrutura organizacional (***meio externo***, as instituições) pensada para auxiliar o seu desenvolvimento sócio-neurocognitivo por meio, inclusive, da AM. Verificou-se que essa mesma estrutura repousa sobre os pressupostos epistemológicos, de forma que, para analisá-los recorreu-se aos fundamentos da Teoria Antropológica do Didático – TAD idealizada em 1998, pelo matemático francês Yves Chevallard.

Além disso, é também uma das opções teóricas, disponíveis para fundamentar as análises institucionais, sobre a transição do Ensino Médio para o Ensino Superior que, nesse caso, enfoca os conhecimentos desenvolvidos no Ensino Médio sobre as Funções Trigonométricas, como possíveis suportes para a introdução de novos conhecimentos no Ensino Superior. Sendo assim, essa discussão versará sobre os principais pontos da TAD, por entender que reúne elementos favoráveis, no auxílio à compreensão da dinâmica responsável pela institucionalização do conhecimento matemático, apresentado à sociedade por meio da escola, permitindo, desse modo, construir um minucioso mapeamento documental.

Ainda vale a pena destacar que até Chevallard (1998), não há registros de uma teoria desenvolvida para analisar a AM que se utilizasse da própria estrutura matemática, como a noção de conjunto, função, variáveis, hierarquia, etc. Segundo o autor que passou a observar, com as lentes de um matemático a Atividade Humana (AH), bem como as suas conformações, a exemplo das Instituições Sociais (IS), percebeu uma possibilidade de articulação entre esses três distintos e, ao mesmo tempo, análogos planos, conforme figura a seguir:

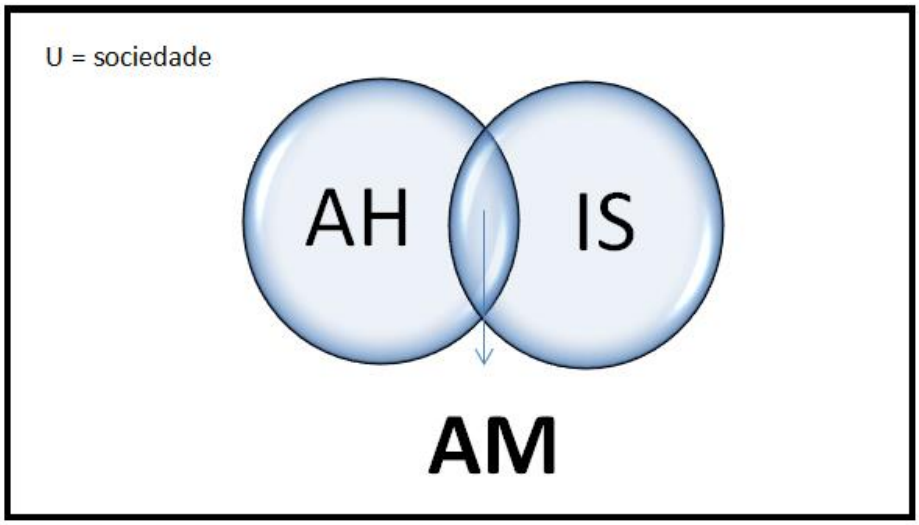


Figura 04 – O lugar da Atividade Matemática.
Fonte: O autor (2015).

Para tanto, resolveu denominar de **praxeologia** um modelo único, desenvolvido para compreender qualquer atividade regular humana. Dessa forma, pode-se dizer que a premissa básica da TAD pressupõe a existência de uma praxeologia ou organização praxeológica.

Por sua vez, a decomposição da palavra praxeologia em "praxe **+** o **+** logia", do grego, ***práxis*** (ação, hábito ou prática) + ***logos*** (conhecimentos, ciências ou teorias) nos permitirá dar um primeiro passo para compreensão e constituição da mesma, em prol da caracterização da AM. Assim, seu significado pode ser desvelado como um modelo para análise da ação humana institucional, alicerçado em teorias científicas.

Conforme a TAD, uma ação (práxis) é constituída por meio das noções de *tarefas* (*t*) e *tipos* de tarefas (*T*) que, se relacionadas, podem ser representadas por $t \in T$. Para Chevallard (1998), tanto *t* como *T* são expressadas por um verbo no infinitivo e requerem um propósito relativamente específico, como por exemplo: *lavar o carro, fazer caminhadas, ler placas de informações, multiplicar um racional por outro, calcular sen x, para x = 30º, etc.* Há ainda outra categoria denominada pelo autor de gênero de tarefas (G) que se caracteriza por não especificar a tarefa, como, por exemplo, *Calcular ..., Determinar ..., Construir ..., Demonstrar ...* Essa imprecisão não permite compreender uma praxeologia, pois demanda de uma determinação.

No aprofundamento da inquirição sobre a AM, o autor analisa o sentido e significado do conhecimento (logos) utilizado para o desenvolvimento de uma tarefa *t*. Para ele, existe um discurso matemático alicerçado e disponível no interior do conhecimento empregado, que justifica e interpreta a ação. Esse discurso Chevallard (1998) designou de técnica (τ) – do grego *tekhnê*, saber-fazer, ou ainda, maneira específica de fazer algo.

Dessa forma, Chevallard (1998) configura a primeira parte de uma praxeologia relativa ao tipo de tarefa T que contém uma técnica (τ) respectiva a T: o **bloco prático-técnico [T/τ]**, denominado pelo autor de **saber-fazer**.

Tendo definido a primeira parte de uma organização praxeológica, o bloco prático-técnico [T/τ], Chevallard (1998) apresenta os elementos que constituem a parte final dessa organização, o **bloco tecnológico-teórico**.

Antes de introduzir as próximas noções do citado bloco, faz-se necessário esclarecer que, para Chevallard (1998) tantas sejam as diferentes técnicas (τ) utilizadas para elaborar um tipo de tarefa T, elas não são algoritmos e, nem tão pouco fechadas em si, pois dependem dos atores das diferentes instituições.

Conforme o autor existe um discurso racional (logo) sobre a técnica (τ) que justifica e garante, racionalmente, a realização de um tipo de tarefa T por muitos, permitindo que sejam capazes de desenvolver as tarefas do mesmo tipo. Esse novo discurso Chevallard (1998) denominou de tecnologia (θ), cujo estilo de racionalidade varia de acordo com a instituição. Neste sentido, acrescenta ainda que outra função de θ é tornar inteligível τ e explicar porque isso ocorre.

Para esse autor, existe, sobretudo na área de matemática, uma desigualdade na utilização das funções de θ: valoriza-se demasiadamente a **primeira função de θ** – justificar τ fornecendo o que é pretendido, minimizando a **segunda função de θ** – explicar para tornar inteligível e esclarecer τ, quando, observa o autor, privilegia-se a exigência da demonstração, em detrimento da explicação. Finalmente, Chevallard (1998), postula existir ainda uma **terceira função das tecnologias**: a produção de técnicas.

Com efeito, esta dinâmica atmosfera denominada de θ, sustenta-se sobre uma fonte/corpus/nível superior de conhecimento (justificativa-explicação-produção) e que ao mesmo tempo permite questionar o porquê desse discurso produzido nessa definição. Esse último nível corresponde ao discurso tecnológico ou à tecnologia da tecnologia, denominada por Chevallard (1998) de teoria, representada por Θ. Salienta-se, então, que a constituição dessa segunda parte de uma praxeologia de uma tarefa especifica dada, foi denominada pelo autor de **bloco tecnológico-teórico [θ/Θ]**, sinônimo de **saber.**

Neste contexto, Chevallard (1998) considera que para a realização de um tipo de tarefa T, circunda por hipótese, a articulação de três elementos: uma técnica (pelo menos uma) τ, uma tecnologia de τ, θ, e uma teoria de θ, Θ. Reunindo todos esses elementos, tem-se constituído uma *praxeologia pontual* representada por [T/τ/θ/Θ], ou seja, uma praxeologia relativa a um único tipo de tarefa T.

A figura abaixo representa o ponto de partida de uma situação-problema – a tarefa *t*, bem como a articulação entre o trio [τ/θ/Θ], responsável pela justificativa, explicação e produção de técnicas para realizar único tipo de tarefa T. Em outras palavras, um modelo da Organização Praxeológica de Chevallard (1998).

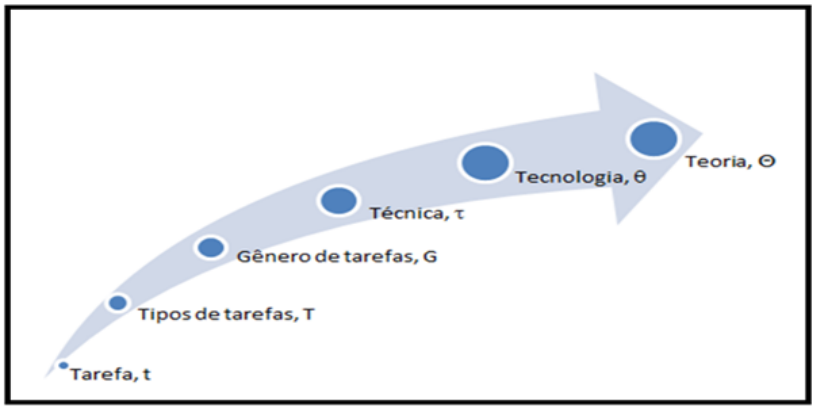


Figura 05 – Modelo da Organização Praxeológica de CHEVALLARD (1998).
Fonte: O autor (2015).

Cabe ainda dizer que Chevallard (1998) realça a existência de uma hierarquia de praxeologias, a saber: *praxeologias pontuais, praxeologias locais, praxeologias regionais* e as *praxeologias globais* que, respectivamente nessa ordem, também se agregam centrando-se em uma tecnologia específica que gira em torno de uma teoria. Conforme esse autor, as primeiras são raramente encontradas, dada

a importância ao saber. Por essa razão e, admitindo-se que esse está posto, na maioria das vezes, em uma instituição dada I, será a teoria que possibilitará o desenvolvimento de várias tecnologias que, justificam e disponibilizam técnicas para a realização a todos os tipos de tarefas.

Para Chevallard (1998), existe um considerável grau de complexidade na passagem de uma praxeologia para outra. Em uma dada instituição (I), as praxeologias globais são complexas, mas necessárias para agregar as várias praxeologias regionais relativas a uma teoria. No caso da transição entre as praxeologias pontuais e as praxeologias locais, deve-se centrar em uma tecnologia. É, portanto, por essa razão que o bloco dos saberes torna-se mais aparente quando comparado com o saber-fazer. Ainda assim, é possível justificar tal desarmonia entre esses dois blocos, se pensarmos, conforme o autor, que existem casos onde os tipos de tarefas T antecedem o bloco teórico e, por isso, o saber favorece a constituição uma técnica relativa a um tipo de tarefa dada, podendo assim, induzir a exposição do saber-fazer, nos livros didáticos, por exemplo, minimizando a uma simples aplicação do saber.

No intuito de esclarecer o desequilíbrio entre os blocos **[θ/Θ]** e **[T/τ]**, Chevallard (1998), pinça um exemplo do ensino de matemática mostrando como um tema de estudo é comumente identificado por meio de uma tecnologia específica. Recorre ao teorema de Pitágoras, teorema de Tales, ou seja, considera que são identificados, implicitamente, com o bloco **[θ/Θ]**, uma vez que, essa tecnologia permite a produção e justificativa, por meio das aplicações, as τ relativas a diversos tipos de tarefas. De modo similar, salienta ainda que o mesmo ocorre com outros conteúdos matemáticos, a exemplo da fatoração e resolução de equações, pois são apresentados classicamente em termos de tipos de tarefas.

Sobretudo, Chevallard (1998), esclarece que, até este momento foi apresentado à noção de forma genérica, exigindo-se uma maior dose de investigação dessa noção que poderá ser desenvolvida, tomando como ponto de partida, fontes anteriores, bem como a pesquisa de campo acompanhada da análise dos dados obtidos na observação.

No entanto, observaram-se durante o levantamento das fontes teóricas que a noção de praxeologia sucede às noções contidas no desenvolvimento de teorias relativas à Antropologia Cognitiva, primordialmente, que, segundo Chevallard (1992), referem-se aos *objetos, pessoas, instituições, relações* e, por sua vez, estão embasadas nas primeiras formulações da Teoria da Transposição Didática – TTD, cujo intento foi compreender e unificar as diversas relações entre os fenômenos didáticos.

Conforme o autor faz-se necessário primeiramente, definir didaticamente, três termos primitivos de sua concepção teórica: *os objetos* **O**, *as pessoas* **X** e *as instituições* **I**, estritamente nessa ordem.

Para Chevallard (1992), os objetos, seguramente, constituem em si mesmo, *material de base* de toda construção teórica. Desta forma, tudo é objeto: as pessoas **X**, as instituições **I**, são, por exemplo, de um tipo particular. Partindo desse axioma, postula que um objeto só existirá desde que uma pessoa **X** ou uma instituição **I** reconheça tal objeto como existente. Para tanto, é necessário e suficiente existir pelo menos uma relação de **O** com **X**, $R(\boldsymbol{X},\boldsymbol{O})$, ou de **O** com **I**, $R_{\boldsymbol{I}}(\boldsymbol{O})$, para que **O** exista. Serão essas noções que permitirão o mapeamento analítico das praxeologias existentes na Atividade Matemática, especificamente, no campo das Funções Trigonométricas.

Por conta de sua formação matemática, Chevallard (2007), justifica a utilização da noção de relação a um objeto por acreditar na viabilidade de formulação de diversos problemas, dada a precisão de delicadas definições. Decorre dessa noção, a explicitação da dinâmica entre a pessoa e o objeto, seu modo de pensar e, até mesmo, idealização de objetivos futuros. Repousa sobre essa reflexão, a noção mais refinada de praxeologia, para compreender essa relação. Sob essas circunstâncias, o autor salienta que durante a análise da gênese ou evolução de uma relação (pessoal ou institucional) a um objeto X ou I, devemos observá-los em atividades que permitam ativar tal objeto. É por meio desse entendimento, que Chevallard (1998) construiu às noções de tipo de tarefas, técnicas, tecnologias e teorias.

Tal qual se faz no campo da biologia, quando se pretende compreender os micros organismos, o pesquisador sentiu a necessidade de colocar lentes de aumento, agora sobre as técnicas – que justificam a realização de diferentes tipos de tarefas –, para compreender melhor de que são constituídas e como seria possível projetar e executá-las. Neste sentido, Chevallard (1994) questiona: do que é feita uma técnica? De que ingredientes ela é composta? Em que consiste a "execução" de uma técnica?

Com o intuito de apresentar respostas a essas inquietações, o autor recorre a sua concepção de objeto, mantendo a sua teoria fechada e protegida, estabelecendo uma diferença essencial entre dois tipos específicos de objetos: os objetos ***ostensivos*** e os objetos ***não ostensivos*** que serão melhores compreendidos e definidos, a partir das reflexões de Chevallard (1994) e Bosch e Chevallard (1999) quando articulam essas noções, as noções de relação a um objeto e praxeologia, bem como o seu papel na TAD.

Dessa forma, Chevallard (1994) define **objetos *ostensivos*** aqueles que têm para nós uma forma sensível ou material. Por conta dessas propriedades, o pesquisador subclassificou-os de:

- ***ostensivos materiais****:* uma caneta, um compasso, etc.;
- ***ostensivos gestuais****: o*s gestos;
- ***ostensivos discursivos****: a*s palavras, e, mais genericamente, o discurso;
- ***ostensivos gráficos****:* os esquemas, desenhos, grafismos*;*
- ***ostensivos escriturais****: a*s escritas e os formalismos**.**

Convém frisar que, dadas essas características, das subclassificações associadas aos seus respectivos exemplos, quaisquer uns desses ostensivos podem ser **manipulados**. Designaremos aqui uma representação: $O_o \rightarrow m$, objeto ostensivo manipulável. Contrariamente, os objetos não ostensivos que, para o autor, usualmente designamos de noções, conceitos, ideias, etc., são pouco prováveis de serem manipulados, mas tão somente **evocados** por meio da manipulação dos ostensivos possivelmente associados. Assim, representaremos por: $O_{no} \rightarrow e$, objeto não ostensivo evocado.

Para exemplificar, no campo da matemática, uma relação entre os objetos ostensivos e não ostensivos Chevallard (1994) utiliza a noção de logaritmo, que na resolução da equação exponencial $2^x = 10$, mostra até chegar à solução, a utilização de ostensivos, bem como de não ostensivos, conforme descrito abaixo:

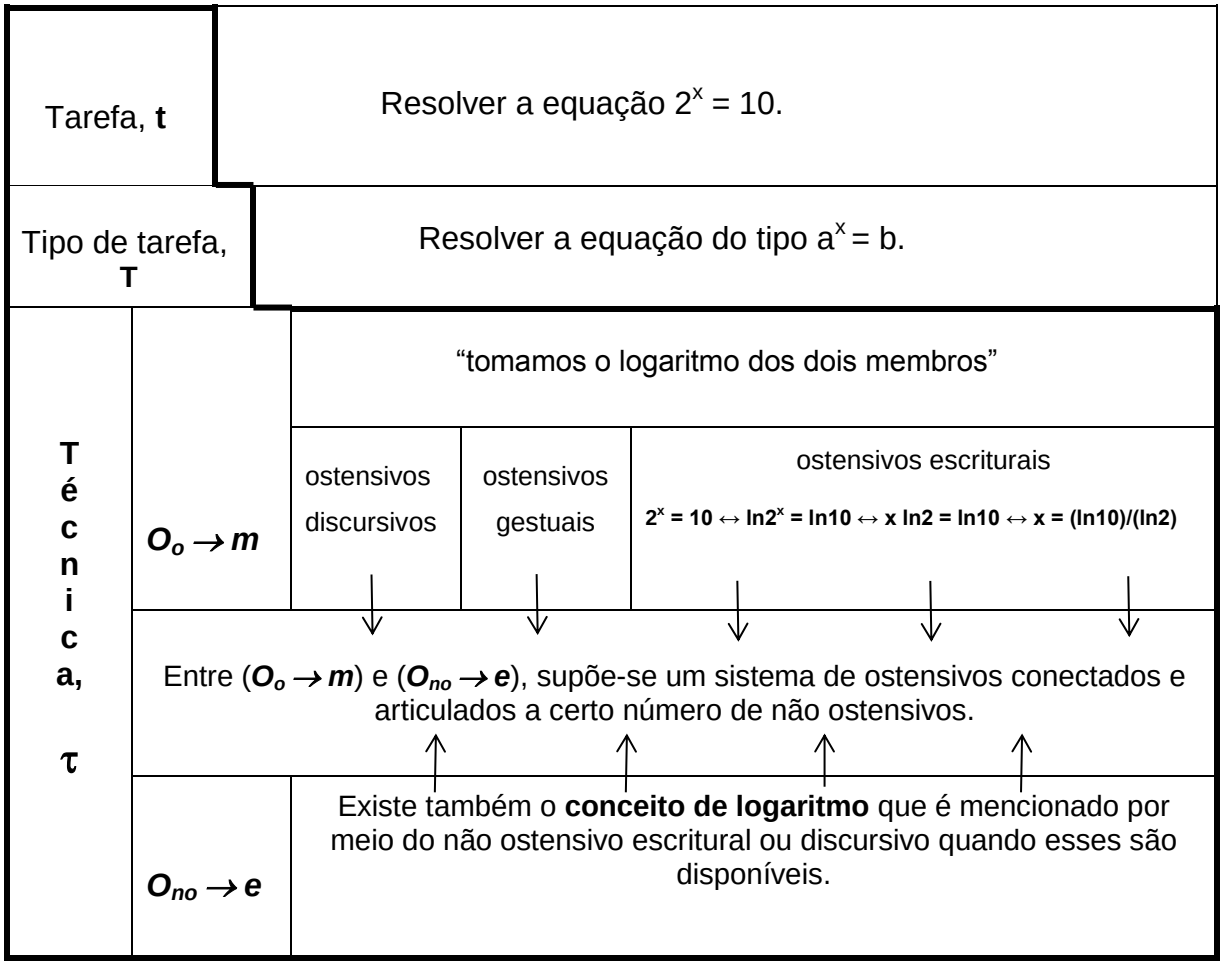


Figura 06 – Constituição da Técnica, τ: o funcionamento do sistema de O_o e O_{no}.
Fonte: O autor (2015).

Analisando, sob as lentes de Chevallard (1994), o desenvolvimento da tarefa acima, por meio da técnica selecionada, verificamos que ao mencionar a palavra logaritmo, estamos **evocando** o não ostensivo, ou seja, a noção, conceito ou ideia supostamente disponível na forma de uma noção prévia já adquirida. Enquanto que, ao pronunciarmos "tomamos o logaritmo dos dois membros", estamos **manipulando** os ostensivos discursivos, essenciais para iniciar uma comunicação verbal e que, articulados com os ostensivos gestuais, escriturais e gráficos – material mais primitivo de toda atividade humana, constituem a composição da técnica para resolver a tarefa.

Dessa forma, Chevallard (1994) observa que existe uma dialética necessária e complexa entre o sistema de ostensivos – *manipulados* por meio de regras, cuja distinção é feita pelos ostensivos e os não ostensivos, *evocados* por meio da manipulação dos ostensivos. Assim, quanto maior domínio sobre os não ostensivos (as noções) e, por isso supostamente disponíveis, maior a manipulação dos ostensivos associados para evocá-los.

Nesse sentido, Chevallard (1994) chama atenção e adverte sobre a Atividade Matemática (AM) que, geralmente, não valoriza o papel dos ostensivos, conduzindo-os ao esquecimento. Nas entrelinhas de suas conclusões, subtendemos que essa forma está imersa numa cultura preconceituosa e que corresponde a uma *visão idealista* da Atividade Humana (AH), dado o valor aos não ostensivos como necessários e essenciais, em detrimento aos ostensivos que serviriam apenas de contingentes e não seriam essenciais. No exemplo anterior, é priorizada a noção de logaritmo sendo essencial para a resolução das equações do tipo $a^x = b$, enquanto que a notação ln seria apenas contingente.

Com efeito, Chevallard (1994), mostra o jogo de oposição entre as visões materialista e idealista da AM, na medida em que a primeira se utilizadas noções de ostensivos, inclusive para evocar os não ostensivos e a segunda, unicamente, dos não ostensivos. Essa assertiva vai nortear e justificar possíveis achados institucionais que, inseridos no âmbito da prática, tem tornado o ensino e a aprendizagem Matemática, conforme D'Ambrosio (1996), obsoletos.

Sobretudo, em uma de suas conclusões, Chevallard (1994) é categórico afirmando, que para possibilitar ao outro a compreensão de uma noção matemática, faz-se necessário escolher a técnica que melhor se aplicará à situação em jogo, pois esta depende de um complexo sistema de ostensivos e não ostensivos, ativados por essa mesma técnica.

Ademais, iremos considerar ainda, as noções de ecologia e os níveis de co-determinação, pois são consideradas pelo autor, ferramentas necessárias para cercar a análise institucional em nossa pesquisa. Para Chevallard (2002, 2002a), tanto o saber e o saber fazer sobrevivem e se reconstroem em função das

expectativas institucionais em momentos diferentes, motivo pelo qual fomos impulsionados a inserir essas duas noções vinculadas a TAD.

Inspirado mais uma vez na biologia, o pesquisador escolhe a noção de ecologia, para compreender como os saberes sobrevivem nas instituições que, por sua vez, necessitam de adequações às demandas, em sua maioria, vinculadas à economia de saberes.

Sendo assim e, fundamentado na noção de ecologia, Chevallard (2002, 2002a) define ***habitat***, ***nicho*** *e* ***milieu*** buscando compreender como estes se entrelaçam e, articulando-os à Atividade Matemática, viu na possibilidade de vinculá-los ao **lugar onde vivem os objetos matemáticos considerados**, **à função que esses objetos ocupam em cada um de seus habitats** e **como o conjunto dos objetos para os quais a relação institucional é estável e não problemática**, respectivamente, uma forma de continuar mantendo sua teoria protegida.

Na pesquisa de Andrade (2012, p. 73), é possível tornar mais compreensível essas noções quando ela postula que

> [...] para o caso do estudo das funções exponenciais no Brasil, podemos supor que seu primeiro habitat é o estudo das funções numéricas no Ensino Médio e seu segundo habitat é o das disciplinas em que ela pode ser utilizada para a introdução de novas noções, como Cálculo Diferencial e Integral ou para a aplicação à modelagem de situações de outras ciências como a Física, o que supõe uma sobrevivência que deve se adaptar às condições e restrições de vida em cada habitat. Essas possibilidades de viver em diferentes lugares fazem com que, no Ensino Médio, a função exponencial tenha um papel de assimilação por meio de seus ostensivos de representação, podendo ser aplicada em determinadas situações contextualizadas, e, no Ensino Superior, sua função é servir de ferramenta explícita na introdução de novos conhecimentos matemáticos ou na modelagem de situações das outras ciências. Dessa maneira, podemos considerar que os ostensivos de representação algébrico (fórmula) e gráfico da função exponencial correspondem ao *milieu* em ambos os habitats em que ela sobrevive no sistema de ensino brasileiro. (grifo da autora)

Nesse contexto e, imersos na subjetividade dinâmica da AM, torna-se quase impossível percebermos separadamente os elementos de uma completa ecologia, bem como as praxeologias que estão lá inseridas e corroboram para a constituição dos mesmos. Por essa razão, Chevallard (2007a), reutiliza-se de suas lentes de aumento sobre os diferentes habitats e mostra a existência de uma escala formada por níveis de co-determinação desenvolvidos e utilizados para explorar e

localizar o processo de difusão praxeológica, bem como as condições e restrições que o determinam.

Segundo o autor, as praxeologias podem ser encontradas em algum desses níveis, o que não exclui a possibilidade de refletir e se exprimir em outro. Então, salienta o pesquisador, essa é a justificativa para que se evite o isolamento – quando uma análise científica se fizer necessária – dos possíveis problemas de uma sala de aula, por exemplo, sempre que essa pertencer ao conjunto do sistema de ensino.

Desse modo, Chevallard (2007a), analisando a dinâmica da AM, percebeu que ela poderia ser compreendida desde uma micro a uma macro análise das condições e restrições de difusão do processo praxeológico, definindo assim os seguintes níveis de co-determinação:

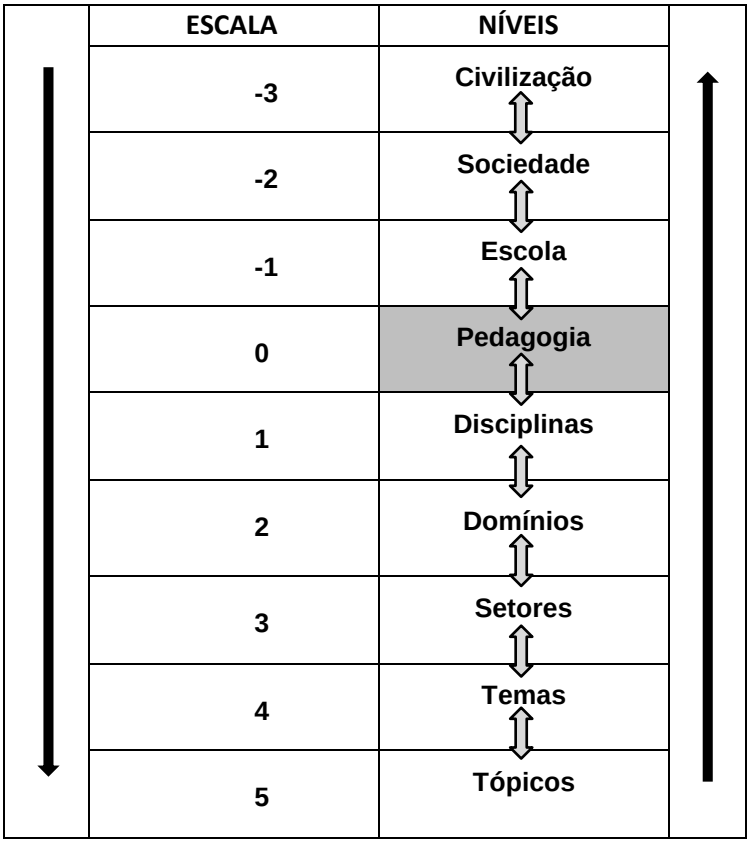


Figura 07 – Escala dos Níveis de Co-determinação.
Fonte: O autor (2015).

Conforme se observou na Figura acima e salienta o autor, os níveis de co-determinação descrevem as relações correspondentes entre as camadas mais

particulares e as mais amplas do sistema didático. Na perspectiva das organizações matemáticas, Andrade (2012, p.74), considera que

> [..] o *tema* associado a uma tecnologia e a uma organização matemática local como, por exemplo, a representação gráfica da função exponencial cujos *tópicos* podem estar associados a um tipo de tarefa e ligado a um *setor* que corresponde a uma teoria, por exemplo, o estudo das funções numéricas. Esse *setor* podendo estar mergulhado em um *domínio*, como o da álgebra que, por sua vez, faz parte de uma *disciplina*, a matemática, para a qual existem indicações de estratégias e técnicas para desenvolvê-la, isto é, a *pedagogia* a ser considerada, que pode ser escolhida pelo grupo de professores de uma determinada *escola* que segue as orientações de documentos construídos pela *sociedade* que, por sua vez, está mergulhada em determinada *civilização*. (grifos da autora)

É importante justificar que Chevallard (2007a), cria tais níveis, nomeando de níveis de co-determinação dado que suas implicações ocorrem nos dois sentidos e, desse modo, o autor postula que uma possibilidade de intervenção em quaisquer uns dos níveis dependerá das condições e restrições, estabelecidas por níveis superiores, sobretudo, pela civilização. A possível tentativa de desconsiderar o estabelecido pelo último nível poderá acarretar problemas e repercutir de forma não desejada.

Sob as lentes do sistema didático, tais níveis podem ser equiparados mediante observação do autor, com: **os estudantes ↔ tópicos**; **os professores ↔ temas**; **os setores, domínios e as disciplinas ↔ construção dos programas** e **os didatas ↔ disciplina**. Para Chevallard (2007a), a TAD se interessa necessariamente, pelos níveis superiores: pedagogia e escola, bem como sociedade e civilização.

Com efeito, torna-se possível mostrar a necessidade e importância em considerar a TAD e temas didáticos coadjuvantes no planejamento didático, tanto do professor como das esferas mais superiores, utilizando-se de uma análise didática que permita a mobilização exterior de situações de aprendizagem, visando à democratização do saber, bem como a construção do conhecimento dos estudantes que possam se valer de noções, supostamente disponíveis, para atingir os objetivos previstos institucionalmente.

3.1.2 – Os Níveis de Funcionamento do Conhecimento – NFC

Sendo a sala de aula de Matemática o ambiente didático formado por recursos, professores e alunos, para tornar possível o encontro entre os **meios interno** (o cérebro, especificamente, dos alunos) e **externo** (as instituições, especificamente, os documentos institucionais: programas de ensino, livro didático e avaliações), verificou-se nas abordagens da pesquisadora francesa Aline Robert a possibilidade de investigar como as tarefas apresentadas aos estudantes, se comportam em relação à estrutura hierárquica decorrente de uma análise epistemológica diretamente, vinculada às noções das Funções Trigonométricas.

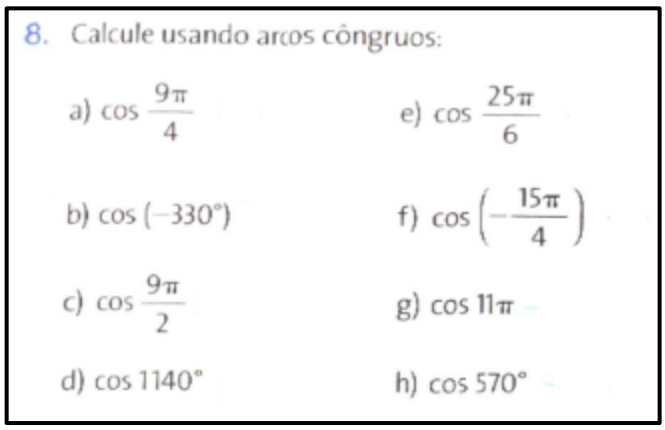
Os NFC podem ser compreendidos como um conjunto de ferramentas desenvolvidas por Robert (1997, 1988) para constituir uma análise epistemológica e didática e, com isso, organizar a hierarquia dos conhecimentos matemáticos que serão apresentados aos alunos, tanto do Ensino Médio como os do Ensino Superior.

Essas ferramentas auxiliam a preparação dos cenários de aprendizagem, preocupação da pesquisadora, cuja hierarquização do conhecimento permitiu, como em uma engrenagem, compreender o desenvolvimento do mesmo a partir de três níveis, a saber: Nível Técnico (NT), Nível Mobilizável (NM) e Nível Disponível (ND). Segundo a autora, tais instrumentos objetivam identificar o nível operacional de funcionamento dos conhecimentos, nas tarefas propostas, seja nos livros didáticos de matemática, nas macro avaliações ou ainda, na formulação de tarefas que ajudem identificar em que etapa do desenvolvimento matemático se encontram os estudantes da disciplina Cálculo I no Ensino Superior – caso particular da parte experimental dessa pesquisa.

De acordo com Robert (1997, 1988), existe uma hierarquia natural entre esses níveis que, caso sejam respeitados, auxiliam os estudantes a compreensão das noções matemáticas em jogo.

O primeiro deles é o NT que, segundo Robert (1997), corresponde à aplicação imediata de teoremas, propriedades, definições e fórmulas, na resolução de uma tarefa que pretente mobilizar a Atividade Matemática (AM) dos alunos. Cabe ainda salientar que, nesse nível, a AM representa um trabalho isolado, local e

concreto. Segue abaixo um exemplo com a noção das Funções Trigonométricas nesse nível da AM:


8. Calcule usando arcos côngruos:

a) $\cos \frac{9\pi}{4}$

b) $\cos(-330°)$

c) $\cos \frac{9\pi}{2}$

d) $\cos 1140°$

e) $\cos \frac{25\pi}{6}$

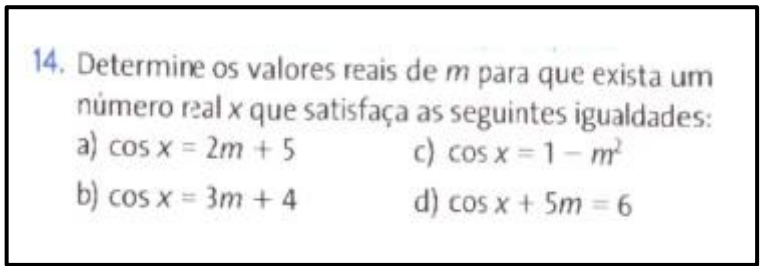
f) $\cos\left(-\frac{15\pi}{4}\right)$

g) $\cos 11\pi$

h) $\cos 570°$

Figura 08: Exemplo do NT da Atividade Matemática
Fonte: DANTE (2013, p. 40)

O segundo, NM que, de acordo com a autora, obedece a um funcionamneto mais amplo que o NT por meio de aplicações simples, em que as propriedades sejam inseridas uma de cada vez, de forma que o questionável esteja explicitadamente, descrito. Analogamente ao procedimento do nível anterior, o exemplo abaixo mostrará como a noção matemática em tela, pode ser identificada nesse nível da AM:


14. Determine os valores reais de m para que exista um número real x que satisfaça as seguintes igualdades:

a) $\cos x = 2m + 5$

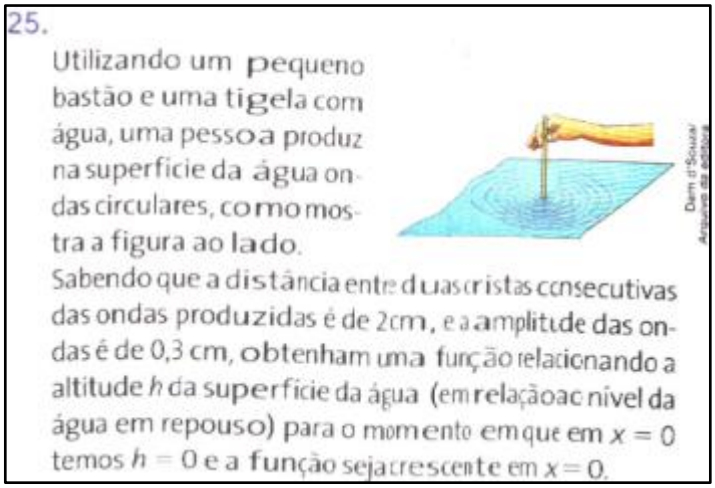
b) $\cos x = 3m + 4$

c) $\cos x = 1 - m^2$

d) $\cos x + 5m = 6$

Figura 09: Exemplo do NM da Atividade Matemática
Fonte: DANTE (2013, p. 49)

O terceiro, denominado pela pesquisadora de ND, o aluno deve ser capaz de resolver o que lhe é oferecido sem nenhuma indicação, descobrindo por si mesmo o conhecimento necessário para resolução da tarefa. Desse modo, este nível inclui a escolha de teoremas, técnicas e estratégias. Nesse caso, esse nível da AM pode ser exemplificado, conforme propõe a tarefa abaixo:


25.

Utilizando um pequeno bastão e uma tigela com água, uma pessoa produz na superfície da água ondas circulares, como mostra a figura ao lado.

Sabendo que a distância entre duas cristas consecutivas das ondas produzidas é de 2 cm, e a amplitude das ondas é de 0,3 cm, obtenham uma função relacionando a altitude h da superfície da água (em relação ao nível da água em repouso) para o momento em que em $x = 0$ temos $h = 0$ e a função seja crescente em $x = 0$.

Figura 10: Exemplo do ND da Atividade Matemática
Fonte: DANTE (2013, p. 54)

Considerando a abordagem dos NFC e os exemplos que buscaram explicitá-los, foi possível ler nas entrelinhas de Robert (1997, 1988) a inquietação da pesquisadora, no que se refere aos cuidados com o processo de aquisição do conhecimento, apesar de não ter sido encontrado justificativas fundamentadas na arquitetura neurocognitiva que é a responsável pelo processamento cerebral da informação, ou seja, como essa é transformada e processada para atingir um fim específico.

Nesse sentido, objetiva-se no próximo item, fundamentar a hierarquização dos níveis propostos pela pesquisadora, a partir das pesquisas em Neurociência Cognitiva, subárea das Neurociências, responsável pela análise do funcionamento cerebral, focando-se nas funções cognitivas, que representam o processo pelo qual o cérebro reage às informações (estímulos) apresentadas pelo meio externo. Neste caso, o tipo de informação particular que está sendo examinado – as noções de Funções Trigonométricas – que precisam ser compreendidas pelos alunos do Ensino Médio, de forma a estarem disponíveis no Ensino Superior.

3.2 – Quadros Teóricos da Neurociência Cognitiva:

3.2.1 – A Perspectiva da Neurociência Cognitiva – PNC

O encontro ou confronto, manipulação, transformação e processamento da informação intencional ou ocasional que está disponível no meio externo tem

despertado o interesse de cientistas cognitivos do mundo inteiro após, conforme Gaussel e Reverdy (2013), a introdução, por Waldeyer em 1891, do conceito de neurônio como célula nervosa.

Particularmente, a sala de aula de Matemática é um dos centros onde a informação intencional (e institucionalizada) ocupa parte do tempo, para que os indivíduos, nesse caso, os estudantes, possam desenvolver as suas capacidades cognitivas, sobretudo, as do tipo lógico-matemáticas. (BRASIL, 2000)

Focando a atenção em um dos subtipos da informação Matemática – as noções das Funções Trigonométricas, verificou-se nessa pesquisa, por meio dos marcadores do capítulo I (**CDAE** ou **DAMFT**), que essas têm sido apresentadas na sala de aula, sob a classificação dessa pesquisa, em três formas: (a) **Negativa**: *obsoleta, morta e congelada*, quando não atendem as expectativas institucionais e pessoais, contribuindo para os baixos índices de evasão e reprovação escolar, bem como para um desequilíbrio ambiental; (b) **Positiva 1**: *manipulativa e dinâmica*, dado os resultados das pesquisas em Educação Matemática; (c) **Positiva 2**: *validada e institucionalizada*, quando estão submetidas a alguma teoria de aprendizagem, como por exemplo, a Teoria das Situações Didáticas – TSD, de Brousseau (1998) e a Teoria da Aprendizagem Significativa – TAS, de Ausubel (1982).

Dessa forma, tanto as teorias da Didática da Matemática disponíveis, como a TAS de Ausubel (1982), recorrem às condições ambientais (ou ditas didáticas) para que se possibilite o desenvolvimento da Aprendizagem Matemática dos estudantes. Mesmo todas, validando os seus resultados, em nível de pesquisa, ainda não são amplamente acatadas pelos responsáveis institucionais.

Com efeito, o campo da Neurociência Cognitiva, que ainda se desenvolve e busca a valorização de outros campos do saber, responsáveis pela investigação do processo ensino-aprendizagem, já conquistou resultados significativos em prol do bem-estar do indivíduo (GAZZANIGA *et al*, 2006). Talvez, seja por tratar desse processo partindo do órgão mais importante do corpo humano, o cérebro, e também, justificar as condições/orientações das teorias de aprendizagem acima mencionadas que a área de Neurociência Cognitiva comece a conquistar a confiança dos gestores, professores, alunos e familiares, auxiliando-os a compreender melhor a

anatomia e fisiologia do seu próprio corpo em prol do bem-estar ou de qualidade de vida.

Nesse sentido, o objetivo inicial desse subitem é inserir os princípios e fundamentos da Neurociência Cognitiva para justificar, a partir da arquitetura do cérebro – lócus onde e como a informação é adquirida, processada, transformada e armazenada, as condições de ocorrência da Aprendizagem Matemática defendidas, principalmente, pelo campo da Didática da Matemática. Em segundo lugar, contribuir para o esclarecimento institucional acerca da possibilidade mais eficaz de alcançar a aprendizagem sempre que se propuserem à democratização e absorção da informação intencional entre e pelos estudantes.

Para dar cabo dessas tarefas, será adotada a seguinte estruturação: breve contextualização histórica, definições e classificações, neuroanatomofisiologia cerebral e mecanismo de aquisição da informação.

3.2.1.1 – Breve contextualização histórica: as origens da ciência do cérebro.

Recorrer à história é sempre uma forma de demonstrar, mesmo brevemente, que não se parte do zero para abordar um tema de pesquisa, ainda que esse aporte no caráter do ineditismo. Para Kristensen *et al* (2001, p. 259), *"a história é sempre um recurso precioso para o estudo do movimento das idéias [...] de uma determinada proposição, seu impacto ou tardio, seu declínio, [...]"*. Esses autores destacam que fazer uma comparação entre mente e cérebro ou, como diziam os antigos, entre alma e corpo, insinua especialmente, a questão que marcou e mobilizou esforços dos cientistas por muitos séculos: alma e corpo são constituídos da mesma substância?

Segundo o pesquisador e professor de Anatomia e Neurociências da Faculdade de Medicina de Laval (Canadá), André Parent, o interesse pelo interior da "caixa craniana" tem início desde a pré-história (PARENT, 2009). Esse pesquisador salienta que a partir das investigações paleontológicas, um dos mistérios repousava sobre os crânios dos hominídeos, encontrados com marcas de ataques para paralisá-los, pois apesar de não ter conhecimento sobre o interior da cabeça, por

algum motivo era intuído que aquela parte do corpo, quando atingida, paralisava todos os movimentos para um possível contra-ataque.

Na Antiguidade, salienta Parent (2009) que o *"papiro cirúrgico de Edwin Smith"*, encontrado no Egito Antigo entre 1700 e 1600 a.C., contém 48 casos relatados sobre traumatismo cranianos, principalmente, sendo estes resultados de lesões de civis feridos ou vítimas de batalhas. Para esse pesquisador, tais registros sustentam a hipótese de ser o estudo formal e inicial das relações entre cérebro e comportamento, considerando-se os ferimentos de guerra.

Parent (2009) destaca os sinais históricos que demonstram a importância da pesquisa do cérebro quando, na Grécia Antiga, o filósofo pré-socrático e médico Alcmeon de Crotona (500 a. C.), principalmente, postulou pela primeira vez que o cérebro é o lócus das sensações e dos processos mentais, estando ambos, localizados em diferentes regiões. Essa ideia foi compartilhada, revisada e ampliada por Hipócrates (460-400 a. C.) e, mais tarde, retomadas por Galeno (130-200 d. C.) que considerou o cérebro como o órgão mais importante do corpo humano, pois atribuía às lesões cerebrais as alterações de personalidade, do comportamento e da capacidade de raciocínio.

Muitos outros filósofos desse período histórico divergiam suas ideias que ora consideravam o cérebro como o comandante das atividades corporais, ora o coração era o órgão que assumiria esse papel – visão particular de Aristóteles (384-322 a. C.) e de seus seguidores.

Com efeito, salienta Parent (2009), que a dualidade entre cérebro e coração como sede da alma, permaneceu ao longo de toda a idade média ou idade obscura, sendo retomadas apenas, após o Renascimento. Em meio a essa crise, Da Vinci (1472-1519), mobilizado pela sua curiosidade da dissecação, aprofundou os achados de Herófilo (335-280 a. C.) – responsável pela descrição das cavidades do cérebro, os ventrículos cerebrais, estando esses associados às funções mentais – mostrou nos seus desenhos que tais ventrículos não são únicos, mas estão separados em ventrículos laterais. Para Da Vinci, as sensações primárias estavam fixadas no ventrículo médio, dado uma grande quantidade de convergência dos nervos cranianos.

Outra marca considerada por Parent (2009) é que essa concepção, denominada de hipótese ventricular (ou teoria hidráulica), perdurou até a idade moderna, onde foi justaposta pela divulgação do tratado de anatomia *"De Humani Corporis Fabrica"*, de autoria de Andras Vesalius (1514-1564) que defendia a mesma organização anatômica para outros mamíferos, não possuidores das mesmas capacidades intelectuais. Dessa forma, tentou desconstruir a hipótese ventricular, buscando defender que nos ventrículos residia o lugar de refúgio dos espíritos animais responsáveis pela mobilização nervosa, dos órgãos sensoriais e do movimento corporal.

A ansiedade de encontrar justificativas para a origem e desenvolvimento das ideias, do pensamento, do espírito, impulsionou René Descartes (1596-1650) filósofo, físico e matemático francês a escolher o corpo pineal como o lócus de toda a atividade espiritual e mental. Essa opção, segundo Parent (2009), deveu-se à pineal ser um órgão ímpar se comparado as outras estruturas cerebrais que são bilaterais.

Outra contribuição repousou sobre as hipóteses do médico inglês Thomas Willis (1621-1675) que atribuiu diferentes funções e áreas cerebrais, a anatomofisiologia do encéfalo, tais como: *córtex* – centro da memória; *substância branca* – centro da imaginação; *estruturas internas* – centro da percepção e do movimento.

Ainda em Parent (2009), foi possível verificar que além dos investimentos anteriores e, em meio à maratona que percorreu o século XVIII, para crivar a ideia atrelada aos espíritos animais, o médico italiano Luigi Galvani (1737-1798) conseguiu desmontá-la provando a natureza elétrica conduzida pela transmissão nervosa.

Chegando nesse ponto, cabe interpolar à digressão histórica de Parent (2009) sobre a tríade mente-corpo-alma, a afirmação de Cosenza *et al* (2011, p. 17) de que o cérebro foi *"[...] consolidado como o órgão responsável pelos processos mentais e pelos comportamentos"*. Tal afirmação mobilizou no século XIX, os esforços do fundador da Frenologia, o médico

anatomista alemão, Franz Joseph Gall (1758-1828), cujo objetivo foi investigar o formato da caixa craniana e criar um mapa sobre a localização das funções mentais.

No entanto, apesar de ter gozado de grande reputação durante o século XIX, a Frenologia de Gall foi rechaçada pela comunidade científica da época, que se encarregou por demonstrar falhas em quase todas as hipóteses constituídas pelo pesquisador alemão. (PARENT, 2009, p. 143)

O pêndulo da história mostra como os fisiologistas perdem terreno para os localizacionistas e vice-versa e, entre os anos de 1861 e 1863, o cientista, médico, anatomista e antropólogo francês, Paulo Pierre Broca (1824-1880), divulgou para a Sociedade Parisiense de Antropologia uma síndrome que ficou conhecida como *afasia de Broca*. Conforme explica Parent (2009), Broca analisou nove pacientes vítimas de lesões cerebrais nos lobos frontais do hemisfério cerebral esquerdo, cuja principal característica era o comprometimento total na produção da fala e relativa preservação da compreensão da linguagem. Essa área cerebral passou a ser conhecida como área de Broca.

Posteriormente, a Broca, Parent (2009) considera que outro marco significativo no estudo do cérebro é conferido ao neurologista alemão Carl Wernicke (1848-1904) que descobriu pacientes com dificuldade de compreensão da linguagem – afasia de Wernicke – associada a uma lesão no córtex temporal esquerdo. Essa descoberta impulsionou ainda mais as suspeitas de que existem no cérebro diversos centros funcionais, sendo cada um deles responsáveis por uma função cognitiva (mental) específica.

Na contramão das evidências de Broca e Wernicke, os anos iniciais da idade contemporânea são marcados por dados desanimadores, consensual entre os cientistas localizacionistas, salienta Parent (2009), em relação à localização das funções cognitivas, como a memória, em regiões cerebrais circunscritas.

Conforme Cosenza *et al* (2011) decorreu nos anos finais de 1940 a denominação de “organização cerebral”, cunhada por Walter Hess (1881-1973), em vez de “centros nervosos”. Essa conclusão permitiu, na mesma época, que os estudos de James Papez (1883-1958) e Paul MacLean (1913-d.a.), redimensionassem o conceito de “sistema límbico” como um conjunto organizado de

estruturas cerebrais interconectadas para a realização de atividades mais complexas, tais como, as funções emocionais, memória e aprendizagem. (COSENZA *et al*, 2011).

Segundo Parent (2009), outro marco notório na literatura dos anos de 1950, foi à descoberta do neurocirurgião norte americano Willian Scoville (1906-1984) por meio do paciente "H.M.", cuja remoção bilateral do hipocampo e das amígdalas para tratamento de epilepsia, resultou na incapacidade total de aprender novas informações. Com efeito, Cosenza *et al* (2011, p. 18), afirma categoricamente: *"fica claro que processos mentais importantes, como aprendizagem e memória, dependem da integridade de centros nervosos específicos e suas conexões".*

Atualmente, a criação e o aprimoramento das técnicas de neuroimagem permitiram a confirmação de fatos, até então, aceitos pelas comunidades de neurocientistas do mundo inteiro. Tais técnicas acrescentam, conforme Cosenza *et al* (2011, p. 19), *"novas evidências que ampliam extraordinariamente as possibilidades de correlação entre as funções cognitivas e o funcionamento cerebral."*

Rudimentos dessas evidências teriam sido antecipados, segundo postula Parent (2009), pelo neuropsicólogo soviético Aleksander Luria (1902-1977), que em sua época, discordava parcialmente, dos localizacionistas, cunhando, dessa forma, a perspectiva dos "sistemas funcionais", cujo termo "função" foi interpretado como um novo conceito, admitindo-se que o sistema nervoso central está organizado em rede e participa ativamente, nas funções cognitivas superiores. Os sistemas funcionais criados por Luria (1980) objetivam a execução de uma determinada tarefa, de forma que, explica Cosenza *et al* (2011, p. 19), as *"funções mais elementares poderiam ser localizadas, mas os processos mentais geralmente envolvem zonas ou sistemas que atuam em conjunto, embora se situem, frequentemente, em áreas distintas e distantes do cérebro".*

A proposta de Luria analisou o cérebro, considerando três grandes sistemas funcionais, conhecidos como unidades funcionais, conforme o quadro abaixo:

Quadro 23

Sistemas Funcionais de Luria

Sistemas Funcionais		
Unidade I	Unidade II	Unidade III
É responsável por regular o tônus cortical, a vigília e os estados mentais. Constitui-se pela formação reticular e pelo tronco encefálico.	É responsável por receber, processar e armazenar as informações que chegam do meio ambiente externo e interno. Está situado em áreas do córtex localizadas depois do sulco central (lobo parietal, occipital e temporal).	É responsável por programar, regular e verificar as estratégias comportamentais, bem como a atividade mental. Está localizado em partes anteriores do cérebro, organizado hierarquicamente, em subníveis corticais.

Fonte: acervos da pesquisa.

De acordo com Cosenza *et al* (2011), o trabalho de Luria inclui uma bateria completa de testes, para o exame neuropsicológico das funções cognitivas, muito utilizada em meados do século XX que, atualmente, contribuiu para a derivação de outras.

Ademais, nessa breve retrospectiva histórica, tem-se consciência que muitas lacunas impediram que fossem “encaixadas” todas as peças do “quebra-cabeça” da história do cérebro. Mas, mesmo considerando toda a literatura, seria uma missão quase impossível, inserir nessa pesquisa de tese tais preocupações, sobretudo, porque não se objetivou pormenorizar essa história, mas, tão somente, considerá-la como pano de fundo que permitisse aos futuros leitores interessados na compreensão das justificativas da articulação, entre a Didática da Matemática e Neurociência Cognitiva.

3.2.1.2 – Definições, classificações e princípios relacionados.

Ao longo da literatura relacionada ao estudo da mente, do cérebro, do comportamento, várias são as denominações utilizadas pelos autores Luria (1980), Kandel (1991), Gazzaniga (2006) e Lent (2002, 2008). Muitos deles partem de suas áreas de pesquisa e inserem nomenclaturas próximas ao objeto analisado, causando nos leitores algumas dúvidas, que podem contribuir para a deturpação, confusão ou total incompreensão do que se pretende anunciar. Dentre elas, é comum encontrar a terminologia Neurociências ou Neurociência, Neurociências

Cognitivas ou Neurociência Cognitiva, Neuropsicologia ou Neuropsicologia Cognitiva, etc.

Dessa forma, o objetivo desse subitem é, inicialmente, mostrar um esboço dos ramos das ciências relacionadas ao estudo do cérebro, que serão organizados por meio das classificações encontradas na literatura e, em segundo plano, definir a área da Neurociência Cognitiva como um deles, seus princípios e limites.

Recorrendo aos fundamentos dos autores anteriormente citados, bem como de Parent (2009), Puves *et al* (2010), Antonio (2012), Miotto (2012) e Fonseca (2013a, 2013b), organizou-se o diagrama abaixo:

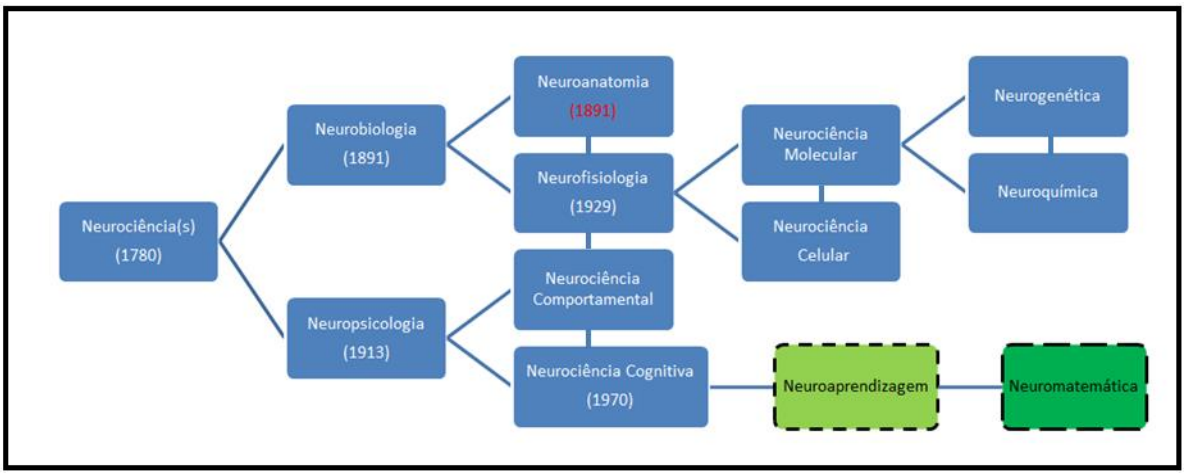


Figura 11 – Esquema das ramificações relacionadas ao estudo do cérebro.
Fonte: O autor (2015).

Essa ilustração permite perceber que a área das Neurociências configura-se como um campo histórico-multi-interdisciplinar e que, por esse motivo, os limites entre seus ramos não são nítidos, sendo o constante diálogo entre eles a própria fonte de sobrevivência. Autores como Kandel (1991) e Lent (2008), utilizam a denominação *Neurociência* como um campo do saber, que reúne um conjunto de disciplinas para estudar o sistema nervoso e as relações entre as funções cerebrais. Não muito distante, os pesquisadores Puves *et al* (2010) e Antonio (2012), optaram pela designação *Neurociências*, cujo objetivo é elencar questões que permitam compreender o desenvolvimento, organização e funcionamento do sistema nervoso humano e animal, para gerar comportamentos.

Como em uma espécie de hierarquia, a Neuropsicologia, citada pela primeira vez em 1913, conforme postula Miotto (2012, p. 3), *"é a área da psicologia e das neurociências que estuda as relações entre sistema nervoso central, o funcionamento cognitivo e o comportamento"*. No entanto, dada à necessidade e extensão das investigações acerca dos fenômenos associados à cognição e ao comportamento, segmentou-se este em dois outros: a *Neurociência Comportamental* que, de acordo com Lent (2002), investiga áreas do sistema nervoso relacionadas no controle do sono, sexo, emoções, etc.; e, a *Neurociência Cognitiva* que, segundo Gazzaniga (2006) e Sternberg (2010), busca compreender as capacidades cerebrais mais complexas como a cognição, linguagem, memória e aprendizagem.

Por fim, mais recentemente, cursos de especialização lato sensu em *Neuroaprendizagem*, conforme Fonseca (2013b) e Maluf (2011) iniciam um movimento, ainda mais específico, para abordar o fenômeno da aprendizagem priorizando a abordagem neurobiológica. Com efeito, o mesmo pesquisador, Fonseca (2013b) publica um artigo mencionando em seu título o termo *Neuromatemática*[28]*,* como uma forma mais contemporânea de analisar o fenômeno das Dificuldades de Aprendizagem Matemática (DAM).

Dentro deste contexto, considerando os fundamentos de Luria (1980), Kandel (1991), Gazzaniga (2006), Lent (2008) e Willingham (2011), bem como os objetivos da Neurociência Cognitiva, serão evocados, rearranjados, pinçados e descritos os princípios[29] iniciais que constituem a base celular e molecular da cognição, seio do fenômeno aprendizagem. Dentre eles, tem-se:

P_1(NC) – A procura do cérebro por significado é inata.

P_2(NC) – A busca por significado acontece por padronização.

[28] Vale salientar que essa denominação também foi encontrada no volume nº 257 da revista Mente e Cérebro, quando Ribeiro (2014, p. 64) anuncia que *"CENTRO DE PESQUISA NA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO (USP) ESTUDA A NEUROMATEMÁTICA, CIÊNCIA QUE PRETENDE DESENVOLVER UMA TEORIA CAPAZ DE DESCREVER E PREDIZER INTERAÇÕES NEURONAIS".* Observa-se nesse contexto outro ponto de vista para a denominação em tela.

[29] Serão mencionados pela codificação P_n(NC), com n = 1, 2, 3, 4 e 5.

P_3(NC) – A padronização está submetida a toda fisiologia do cérebro, tendo as emoções importância crítica para a mesma e, consequentemente, para a nova aprendizagem.

P_4(NC) – A nova aprendizagem requer a sinfonia orquestrada das funções cognitivas: sensação, percepção, emoção, atenção, memória (MLP e MCP), funções executivas e aprendizagem.

P_5(NC) – A existência da Memória de Longo Prazo (MLP) é condição fundamental para conectar-se e alimentar a Memória de Trabalho (MT) ou Memória de Curto Prazo (MCP), onde ocorre a nova aprendizagem.

No próximo subitem, serão descritas as regiões de funcionamento do cérebro para que esses princípios possam se desenvolver.

3.2.1.3 – Arquitetura do cérebro: a neuroanatomofisiologia do encéfalo.

Universalmente (Figura 12), a compreensão do cérebro está submetida ao estudo global do Sistema Nervoso Central (SNC) e, de modo mais particular, a neuroanatomofisiologia do encéfalo que será dividida para efeitos didáticos em duas etapas: a neuroanatomia e a neurofisiologia. Dessa forma, o objetivo é descrever brevemente essas etapas de forma que seja possível compreender tal arquitetura a serviço da aprendizagem.

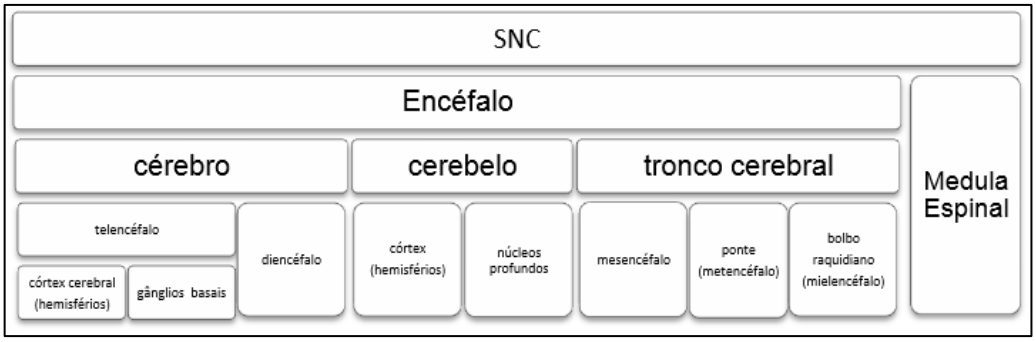


Figura 12 – Classificação anatômica básica do SNC.
Fonte: Lent (2008, p. 21)

Para melhor explicitá-las, as figuras abaixo mostram os detalhes em cortes sagitais “A” e “B”:

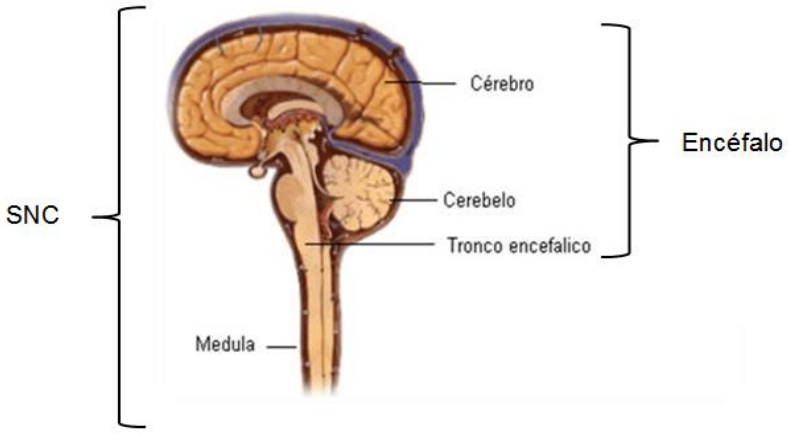


Figura 13 – Corte sagital “A”: SNC
Fonte: Adaptado de Lent (2008, p. 21)

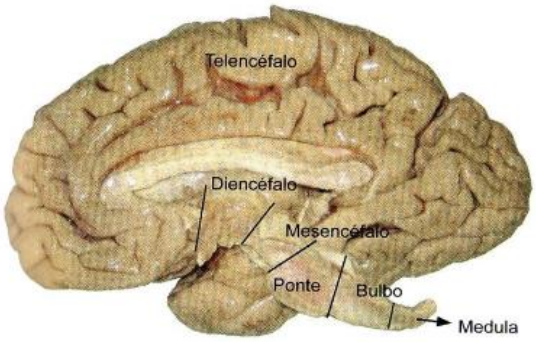


Figura 14 – Corte sagital “B”: face medial do hemisfério direito do cérebro (com cerebelo removido)
Fonte: Lent (2008, p. 25)

(a) A neuroanatomia do encéfalo:

Todas as informações aqui foram consideradas senso comum entre os neurocientistas do mundo inteiro e, nesse texto, sempre que forem retratadas estarão fundamentadas nas obras de Lent (2002; 2008), evitando-se assim, sempre que possível, a repetição exaustiva da referência.

Dessa forma, verificou-se que o componente do SNC denominado encéfalo (contido dentro do crânio) está subdivido em três partes

(Figura 12, Cf. p. 173): tronco encefálico ou cerebral, cerebelo e cérebro, bem como todas as suas principais subdivisões. Brevemente, são definidos como:

- **Tronco encefálico (cerebral)**: *"pequeno talo que une a medula espinhal com a parte mais rostral do SNC".* (LENT, 2008, p. 26)
- **Cerebelo**: *"[...] apresenta a substância cinzenta externamente, organizada em camadas celulares e chamadas córtex cerebelar [...] conecta-se ao encéfalo por meio de pedúnculos cerebelares".* (LENT, 2008, p. 28)
- **Cérebro**: é a parte mais desenvolvida do encéfalo e ocupa cerca de 80% da cavidade craniana, sendo formado por duas estruturas distintas: o *telencéfalo* e o *diencéfalo*. Essas precisam ser mais detalhadamente compreendidas, pois será a partir delas que se analisará a cognição e a aprendizagem.

O *telencéfalo* (Figura 14, Cf. p. 174) está dividido em dois hemisférios cerebrais bastante desenvolvidos e constituídos por giros e sulcos que abrigam os centros motores, sensitivos e cognitivos. Estruturalmente, o telencéfalo é formado pelo córtex cerebral e núcleos da base.

Conforme Lent (2008, p. 30), *"os núcleos da base são um conjunto de estruturas de substância cinzenta que se posicionam entre o diencéfalo, posterior e medialmente, e o córtex cerebral, anterior e lateralmente".* Dentre eles, destacam-se, principalmente, o núcleo caldado e o núcleo putâmen. Esses núcleos participam da coordenação de movimentos, juntamente com o cerebelo e o córtex cerebral que para Lent (2008), representa a parte mais importante do telencéfalo, sobretudo, pela diversidade e pela complexidade das funções que realiza.

Esse mesmo pesquisador descreve que o córtex cerebral é formado por uma espessa capa de corpos de neurônios que reveste todo o telencéfalo perifericamente, distribuindo-se ao longo dos dois hemisférios: direito (não verbal) e esquerdo (verbal). Esses neurônios corticais estão arranjados em camadas e, a depender de sua localização no telencéfalo, são responsáveis pela motricidade, sensibilidade, linguagem (parte motora e compreensão), memória, entre outras

funções cognitivas. Cada hemisfério é constituído de cinco lobos: Frontal, Parietal, Temporal, Occipital e Lobo da ínsula. Vale salientar que essas subdivisões são meramente anatômicas e foram atribuídas de acordo com a relação da respectiva região do telencéfalo com os ossos do crânio. (LENT, 2002, 2008).

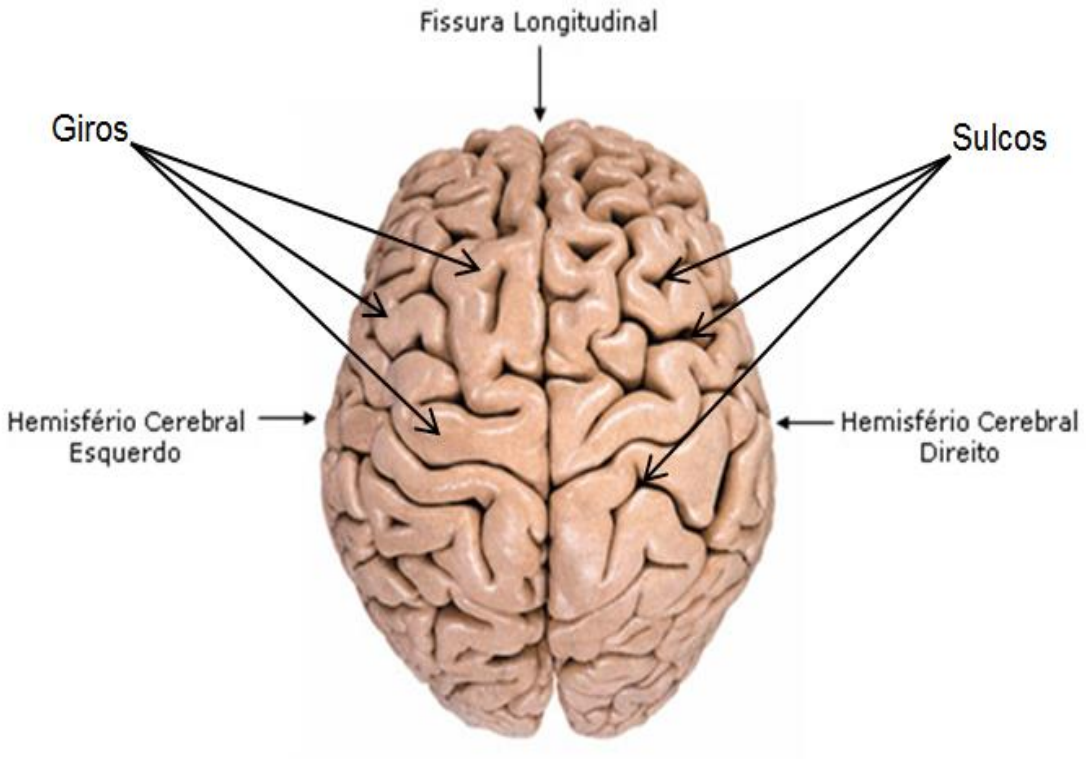


Figura 15 – Vista superior de um telencéfalo humano.
Fonte: Adaptado de Lent (2008, p. 21)

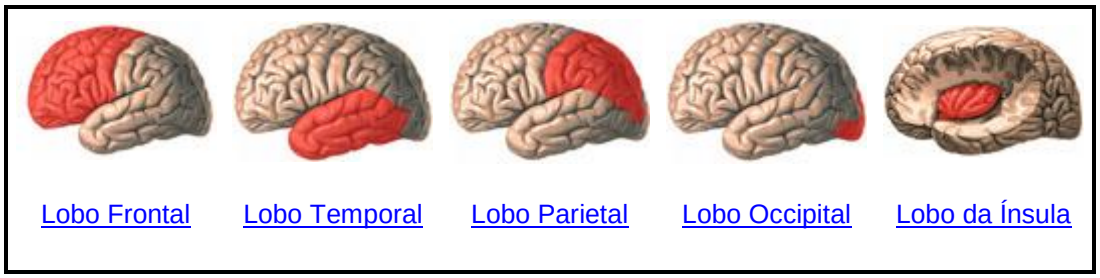


Figura 16 – Vistas dos cinco Lobos
Fonte: Lent (2002, p. 25)

O *diencéfalo* (Figuras 17A e 17B) é uma estrutura ímpar localizada na porção mais inferior do cérebro que corresponde à transição entre o tronco

encefálico e o telencéfalo. Está subdividido nas seguintes partes: tálamo, hipotálamo, epitálamo e subtálamo.

Segundo Lent (2008), a maioria dessas subestruturas são sensoriais (visão, audição, sensibilidade corporal), outros são motores e, por fim, outros participam do **sistema límbico**, responsável pelo *centro das emoções*.

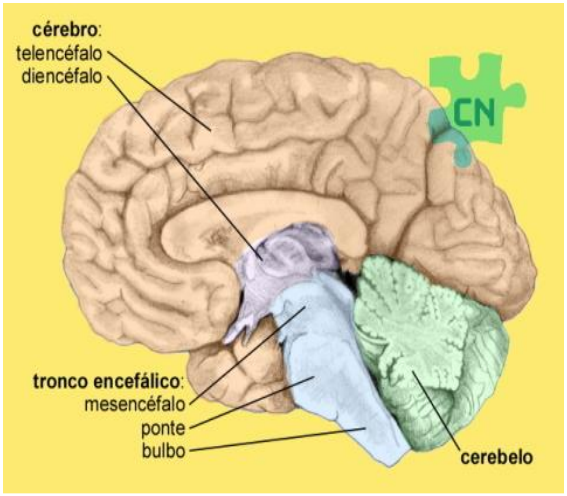


Figura 17A – Vista sagital de um encéfalo.

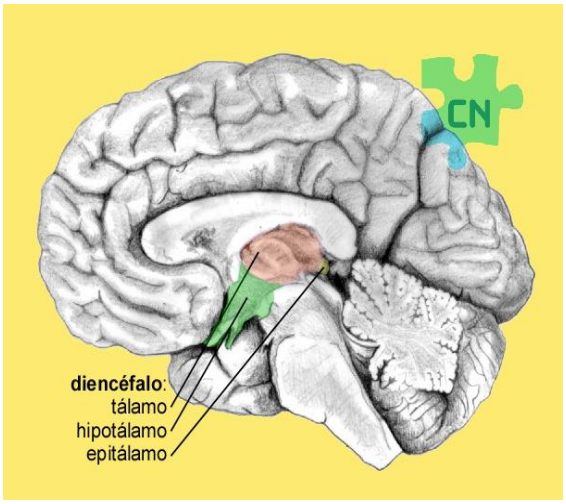


Figura 17B – Vista sagital de um diencéfalo.

Fonte: Carter (2012, p. 66)

Cumprida essa etapa, pode-se agora, referir-se a um esquema básico do cérebro para compreendermos, no próximo tópico, o seu funcionamento.

(b) A neurofisiologia do encéfalo:

Conforme Parent (2009), a neurofisiologia resultou das contribuições da fisiologia para se especializar, desde 1929, no funcionamento do sistema nervoso. Rapidamente, será descrito, a partir de Kandel (1991) e Lent (2008), as principais funções das estruturas que compõem o encéfalo (Figura 17A), a saber:

- **No Tronco encefálico (cerebral)**:

- O *bulbo*, *"contém diversos centros responsáveis por funções autônomas vitais, tais como digestão, respiração e controle da frequência cardíaca." (ibidem*, 1991, p. 8).

- A *ponte*, *"transmite informações do cérebro para o cerebelo" (ibidem*, 1991, p. 8).

- O *mesencéfalo*, *"controla muitas funções sensoriais e motoras, incluindo os movimentos oculares e a coordenação dos reflexos visuais e auditivos"*. *(ibidem*, 1991, p. 8).

- **Cerebelo**: *"modula a força e o alcance do movimento e participa do aprendizado de habilidades motoras". (ibidem*, 1991, p. 8).
- **Cérebro**:

  - O *telencéfalo*, sendo o córtex cerebral, a sua parte mais importante, *"interpreta as informações sensoriais gerando as percepções de que somos capazes [...]. É no córtex que se situam muitos dos 'arquivos' da memória, e é ele que nos possibilita focalizar a atenção [...] são inúmeras funções atribuídas ao córtex cerebral humano."* (LENT, 2008, p. 32)

  - O *diencéfalo*, é compreendido a partir de duas principais estruturas: o **tálamo** que *"processa a maior parte da informação que chega ao córtex cerebral, vinda do resto do sistema nervoso central* [e o **hipotálamo** que] *regula as funções autônomas, endócrinas e viscerais"* (KANDEL, 1991, p. 8).

A figura a seguir mostra um resumo das principais funções do cérebro:

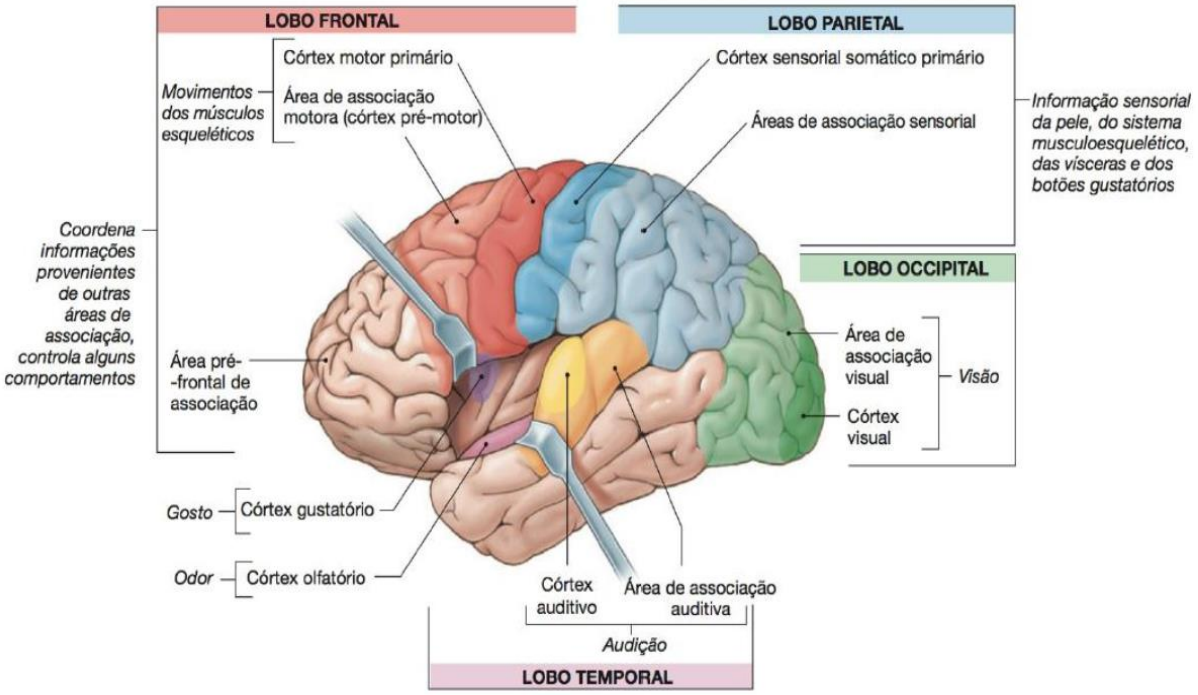


Figura 18 – Vista sagital da anatomofisiologia parcial do cérebro.
Fonte: Carter (2012, p. 150)

Postos, de forma breve, o esquema e o funcionamento do encéfalo, será descrito a seguir, como a informação é adquirida e processada pelo cérebro.

3.2.1.4 – Mecanismo cerebral de aquisição da informação.

Os cientistas neurocognitivos codificaram que o mecanismo de aquisição da informação pressupõe a seguinte hierarquia*: sensibilização, identificação, seleção, captação, (de)codificação, avaliação, processamento/transformação, compreensão, armazenamento e, quando necessário, evocação* pelo cérebro. (KANDEL, 1991).

Para Willingham (2011), tal mecanismo pode ser compreendido por meio do funcionamento do *pensamento* ou, em outras palavras, da Memória de Trabalho (MT) – lugar da consciência e do pensamento, também conhecida como Memória de Curto Prazo (MCP). A ilustração da Figura 18, além de esboçar a discussão inicial do capítulo I, sobre a comunicação interativa, contínua e dinâmica entre os ambientes “meio externo” e “meio interno”, permite também uma primeira visualização do fluxo e da arquitetura cerebral da informação.

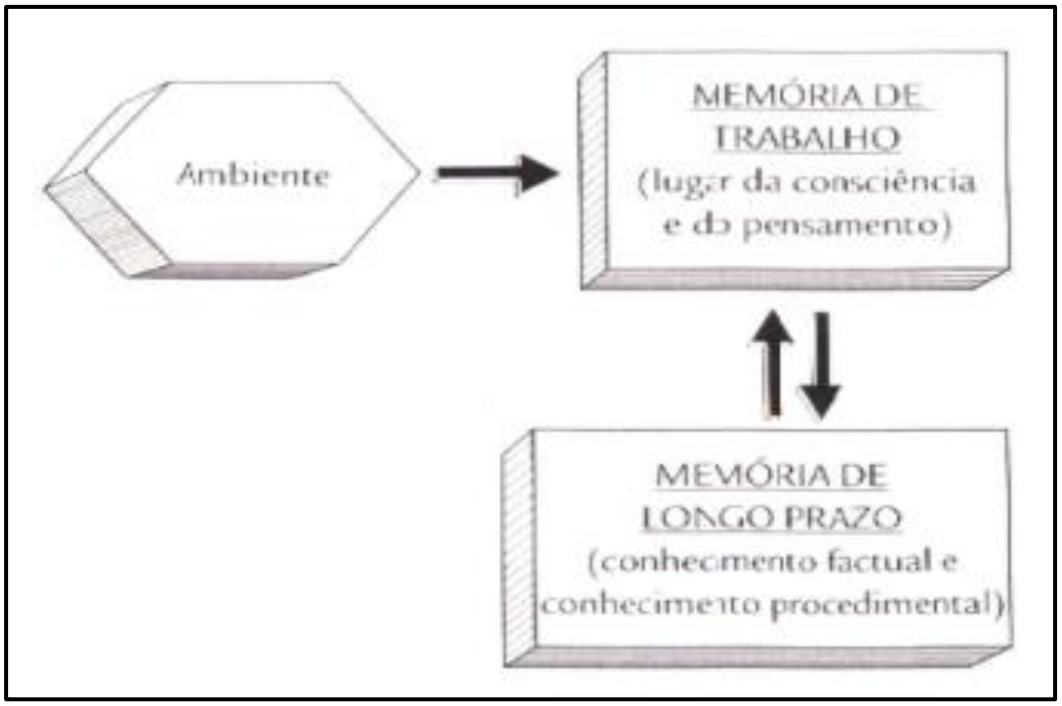


Figura 19 – Modelo simplificado do fluxo e da arquitetura cerebral da aquisição da informação.

Fonte: Willingham (2011, p. 24)

No entanto, segundo Willingham (2011, p. 28),

> [...] um pensamento bem-sucedido depende de quatro fatores: **informação do ambiente, fatos na memória de longo prazo, procedimentos na memória de longo prazo e quantidade de espaço na memória de trabalho**. Se qualquer um desses fatores for inadequado, o raciocínio será provavelmente falho[30]. (grifos da pesquisa).

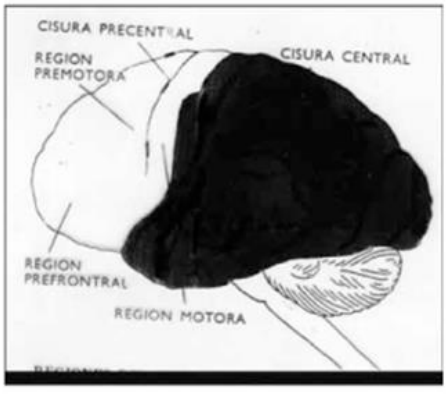
Com o objetivo de compreender o modelo da figura acima, recorreu-se a descrição da neuroanatomofisiologia dos Sistemas Funcionais de Luria sintetizados no Quadro 23 (Cf. p. 171):

[30] Tais fatores podem ser associados às condições da TAS de Ausubel (1982).

SUBSTRATO = SUBSTÂNCIA RETICULADA E CEREBELO

- A função de alerta consiste na atividade que ocorre dentro do cérebro e que é responsável pela manutenção de um estado de vigilância.
- A atenção está interligada com o hipotálamo, que mantém o nível ótimo do metabolismo fisiológico (por exemplo, bem estar, fadiga, motivação), componente crucial no desempenho de qualquer atividade.
- A mesma função está relacionada com o reflexo de orientação que emerge no confronto com um novo estímulo (sistema de alarme).
- A função de alerta estreitamente relacionada com a atenção gera o tônus postural e cortical, mas a atenção envolve a seletividade e a sustentação modulada das atividades cognitivas superiores.
- Alerta e atenção são funcionalmente interdependentes, selecionam, filtram, focalizam, alocam e refinam a integração de estímulos.
- A sua disfunção pode gerar hiperatividade, implicando problemas de processamento (percepção + memória) e de planificação.

Figura 20 – **Unidade I**: *Alerta e Atenção*
Fonte: Fonseca (2001, p. 38)



SUBSTRATO = LOBOS OCCIPITAL, TEMPORAL E PARIETAL

- O termo codificação refere-se à análise, síntese, armazenamento e recuperação da informação, envolvendo a significação e a relação com a base de dados já integrada no cérebro.
- A informação é codificação de duas formas: simultânea e sucessiva (sequencial).
- O processamento simultâneo ocorre quando a informação é sintetizada, em unidades espaciais ou relacionais, por exemplo, quando todas as partes surgem ao mesmo tempo (por exemplo, figura/imagem). Em contrapartida, o processamento sucessivo ocorre quando a informação é fornecida em uma unidade de cada vez (por exemplo, número de telefone, ditado). Aqui o cérebro segura ativamente cada elemento, até que todos os outros sejam apresentados, no fim do qual emerge o seu significado.
- Ambos os processos envolvem complexas desconstruções e reconstruções, e ambos estão envolvidos nas atividades cognitivas mais complexas (por exemplo, leitura).
- O processamento da informação, quer no seu conteúdo (verbal/não-verbal), nas suas modalidades (V+A+TQ), quer nos seus níveis (percepção + simbolização + + conceptualização), requer a combinação sistêmica dos dois tipos de processamento (Cognição = processamento simultâneo + processamento sucessivo).

Figura 21 – **Unidade II**: *Codificação*
Fonte: Fonseca (2001, p. 41)

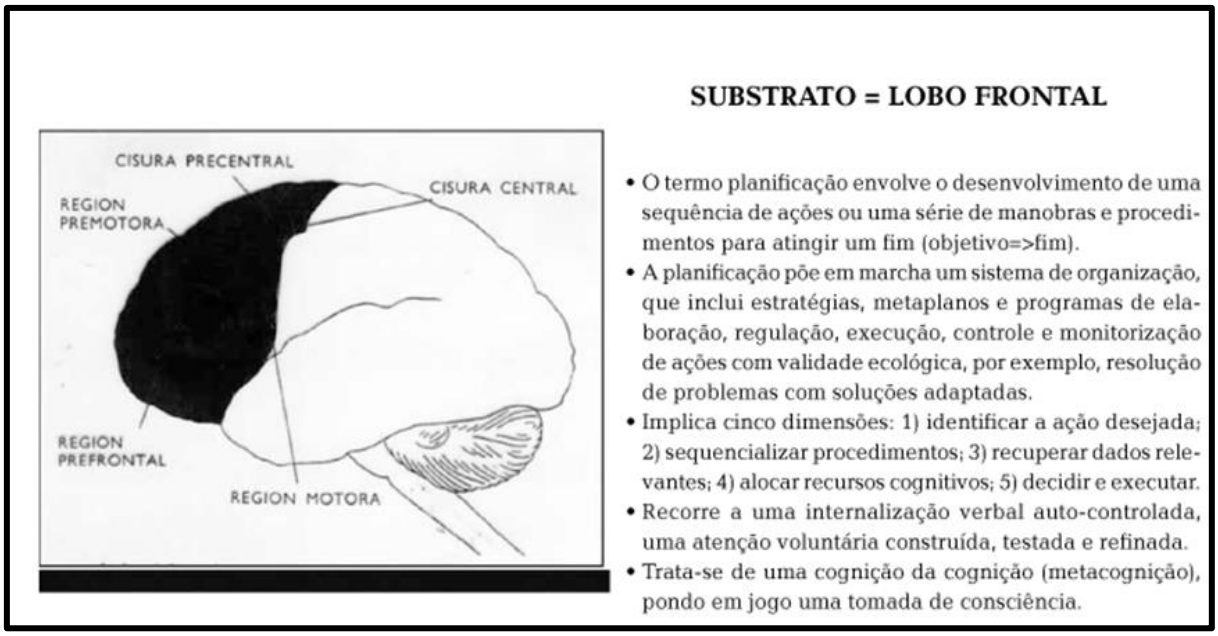


Figura 22 – **Unidade III**: *Planificação.*
Fonte: Fonseca (2001, p. 43)

Esse fluxo esboçado por Fonseca (2001) permite compreender a constituição da cognição humana, como um processo (etapa por etapa) de aquisição de um conhecimento. Tais etapas foram ainda representadas pelo referido pesquisador na figura abaixo:

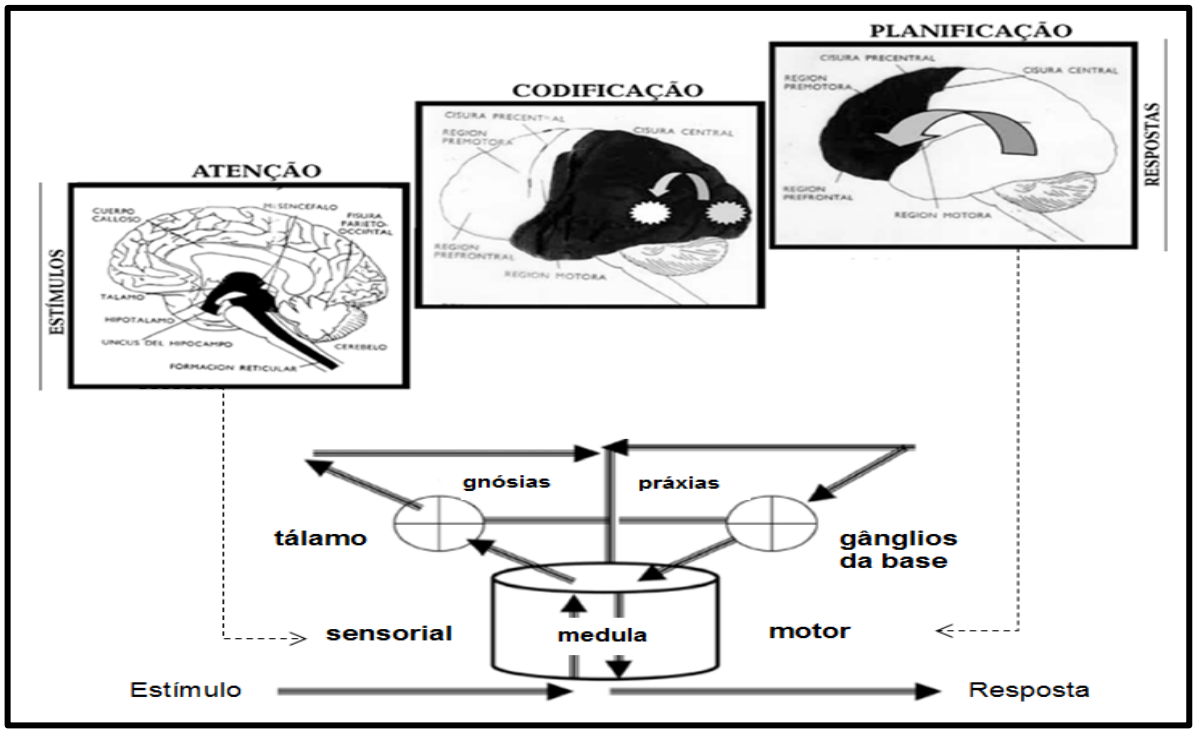


Figura 23 – Arquitetura da anatomofisiologia neurocognitiva.
Fonte: Adaptado de Fonseca (2001, p. 47)

Nessa perspectiva, Sternberg (2010), define a cognição humana como a forma que as pessoas pensam e, por esse motivo, interessa também à Neurociência Cognitiva, conforme defende Willingham (2011), compreender *o como* (local e mecanismo) e *o porquê* do pensamento (estímulos e motivações), já que é por meio dele que se produz o raciocínio lógico-matemático, inclusive. Pelo exposto, ambos os autores, conferem ao cérebro a máxima: *órgão supremo da cognição*.

Os cientistas neurocognitivos, segundo Sternberg (2010), consideram a pesquisa básica ou basal (neurobiomolecular) sobre as funções cognitivas fundamentais, para alimentar outros ramos da Neurociência (a pesquisa aplicada), bem como para analisar como e porque pensamos. Dessa forma, o questionamento de Sternberg (2010, p. 38), *"quais são as estruturas e os processos* [e funções] *do cérebro humano que estão por trás das estruturas e dos processos da cognição humana?"*, orienta a presente investigação, a posicionar suas lentes sobre as bases moleculares da aprendizagem (Matemática), explorando dessa forma o invisível, a química cerebral.

No próximo tópico, ponto máximo das contribuições da Neurociência Cognitiva, para articulação com a Didática da Matemática, objetiva-se compreender sobre as principais funções cognitivas, que participam do processo e desenvolvimento da Aprendizagem Matemática. Para tanto, será tratado de suas denominações e, também, de todos os elementos participantes, tais como: nomenclatura dessas funções, neurônios, sinapses e os neurotransmissores relacionados.

3.2.2 – Abordagem das Funções Cognitivas – AFC

É comum ouvir, em qualquer ocasião que requisite um indivíduo aprender sobre um determinado tema, a solicitação ou orientação: *"preste ATENÇÃO"!* Paralelamente e, geralmente, o "instrutor", "facilitador" ou "professor", também faz considerações sobre experiências anteriores do indivíduo que, em outras palavras, podem ser compreendidas como *conhecimentos prévios* (factual e procedimental) "armazenados" na MLP, caso existam.

A esse respeito, a ampliação do modelo de Willingham (2011) apresentado anteriormente, permite introduzir a AFC.

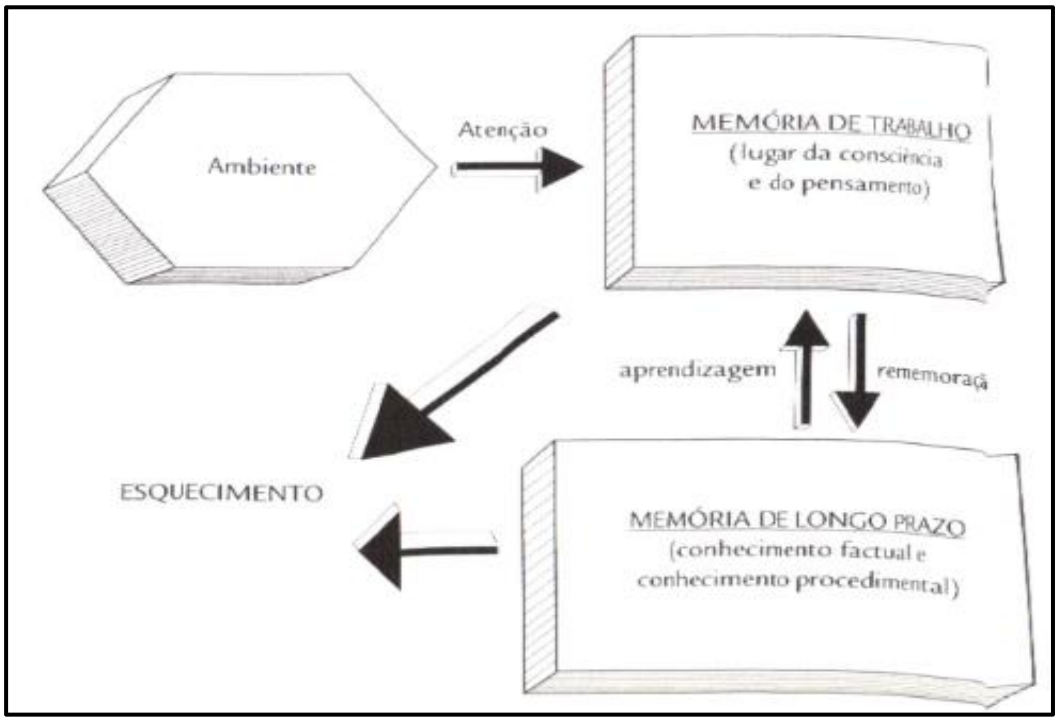


Figura 24 – Modelo ampliado do fluxo e da arquitetura cerebral da aquisição da informação.

Fonte: Willingham (2011, p. 59)

Com efeito, residem em Luria (1980), a partir da concepção de seus sistemas funcionais, as primeiras referências às funções cognitivas participantes da formação do pensamento e do processo de aprendizagem – atenção, percepção e memória, avaliadas pela bateria de testes (tarefas) neuropsicológicos produzidos

pelo próprio autor. Nesse sentido, a pesquisadora Davidoff (2001, p. 46), denominou-as de *“bases neuropsicológicas da Aprendizagem”.*

Entretanto, a contínua investigação científica sobre essas primeiras funções cognitivas, detectou e integrou às mesmas, conforme resultados das investigações em Kandel (1991), LeDoux (2001), Gazzaniga (2006), Lent (2002, 2008), Malloy-Diniz *et al* (2008) e Willingham (2011), um rol de outras funções cognitivas, passíveis de serem analisadas e avaliadas por meio de baterias de testes neuropsicológicos.

Um panorama atualizado de tais funções pode ser encontrado no trabalho de Fonseca (2013a) que levou em consideração os testes neuropsicológicos disponíveis, selecionando-os e estabelecendo as articulações entre as funções cognitivas e as habilidades matemáticas, relacionadas às áreas de aritmética, álgebra e geometria.

Quadro 1: Articulações entre as Funções Cognitivas e as Habilidades Matemáticas **a partir de Testes Neuropsicológicos Selecionados**

FUNÇÕES COGNITIVAS	HABILIDADE MATEMÁTICA	Testes Neuropsicológicos Selecionados	Objetivo dos Testes Selecionados
Sensação	**Aritmética**	Testes de sensação tátil e visual.	Avaliar o grau de qualidade dos canais de entrada (sensíveis) aos variados tipos de estímulos. (MOMO, SILVESTRE E GRACIANI, 2011)
	Álgebra		
	Geometria		
Percepção	**Aritmética**	Completar figuras; Columbia.	Avaliar a capacidade de identificar e isolar as características essenciais das não essenciais em objetos familiares. (CHIODI e WECHSLER, 2009, p. 316)
	Álgebra		
	Geometria		
Emoção	**Aritmética**	Inventário de Ansiedade de Beck.	Avaliar o estado emocional por meio dos sintomas característicos da ansiedade. (MONTIEL *et al.*, 2009, p. 130)
	Álgebra		
	Geometria		
Atenção	**Aritmética**	Teste de cancelamento; *Stroop*; Teste de Labirinto; D2; TECON.	Verificar diferentes aspectos da atenção, tais como seletividade visual com velocidade rápida em uma tarefa de resposta motora repetitiva. (MONTIEL e SEABRA, 2009, p. 115)
	Álgebra		
	Geometria		
Memória	**Aritmética**	Dígitos; Blocos de Corsi; Matriz de Pontos.	Avaliar memória de curto prazo ou memória operacional. (MIOTTO, LUCIA e SCAFF, 2012, p. 14)
	Álgebra		
	Geometria		
Funções Executivas	**Aritmética**	Wisconsin; Token Test; Trilhas.	Avaliar a flexibilidade cognitiva. (SEABRA, ASSEF e COZZA 2009, p. 88)
	Álgebra		
	Geometria		

Figura 25 – Principais Funções Cognitivas articuladas às Habilidades Matemáticas.

Fonte: Fonseca (2013a, p. 31)

A contínua investigação de Willingham (2011), mesmo tendo referenciado as funções cognitivas *atenção*[31] e *MLP,* importantes para a ocorrência da aprendizagem, ratifica os estudos de LeDoux (2001) sobre a importância da emoção nesse processo, destacando em sua obra que *"lembramos de coisas que causam*

[31] Tanto os estudos de Knudsen (2007) quantos os de Lezak *et al* (1976), reforçam o modelo de Willingham (2011) da Figura 23, pois demonstraram que a *atenção* como uma função cognitiva possibilita o acesso da informação "externa" à MCP (ou Memória Operacional), gerando respostas rápidas e adequadas.

alguma reação emocional." (WILLINGHAM, 2011, p. 61). Diante desses achados, já se torna possível fazer um esboço parcial do fluxo das funções cognitivas ou circuitaria das funções cognitivas:

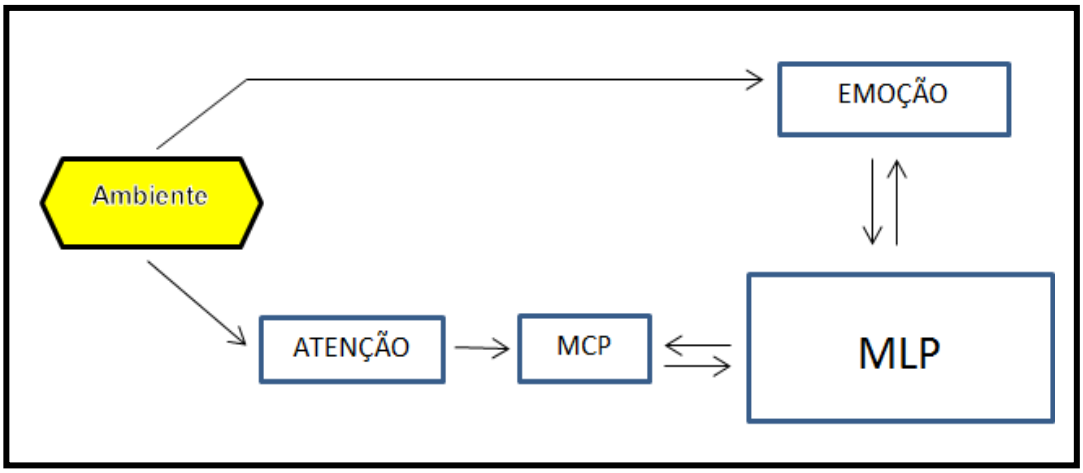


Figura 26 – Esboço parcial do fluxo das Funções Cognitivas.
Fonte: O autor (2015).

Ainda assim, para que essa circuitaria possa ser concluída faz-se necessário observar que, desde a Figura 19 (Cf. p. 180) o contato inicial com o meio externo se dá pelas vias ou órgãos sensoriais, componentes do sistema somestésico: visão, audição, olfato, paladar e tato. Nesse momento, conforme postula LeDoux (2001), a estimulação de um ou mais desses órgãos do sentido mobiliza outra função cognitiva – a percepção, responsável pela decodificação e interpretação dos fatos que, amalgamada à emoção, responsável pela classificação do sentido (sentimento positivo, neutro ou negativo), enviam uma mensagem para que o sistema atencional seja ativado.

Contempladas as duas primeiras unidades funcionais de Luira (1980), precisa o cérebro, emitir os resultados dos seus pensamentos, transformando-os em comportamentos. Para dar cabo dessa tarefa, encontra-se no lobo frontal, área da planificação, capacidades cognitivas denominadas de funções executivas que responderam pela penúltima função cognitiva. Lent (2008, p. 289), define-as como sendo *"o conjunto de operações mentais que organizam e direcionam os diversos domínios cognitivos categoriais para que funcionem de maneira biologicamente adaptativa"*.

Contudo, observou-se na literatura, que não existe um consenso entre os pesquisadores, relativo aos componentes desse conjunto. Porém, conforme defende Malloy-Diniz *et al* (2008), é coerente preservar a lista que circula nas referências dos especialistas do assunto, como por exemplo, Lezak *et al* (1976), Gazzaniga (2006), Lent (2008), Malloy-Diniz *et al* (2008) e Miotto (2012). Nesse sentido, pode-se decompor as funções executivas em: planejamento, controle inibitório, tomada de decisões (julgamento), flexibilidade cognitiva, memória operacional, categorização e fluência.

Por fim, em Kandel (1991) e, mais recentemente em Izquierdo (2011) e Willingham (2011), entendeu-se à atribuição da aprendizagem (Ap) como o alicerce de todas as funções cognitivas. Nesses termos, salienta Willingham (2011, p. 65) que *"o conteúdo a ser aprendido (isto é, a ser armazenado na memória de longo prazo), precisa passar algum período na memória de trabalho – ou seja, o aluno precisa prestar atenção".* Dessa forma, o incremento desse recorte consente redimensionar a circuitaria das funções cognitivas da Figura 25 (Cf.p. 186):

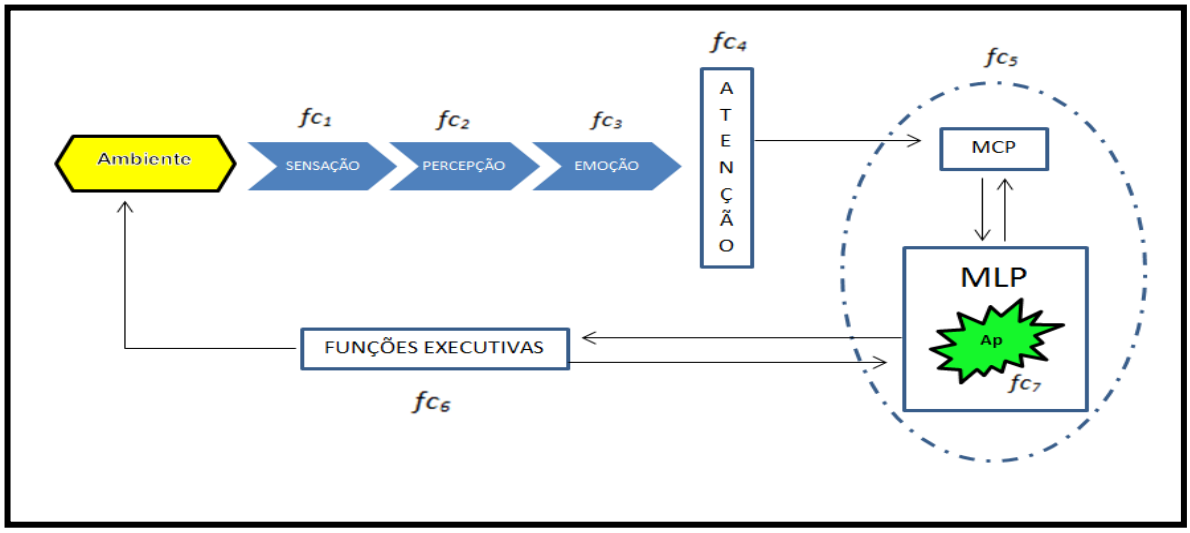


Figura 27 – Circuitaria das Funções Cognitivas.
Fonte: O autor (2015).

Entendendo a circuitaria da Figura 27 como modelo contemporâneo de aquisição da informação, faz-se necessário introduzir as noções de neuroquímicas para mostrar como essas funções se interligam e, dessa forma, como a informação é manipulada pelo cérebro. Isso permitirá as instituições escolares viabilizar e ressignificar alternativas pedagógicas, para que a *informação intencional* (as tarefas

de Chevallard, por exemplo) represente para o cérebro, analogamente falando, “um prato de comida para quem tem fome”.

A Figura 27 (Cf. p. 189) auxilia, por meio do binômio sensorial-motor, historicamente conhecido como estímulo-resposta, o alicerce da neuroquímica. Como células nervosas – que funcionam a base de estimulação – os neurônios (células especiais), descobertos por Waldeyer em 1891, juntamente com as células glias, compõem o tecido nervoso. Segundo Lent (2002, p. 4),

> O neurônio é a principal unidade sinalizadora do sistema nervoso e exerce as suas funções com a participação dos gliócitos. É uma célula cuja morfologia está adaptada para as funções de transmissão e processamento de sinais: tem muitos prolongamentos próximos ao corpo celular (os dendritos), que funcionam como antenas para os sinais de outros neurônios, e um prolongamento longo que leva as mensagens do neurônio para sítios distantes (o axônio).

Primordialmente, os neurônios podem ser classificados, a partir de suas funções, em três tipos: *sensitivo, interneurônio* e *motor*. Conforme o mesmo pesquisador, tais denominações foram atribuídas de acordo com as três funções básicas do SNC: *função sensitiva* – formada por um conjunto de nervos sensitivos (neurônios aferentes) responsáveis pela captação de informações do meio externo (e interno) do corpo, conduzindo-as ao SNC; *função integradora* – responsável por receber as informações dos neurônios aferentes e processá-las (interpretá-las); *função motora* – formada por nervos motores (neurônios eferentes) responsáveis pela condução da informação processada para os músculos e glândulas do corpo. (LENT, 2002). Na Figura 28, a seguir, identifica-se um neurônio e suas principais regiões.

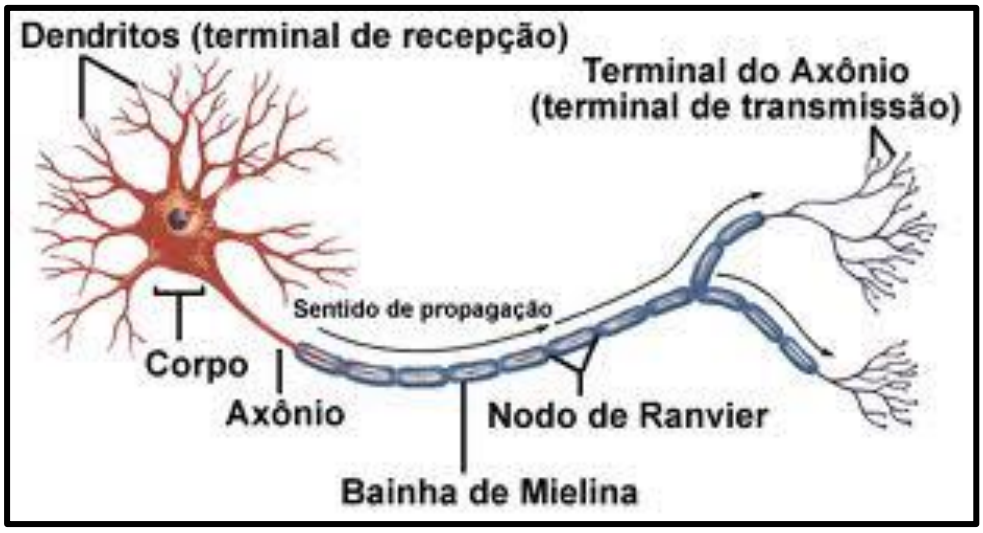


Figura 28 – Esquema de um neurônio.
Fonte: Gazzaniga (2006, p. 44)

De acordo com as suas respectivas funções, *dendritos* – responsáveis por receber estímulos, e os *axônios* – por gerar e conduzir o potencial de ação, juntos, promovem a comunicação neuroquímica entre todos os neurônios do corpo humano: *as sinapses*. Essas estruturas ou locais consistem em zonas de contato entre as células nervosas. Tanto para Lent (2002) como para outros autores, as sinapses funcionam como o *chip* do SNC, pois além de transmitir informações entre dois neurônios, podem modificá-las ou bloqueá-las.

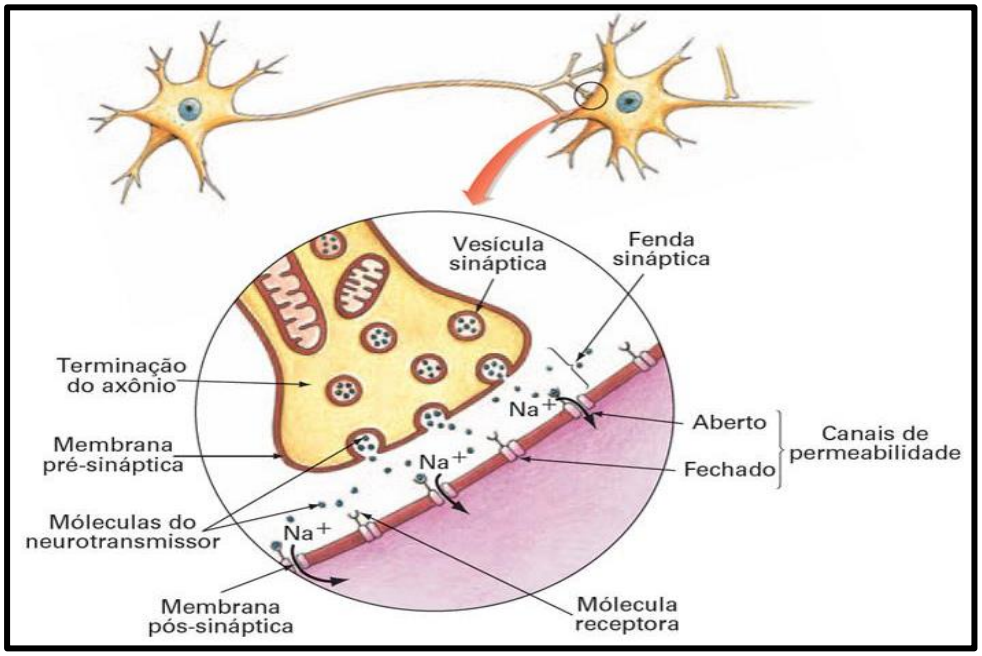


Figura 29 – Esquema da transmissão de um impulso nervoso (estímulo) através de uma sinapse química.
Fonte: Purves *et al* (2010 p. 89)

Como pode ser visto na figura acima, cada vesícula sináptica reúne uma quantidade (*quantum*) de neurotransmissores que são substâncias químicas ou moléculas transmissoras da informação que, segundo Lent (2002), também podem ser denominadas, de modo mais geral, como *neuromediadores,* apresentados na figura abaixo:

Neurotransmissores			*Neuromoduladores*		
Aminoácidos	*Aminas*	*Purinas*	*Peptídeos*	*Lipídios*	*Gases*
Ácido []-aminobutírico (GABA)	Acetilcolina (ACh)	Adenosina	Gastrinas: gastrina, colecistocinina (CCK)	Endocanabinoides: anandamida, 2-araquidonoilglicerol (2AG)	Óxido nítrico (NO)
Glutamato (Glu)	Adrenalina ou epinefrina	Trifosfato de adenosina (ATP)	Hormônios da neuro-hipófise: vasopressina, ocitocina		Monóxido de carbono (CO)
Glicina (Gly)	Dopamina (DA)		Insulinas		
Aspartato (Asp)	Histamina (H)		Opioides: encefalinas (Enk), endorfinas, dinorfinas, nociceptina		
	Noradrenalina ou norepinefrina (NA ou NE)		Secretinas: secretina, glucagon, peptídeo intestinal vasoativo (VIP)		
	Serotonina (5-HT)		Somatostatinas		
			Taquicininas: substância P (SP), substância K (SK)		

Figura 30 – Neuromediadores mais comuns.
Fonte: Lent (2002, p. 121)

Respeitando as suas ações funcionais, bem como seus fluxos e regiões neuroanatômicas, os neurotransmissores do grupo das aminas, tem maior participação na ativação e recuperação da circuitaria das funções cognitivas, sobretudo, para o alcance da função fc_7, a aprendizagem, caso haja o maior número de sinapses possível, bem como conhecimentos prévios armazenados na MLP. Conforme foram expostos no *Quadro 02* (Cf. p. 72), destacam-se a acetilcolina (ACh: $C_7H_{16}NO_2$), dopamina (DA: $C_8H_{11}NO_2$), noradenalina (NAD: $C_8H_{11}NO_3$) e serotonina (5-HT: $N_2OC_{10}H_{12}$).

Cabe ainda salientar que, conteúdo e contexto da “informação intencional”, primordialmente, a escolarizada, devem está contagiados de estímulos

ativadores (percursores) dessas substâncias, pois na sequência abaixo, conforme Kandel (1991), Lent (2002), Gazzaniga (2006), entre outros, são responsáveis por:

- *Serotonina* (5-HT: $N_2OC_{10}H_{12}$) – produção e manutenção do humor, atuando diretamente no sistema límbico (sensação, emoção), memória e aprendizagem. É conhecido como o neurotransmissor do prazer.
- *Acetilcolina* (ACh: $C_7H_{16}NO_2$) – controlar áreas cerebrais relacionadas à percepção, participando também da atenção, memória e aprendizagem. Pessoas com baixos níveis de ACh no córtex cerebral são prováveis portadoras da doença de Alzheimer.
- *Dopamina* (DA: $C_8H_{11}NO_2$) – atuar diretamente no sistema de recompensa (emoção), controle da estimulação, atenção e dos movimentos, participando também da aprendizagem.
- *Noradenalina* (NAD: $C_8H_{11}NO_3$) – induzir a excitação física e mental (funções executivas), além de participar do controle do humor.

Segundo esses cientistas, além da alimentação, as *fontes naturais* desses precursores são o equilíbrio do ciclo circadiano e a participação ativa (cognitivo-motora) em novas experiências. No caso escolar, a captação dos precursores por meio dessa última fonte pode ser contemplada caso o binômio *conteúdo-contexto* esteja imerso numa das abordagens da Didática da Matemática que, de forma generalizada, pode ser compreendida como *"resolução de problemas"* (ALMOULOUD, 2007).

Com efeito, levando em consideração a circuitaria das funções cognitivas da Figura 27 (Cf. p. 188), os neurotransmissores respectivamente associados e, também as orientações neurocientíficas para a captação dos precursores "supostamente disponíveis" nos meio ambiente externo, pode-se concluir que se faz necessário o *meio externo* (o meio didático, por exemplo) dispor das condições naturais, requisitadas pelo *meio interno* (o cérebro do aluno, por exemplo) para que este se interesse pela nova experiência, transformando-a em aprendizagem.

Dessa forma, salienta-se que o objetivo desse detalhamento, foi tão somente, justificar pelas vias biológicas (a neuroanatomofisiologia do cérebro) que – apesar de ainda não serem totalmente decodificadas, demonstram aos olhos do "instrutor", "facilitador", "professor" ou de qualquer pessoa que se "pré-disponha" a auxiliar na mobilização dessa função cognitiva fc_7, a aprendizagem –, é preciso que se tenha em mente a dimensão da complexidade e do esforço que irá dispensar, tanto para o *contexto* quanto para o *conteúdo* da informação intencional, sempre que tal tarefa for dirigida.

CAPÍTULO IV

História e epistemologia das Funções Trigonométricas: iluminação de rupturas nas transições entre os níveis de ensino.

Considerações Iniciais

O objetivo primordial desse capítulo foi desenvolver uma análise epistemológica das noções das Funções Trigonométricas. Esse intento é abrigado sob as justificativas dos achados de Artigue (2004) e Gueudet (2008a) que consideram imprescindível, tal procedimento para avaliar às análises institucionais, tendo em vista que os programas oficiais e os livros didáticos consideram a gênese e maturação das referidas noções para propor uma Organização Matemática adequada às expectativas institucionais existentes, inicialmente.

Nesse sentido, foram revisitados os estudos de Boyer (1974), Eves (1992, 1995), Kennedy (1992) e Lobo da Costa (1997), para constituírem o palco principal, onde a História da Matemática fosse investigada por lentes capazes de compreender a epistemologia das Funções Trigonométricas.

Agregou-se a esse estudo, os resultados das investigações científicas de Ripoll *et al* (2008), Nogueira (2009), Mendes *et al* (2011), Flood e Wilson (2013), Kemper (2007) e Faria (1987) que a todo o tempo fizeram referência, tanto à Trigonometria como as Funções Trigonométricas para justificar os investimentos ligados à Astronomia, principal motor do desenvolvimento científico desde os seus primórdios.

Com efeito, vale salientar que sob as lentes de Artigue (1996), uma análise epistemológica deve ser realizada buscando-se identificar o saber em jogo e, tomando-se essa orientação como fio condutor, priorizaram-se nessa investigação as seguintes questões: Como as noções das Funções Trigonométricas se desenvolveram? Que problemas, à época, os saberes a elas relacionados mobilizaram sua maturação? Quais as transições e rupturas podem ser identificadas?

Dessa forma, buscou-se desvelar e compreender os objetivos de elementos como tarefas e técnicas que estavam atrelados aos problemas que, em sua maioria, eram de natureza prática. Assim, essa atitude conduziu a presente análise à identificação de estágios, que puderam servir como apoio para iluminar e demarcar as transições e rupturas epistemológicas encontradas ao longo da história.

O trabalho foi concluído, apresentando-se um quadro de marcadores dessas transições e mostrando, inclusive, porque os documentos oficiais (programas e livros didáticos) são sujeitos do entendimento desses para atingirem as suas expectativas institucionais.

4.1 – Fundamentos Histórico-epistemológicos das Funções Trigonométricas:

Antes mesmo de iniciar a jornada pelos primórdios da História da Humanidade rumo à História da Matemática e, a partir dessa, mobilizar esforços para desvelar elementos históricos que se objetivam nesse capítulo, vale destacar que essa etapa da pesquisa não pretende aprofundar-se a esse respeito, vinculando-se discussões filosóficas. Mas, sobretudo, revisitar os primórdios da História da Trigonometria e das Funções Trigonométricas, na tentativa, principalmente, de compreender e mapear o seu desenvolvimento para, então, esboçar – a grafite – um esquema de suas transições e rupturas epistemológicas.

Nesse itinerário, sempre que foi possível recuar ao passado, encontrou-se na Matemática a fonte para que se possa compreender o princípio básico, norteador e estrutural da racionalidade humana, qualificando-a como a área do conhecimento das mais antigas de todos os tempos. Esse traço, permitiu considerá-la como base responsável pelo desenvolvimento de **técnicas e tecnologias** (constantes otimizações das técnicas) a serviço da resolução de problemas, absorvidos por outras áreas do conhecimento, razão pela qual, é tida como a serva e, ao mesmo tempo rainha, de todas as ciências.

Conforme Boyer (1974), até o século XVII, seu desenvolvimento sistematizado reuniu três de seus campos: Geometria, Aritmética e Álgebra. Nessa ordem, como a primeira delas, a Geometria, nasceu, foi apresenta e está posta em

toda a natureza observável, permitindo a partir dela, o desenvolvimento amalgamado da Aritmética que, futuramente aprimorada, culmina no nascimento da Álgebra. Assim, pode-se considerar que a formação do que hoje se denomina de Matemática, é iniciado pela Geometria, cujo desenvolvimento e estruturação se deram a partir da resolução de problemas relacionados à subsistência humana, sendo a agricultura, um dos mais importantes.

Isto posto, vale salientar que foi na imersão na literatura sobre a transição entre o Ensino Básico e o Ensino Superior, principalmente, considerando-se as pesquisas de Artigue (2004) e Gueudet (2008a), bem como o contato inicial com a análise nos programas oficiais de ensino e livros didáticos selecionados, tanto no Brasil como na França, foram os elementos constituintes da motivação que pretende servir de justificativa para o presente capítulo.

Dentre eles, o rastro deixado pela localização da Trigonometria como um setor do domínio da Geometria, despertou-se pelo interesse de compreender, do ponto de vista histórico e epistemológico[32], como, quando, por que e onde as Funções Trigonométricas encontraram o lugar que permitiu defini-las como representantes exclusivas do comprimento de onda, sobretudo, a função seno. (FONSECA, 2011). Essa reflexão conduziu a levantar três questionamentos norteadores dessa busca: Como elas se desenvolveram? Que problemas[33] os saberes a elas relacionados impulsionaram no desenvolvimento, tanto quanto na sua evolução? Quais as transições e rupturas podem ser identificadas?

Com efeito, a ideia de localizar no tempo, no espaço, na história – o berço e o desenvolvimento das Funções Trigonométricas até a sua "idade adulta" –, permitiu eleger dois **objetivos**: compreender, por meio do curso da história, as

[32] Cabe aqui, esclarecer e justificar que para Artigue (1996), uma análise da dimensão epistemológica está associada às características do saber em jogo que, nesse caso, refere-se à Trigonometria e às Funções trigonométricas. Para essa autora, tal dimensão constitui a primeira etapa das análises prévias ou preliminares que – por sua vez, é também a primeira fase de uma Engenharia Didática –, cujo objetivo central é proceder a uma análise do funcionamento do ensino habitual de uma noção matemática específica. Apesar de não se constituir, a Engenharia Didática, um dos objetivos desta pesquisa, vale salientar que essa ressalva pretendeu situar os motivos para que tal análise antecedesse as análises institucionais desenvolvidas no próximo capítulo, permitindo, dessa forma, a utilização de outras lentes que corroboraram com os resultados finais.

[33] Com efeito, faz-se necessário esclarecer que problemas geralmente estão relacionados a uma ação que, por sua vez, é descrita, conforme Chevallard (1998), por meio de **tarefas** que necessitam de **técnicas** específicas para serem desenvolvidas. Nesse sentido, estendeu-se esse questionamento buscando identificar as tarefas e técnicas e noções relacionadas a tal desenvolvimento.

transições e rupturas epistemológicas, influências sofridas por outros campos do saber e descrever sua organização epistemológica com vistas em contribuir para a construção de cenários didáticos que considere os princípios de uma Organização Matemática postulada por Chevallard (1998), os Níveis de Funcionamento do Conhecimento de Robert (1997) e os princípios da Neurociência Cognitiva defendidos por Kandel (1991), Willingham (2011), entre outros.

Cabe ainda destacar que apesar dos estudos de Fonseca (2002, 2011) refletirem sobre essa história, eles não alcançaram as preocupações com a transição, entre os níveis de ensino. Neles, os objetivos foram respectivamente: (1) compreender de que forma as linhas de pesquisa da Educação Matemática, desenvolvidas e implementadas por meio de atividades metodológicas, poderiam ajudar na apresentação didática da Trigonometria e, (2) como os fenômenos naturais, os ondulatórios – especificamente, são analisados na interface da Física e Matemática para, então, construir um cenário didático que auxiliasse na exposição das Funções Trigonométricas por meio da Teoria das Situações Didáticas cunhadas por Brousseau (1998), auxiliando, desta forma, o desenvolvimento da aprendizagem com sentido e significado.

Essa nova etapa da pesquisa, exigiu que as lentes fossem ampliadas e o foco redirecionado e ajustado para os achados de novas classificações ou tipos e, pelo menos, cinco subdivisões da Trigonometria, a saber[34]: trigonometria esférica, trigonometria plana (geométrica – triângulo retângulo; analítica – circular: circunferencial; cônica: hiperbólica, elíptica e parabólica), etc., resultando no interesse de revisitar a história não apenas da Matemática, mas das principais ciências e, alguns de seus ramos, atreladas à Trigonometria. Abrigando-se sob os estudos de Boyer (1974), Faria (1987), Eves (1992, 1995), Kennedy (1992), Lobo da Costa (1997), Ripoll *et al* (2008), Nogueira (2009), Mendes *et al* (2011), principalmente, a Figura 31, a seguir, possibilitou o esboço de um desenho da trajetória epistemológica desse ramo da Matemática, abaixo discriminado:

[34] Essa classificação das subdivisões da Trigonometria foi estruturada considerando-se os estudos de Boyer (1974), Kennedy (1992), Ripoll *et al* (2008), principalmente.

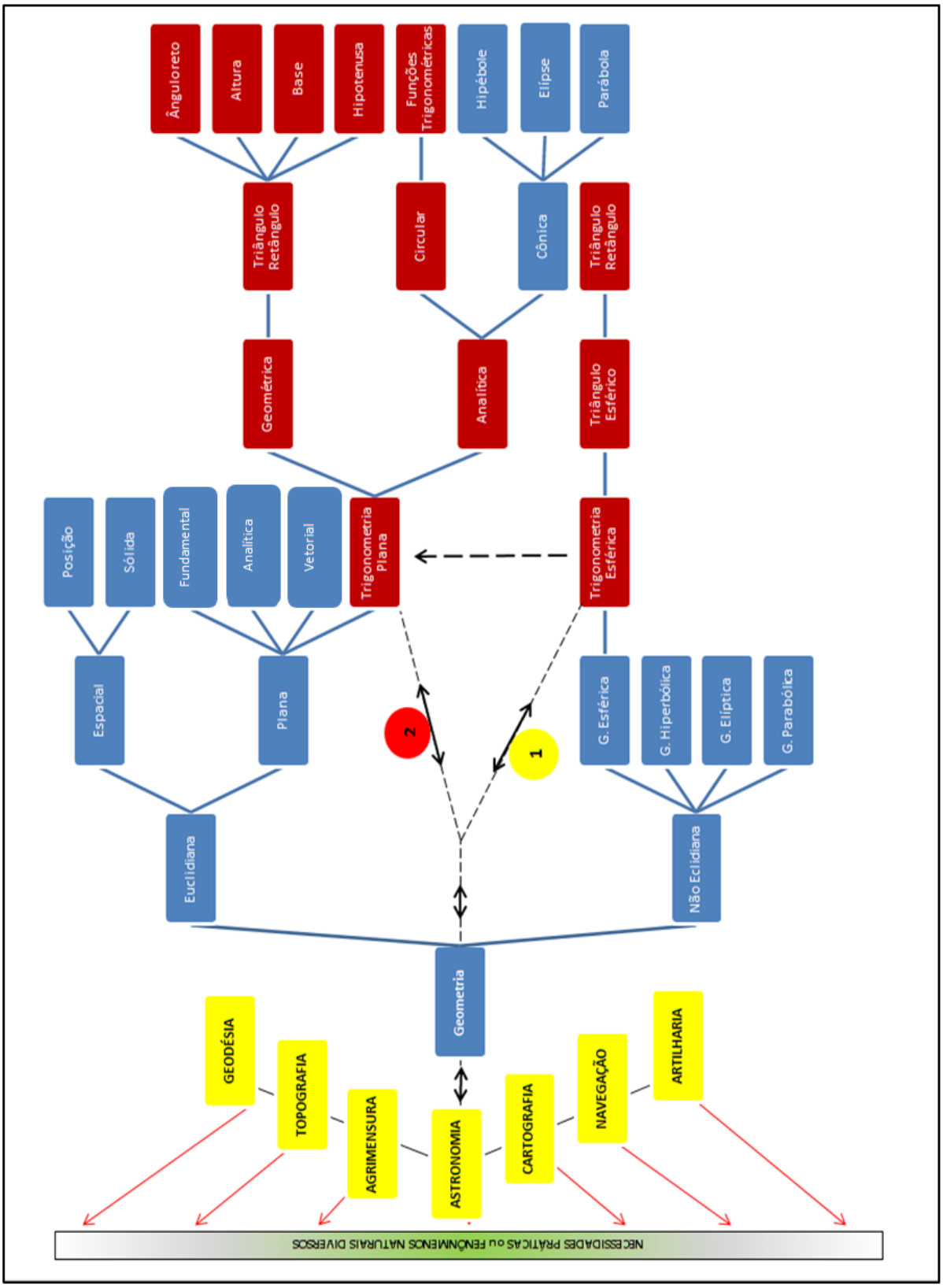


Figura 31 – Esquema Epistemológico do Campo Trigonométrico.
Fonte: O autor (2015).

Por sua vez, essa empreitada exigiu fôlego, foco e persistência para compreender o degradê desse itinerário e tentar apresentá-lo de uma forma clara e concisa. Salienta-se ainda que, não foi uma tarefa fácil transitar em campos, cujos saberes distanciam-se, indiretamente, dos interesses do pesquisador, tais como: a Astronomia, Física e Geometria. Mas que, ao mesmo tempo, por terem sinalizado o berço das Funções Trigonométricas – objeto matemático da presente investigação – instigaram o interesse em entender como esse último saber foi restringido a uma apresentação teórica, dissociada das suas próprias origens o que, por **hipótese**, poderia ter influenciado também no processo das rupturas da transição entre os níveis de ensino citados acima. Dada essas considerações, partiu-se para o mergulho histórico-epistemológico propriamente dito.

Do ponto de vista científico e, como um dos ramos de um dos galhos de uma árvore, as Funções Trigonométricas brotaram de um tronco que representa, conforme Nogueira (2009), a mais antiga de todas as ciências, a Astronomia. Enquanto um descendente, para que esse ramo apontasse na direção da luz solar – futuramente, o conceito físico do comprimento de uma onda –, que conduziria seu crescimento, outros ramos se juntaram a partir de um processo de bricolagem para auxiliar na resolução de problemas de naturezas diversas.

Nesse sentindo, sem a pretensão de reescrever a história das ciências, utilizaram-se, nessa pesquisa, as principais marcas desse desenvolvimento deixadas na história da Astronomia, Física e Geometria, principalmente, pois segundo Boyer (1974), foram essas ciências e algumas das suas ramificações que se valeram de ideias, noções, recursos e definições trigonométricas para continuarem se desenvolvendo.

Retomando o questionamento destacado por Nogueira (2009, p. 20), *"de onde viemos e para onde vamos"* ou resgatando inquietações de cientistas do mundo inteiro, tais como – o que há lá fora? Do que o mundo é feito? Qual é o segredo da vida? Como chegamos até aqui? – pode-se verificar que, assim como

essas, outras observações, curiosidades, questionamentos ou necessidades práticas[35], de cada época impulsionaram o desenvolvimento científico.

Para alguns autores da História da Matemática, a exemplo de Flood e Wilson (2013, p. 14) *"[...] vários utensílios primitivos de contagem de ossos (como varinhas de cálculo) sobreviveram, e alguns exemplos muito antigos de escrita (de 5000 a.C., mais ou menos) eram registros financeiros envolvendo números"*, o que denota os mais antigos rudimentos de aritmética para "controlar" objetos, cujos formatos eram geométricos.

Os pontos de vista de Flood e Wilson (2013), Kemper (2007) e de Nogueira (2009), nesta ordem, complementam-se e sinalizam o início do degradê entre a *resolução de problemas* – decorrentes de necessidades básicas e práticas – e a *ciência* que, otimizando-as pelo aprimoramento da racionalidade humana, possibilitou a busca por modelos válidos e universais que justificassem a compreensão dos fenômenos naturais e desvelassem mitos resultantes do dogmatismo religioso, que perdurou até a Alta Idade Média. Conforme Marcondes (2001), essa crise representa uma ruptura entre o pensamento da época e a cultura grega, que inaugura e estabelece o pensamento filosófico-científico desde a Idade Antiga à Pós-Modernidade.

Nesses termos, em meio a uma atmosfera entre história e epistemologia, originam-se a Trigonometria e as Funções Trigonométricas como modelos matemáticos para o *cálculo de incógnitas* – as distâncias inacessíveis entre a Terra e a Lua – e de *controle de variáveis* que inquietaram os primeiros filósofos naturais quando se preocuparam em observar a influência da natureza sobre o clima, a terra, os astros, etc. Por esse motivo, faz-se necessário esclarecer que se forem comparadas as primeiras evidências astronômicas às geométricas, elas se distanciariam, ao menos, segundo Faria (1987), 4,5 milhões de anos a.C. Nessa direção, o trabalho desse autor permitiu iluminar a interface inicial entre Astronomia

[35] Lançando mão dos princípios de Chevallard (1998), por necessidades práticas, compreende-se à concepção e implementação de uma *técnica* (o fazer) que esteja associada a uma ação (uma *tarefa*), permitindo sua realização. Como ele mesmo denominou de **saber-fazer**, constituem-se do **bloco prático-técnico [T/τ]**.

e as Geometrias, contribuindo para erguer o alicerce histórico-epistemológico que se buscou construir no presente capítulo.

Entretanto, em meio a interminável natureza observável, a admiração e curiosidade pelos movimentos dos corpos celestes e necessidades agrícolas que, demarcados pela história, os consagraram como o apelo original da Astronomia à Geometria – abrindo espaço e somando forças – para garantir o lugar da gestação embrionária das Funções Trigonométricas, inaugurou-se o surgimento da mais antiga de todas as ciências, a Astronomia, que buscou na Geometria a fonte e as ferramentas para o seu estabelecimento científico e, por sua vez, propiciou a essa última à gênese de uma de suas notáveis especializações: o Campo Trigonométrico[36].

A compreensão das origens e do desenvolvimento do Campo Trigonométrico estão diluídas na pré-história, podendo, de acordo com Kennedy (1992, p. 1), *"[...] ser identificados nas primeiras sequências numéricas relacionando comprimentos de sombras com horas do dia",* requerendo, para tanto, um trabalho minucioso que intenta desenhar sua cartografia, salientando-se seus períodos de transição, bem como suas rupturas.

Ao que tudo indica a compreensão do tempo, bem como de sua mensuração, por meio dos cálculos dos comprimentos de sombras de uma vara vertical ao longo de um dia, demarcam os indícios mais antigos da história da Trigonometria. Tabulados, esses registros, apesar de incertos, começaram a ser encontrados numa inscrição do século XIII a. C. no Alto Egito e, representam, conforme Kennedy (1992, p. 3), *"legítimos antepassados das funções tangente e co-tangente"*. Seguindo essa mesma necessidade da compreensão temporal, outros dados também foram encontrados no atual Irã, Índia, Grécia, China e Mesopotâmia.

Esses indícios, conduziram a observação de que as mudanças climáticas de cada época influenciavam na agricultura, principal atividade de subsistência. Aqui, se registra como primeiro estímulo natural, **o fenômeno climático**, impulsionador dos primórdios do desenvolvimento epistemológico do Campo

[36] Decorrente dos achados e interpretações do pesquisador, nessa pesquisa, Campo Trigonométrico foi compreendido e classificado como resultado da união entre a Trigonometria e Funções Trigonométricas. Tal denominação poderá ser evocada para sintetizar a escrita.

Trigonométrico. A articulação entre as épocas do plantio e mudanças climáticas, paralelos à compreensão do tempo e a movimentação dos astros (Sol e Lua), consagram os impulsos iniciais que mobilizaram a curiosidade e matematização, por meio da criação dos primeiros triângulos, percebidos como objetos matemáticos possíveis de favorecerem respostas aos questionamentos relativos ao melhor período para o plantio de culturas agrícolas.

Aqui, Kennedy (1992) salienta que já se empregava implicitamente a *noção de função* tendo essa duas variáveis independentes: hora do dia e estação do ano. Esse autor denominou esses marcos primitivos de estágios e, na presente investigação, compreendeu-se a função sombra como o **ESTÁGIO 01**. Isto posto, assinala Kennedy (1992, p. 2) que *"como matéria escolar, porém, especialmente útil para agrimensores e navegadores, a trigonometria manteve ainda sua identidade à parte"*.

Fazendo referência a esse primeiro estágio, o autor, **confere ao estudo sistemático dos triângulos a origem mais remota da trigonometria**, muito embora não seja possível compreendê-la sem desconsiderar uma sucessão de saltos descontínuos que ainda hoje não foram desvelados, conforme o Quadro 24 (Cf. p. 210).

Primeiramente, iniciou-se o estudo de tais figuras, observando-se de que eram formados: lados e ângulos. Depois disso, com observações e, posteriores comparações entre triângulos de tamanhos diferentes, iniciaram-se a percepção e sistematização de um conjunto que reúne as primeiras propriedades geométricas para a configuração da trigonometria: a semelhança de triângulos.

O **ESTÁGIO 02** que, de acordo com as vias históricas foi marcado pelo aparecimento da "trigonometria plana de cordas" ou função corda – mesmo não sendo possível precisar a trajetória da sofisticação do estágio anterior, essa função foi, conforme Kennedy (1992), a precursora da função seno. Mas, desde o segundo milênio a. C. a função corda já existia no sistema sexagesimal desenvolvido na Mesopotâmia (tábuas cuneiformes dos antigos babilônios). Registros dessa época foram encontrados, já traduzidos, no Livro I do *Almagesto* de Ptolomeu, capítulos 9 e 11 que explicam, respectivamente, a constituição de como uma tábua de cordas foi

calculada, seguida de um exemplo. Suas **TÉCNICAS** que resolviam, numericamente, as figuras planas estavam baseadas em uma única função que, segundo Kennedy (1992, p. 1) era *"a corda de um arco de um círculo arbitrário"*.

Para tanto, verificou-se a necessidade da aplicação do teorema de Pitágoras, aplicação das propriedades de semelhança de triângulos, que, enquanto noções matemáticas, já tinham sido desenvolvidas na geometria e na álgebra geométrica, ambas, sistematizadas nos Elementos de Euclides, frisa Kennedy (1992). Ainda assim, esse autor, destaca que, mesmo não se sabendo o motivo, cálculos de razões entre os lados do triângulo antecederam-se 1,5 milênio antes de Hiparco (150 a. C.). Aproveitando-se dessa informação, assinala-se o apelo aos elementos axiomáticos da geometria e da álgebra que contribuíram para demarcar o início da formação da identidade científico e independente da trigonometria.

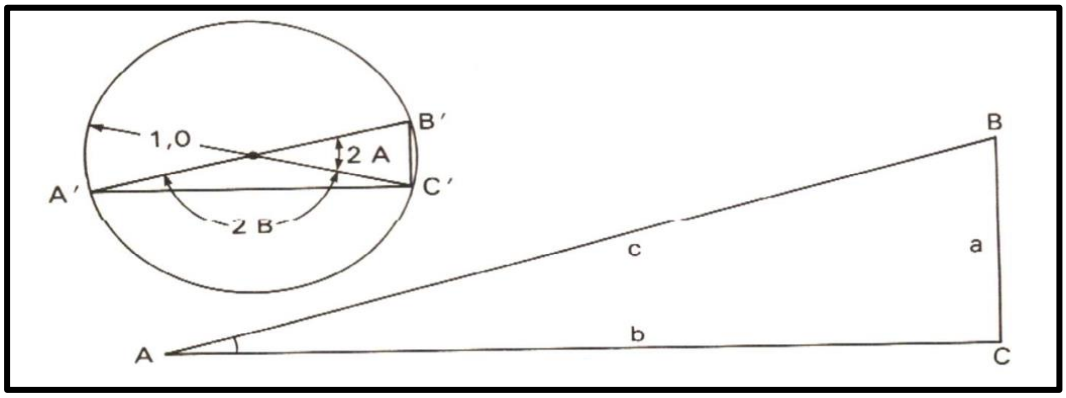


Figura 32 – Aplicação de noções de semelhança de triângulos retângulos.
Fonte: Kennedy (1992, p. 06).

No entanto, foi a concepção de esfera celeste que fundamentou o desenvolvimento da Astronomia e, mesmo sem precisar a data de sua criação, ela se estabeleceu muito antes de Hiparco e da trigonometria plana de cordas. Novamente, para que a ideia de esfera celeste fosse desenvolvida foi necessário criar uma **TÉCNICA** que relacionasse grandezas incógnitas às grandezas conhecidas, cujos cálculos relacionaram entidades esféricas "naturais": arcos, ângulos e superfícies. Outra **TÉCNICA** (alternativa prática) recorria à planificação dos objetos esféricos – ***ou projeção esferográfica*** que, conforme Kennedy (1992, p. 8) "*foi inventada por Hiparco"* –, abordando-os através do cálculo de cordas. O mesmo autor ressalta que essas duas **TÉCNICAS** foram desenvolvidos

anteriormente a trigonometria esférica. Essa projeção esferográfica permitiu também a dedução de teoremas em trigonometria esférica.

Desse período de inquietação, demarcou-se o **ESTÁGIO 03**, pelo nascimento da função esferográfica (representaram aplicações da função corda), cuja denominação nessa pesquisa, se vale das ideias de projeção esferográfica, desenvolvidas por Hiparco, conforme acentua Kennedy (1992). Essa nova função foi desenvolvida a partir dos **ANALEMAS**, representantes das **TÉCNICAS** geométricas descritivas utilizadas, para forçar a acomodação de todos os pontos da superfície esférica num único plano, através de rotação ou projeção ortográfica, "*de todos os círculos, maiores ou não, envolvidos numa dada situação".* (KENNEDY, 1992, p. 2)

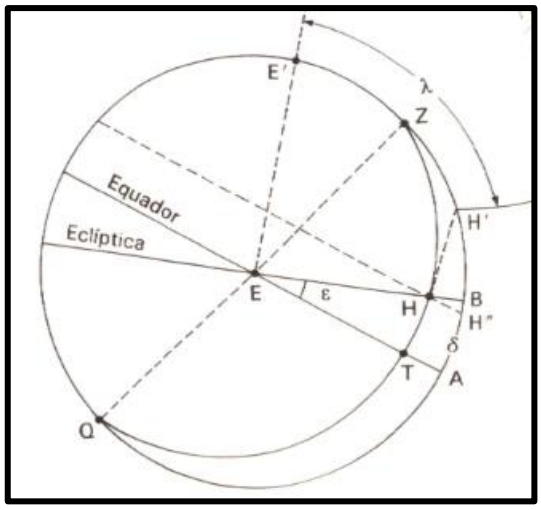


Figura 33 A – Noções de projeções ortográficas.

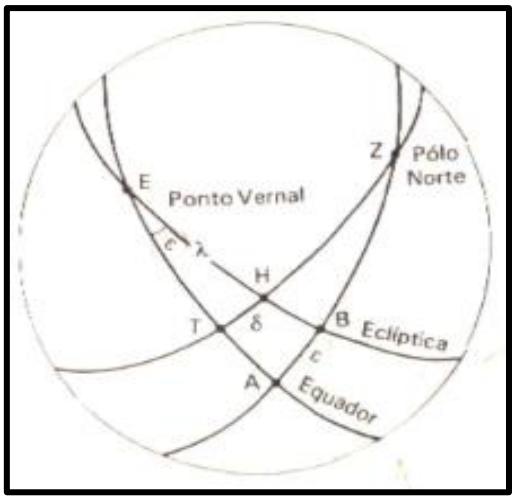


Figura 33 B – Noções de projeções ortográficas.

Fonte: Kennedy (1992, p. 09-10).

Posteriormente, a história aponta o trabalho de Menelau (c. 100 d. C.) como autor de uma **TÉCNICA** diferente para resolver figuras esféricas que, trabalhando sobre a própria superfície da esfera, não obstante, era necessário utilizar teoremas do plano para demonstrá-lo. Kennedy (1992) afirma que, dado a utilização do teorema de Menelau na resolução de esferas, por muitos séculos **a trigonometria esférica era tratada como o teorema de Menelau**, que *"envolvendo quadriláteros completos planos ou esféricos, tornou possível a extensão dessa disciplina à esfera"* (KENNEDY, 1992, p. 1-2), impulsionando o desenvolvimento de outras **TÉCNICAS** para a passagem do plano para a esfera.

No entanto, salienta esse autor, que mesmo sendo um recurso sofisticado ainda era adolescente para os problemas esféricos de Astronomia. Nesse sentido, ressalta que

> Nas aplicações da função corda dada acima (tanto plana como esférica), é necessário dobrar o arco antes de usá-lo como argumento numa tábua de cordas. É mais conveniente ter uma tábua na qual o próprio arco original seja uma variável independente. Finalmente alguém pensou em calcular e usar a metade da corda de um arco duplo. Quando isso foi feito, nasceu a função seno. (KENNEDY, 1992, p. 13)

Essa percepção entre, a utilização do dobro e da metade de um arco, favoreceu o surgimento do **ESTÁGIO 04**, a representante mais contemporânea de uma história: a função seno. Tendo certo conhecimento sobre noções matemáticas gregas e babilônias, os desconhecidos inventores indianos da função seno (S_n), a criaram a partir da tabulação de dados astronômicos encontrados, conforme Kennedy (1992), no Livro II de um compêndio de astronomia, escrito em sânscrito, denominado *Surya Siddhanta* (século IV ou V d. C.). Foi durante as análises dos dados observados a partir, segundo Kennedy (1992, p. 14), da "*oitava parte dos minutos de uma secção zodiacal"* – denominada de **primeiro seno** – que eles desenvolveram uma **TÉCNICA** sem recorrer à geometria, que permitiu a construção de uma tábua que considerava apenas de seu valor inicial, ou seja, o primeiro seno, conforme Kennedy (1992, p. 14), escrito como $S_1 = 30' / 8 = 1800' / 8 = 225'$.

Com efeito, tendo no século IX um maior número de interessados, a trigonometria – vista como um conjunto de **TÉCNICAS** que serviam à Astronomia – assumiu a responsabilidade de contribuir com as previsões astrológicas para atender aos objetivos da corte. Nesse momento, postula Kennedy (1992, p. 19), *"*a regra das quatro quantidades *marcou um estágio na* ***transição*** *de um cálculo que lidava com arcos de um quadrilátero esférico para a trigonometria esférica propriamente dita, envolvendo os lados e* ângulos *de um triângulo esférico. Este teorema afirma que,* num par de triângulos retângulos esféricos que têm um ângulo agudo *(*A e A') em comum ou igual, vale a seguinte relação*: sen a / sen a' = sen c / sen c'".* Dessa relação, decorre a lei dos senos para os triângulos esféricos.

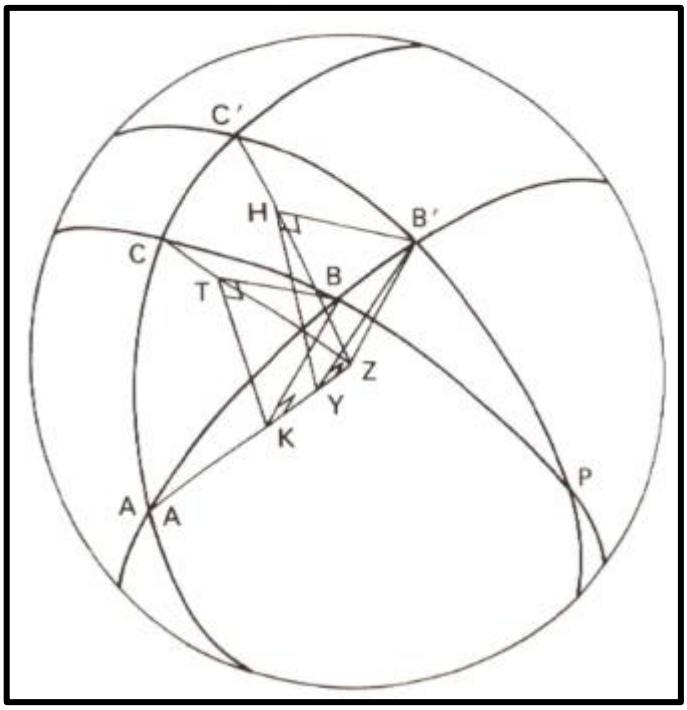


Figura 34 – Noções de Trigonometria Esférica.
Fonte: Kennedy (1992, p. 20)

Mas, por terem uma relação íntima, a Trigonometria e a Astronomia só foram **separadas** em temas distintos apenas no século XIII. (KENNEDY, 1992).

No período entre os séculos IX e XV, as antigas funções sombras e a nova função seno (desenvolvida na Índia), eram registradas a partir de tábuas sexagesimais. Essa foi à marca da primeira trigonometria genuína, cujo *"objeto de estudos tornou-se o* ***triângulo plano ou esférico****, seus lados e ângulos"* (Kennedy, 1992, p. 2, grifo do pesquisador), **apesar de não serem ainda classificados nessa época, os triângulos esféricos, como elementos da Geometria Não Euclidiana**.

Com o deslocamento das atividades astronômicas migrando para a Europa, levou consigo sua aliada na investigação dos astros – a Trigonometria, dando continuidade no ocidente aos mesmos **tipos de tarefas**, sinônimo atualizado dos trabalhos que ocupavam os cientistas orientais: "*cálculo de tábuas e a descoberta de relações funcionais entre partes do triângulo"* (Kennedy, 1992, p. 2).

À época, a principal contribuição europeia, inovadora e fundamental, foi a transformação da linguagem verbal pela linguagem algébrica apropriada que, juntamente com a invenção do cálculo infinitesimal, promovia uma **nova transição**

da trigonometria, deixando de ser um ramo independente da matemática e, com a descoberta do domínio complexo, passou a ser incluída na análise. (KENNEDY, 1992).

Acrescenta ainda esse autor que uma categoria de um conjunto de pessoas "é *a do inventor original de um teorema ou de uma* ***técnica****; ele aplica à solução de seus problemas os instrumentos matemáticos que herdou, mas cedo ou tarde intui maneiras mais eficazes de responder a velhas questões ou de colocar e responder novas"* (KENNEDY, 1992, p. 3, grifo dessa pesquisa), deixados nos registros históricos. Salienta-se que esse recorte da obra de Kennedy (1992), foi pinçado para mostrar qual é o papel, sentido e significado do termo ***técnica***, empregado ao longo do desenvolvimento do Campo Trigonométrico.

Somente no século XVI, por meio do simbolismo algébrico, começou a assumir a forma como é apresentada atualmente, ou seja, aparecia nas interações entre a análise numérica e geométrica para atender às necessidades da Astronomia (KENNEDY, 1992).

Por fim, salientam Boyer (1974) e Kennedy (1992), que, nos anos finais do século XVIII, acentua-se a sua última etapa de transição epistemológica – reconhecida como fase adulta, cujo status é de "ciência analítica" –, para contribuir com o avanço da análise mobilizado pela criação do cálculo infinitesimal que recorreu as Funções Trigonométricas para representação de séries infinitas.

Num primeiro exemplo, têm-se as séries que foram descritas por Isaac Newton para expressar as Funções Trigonométricas *sen* x e *cos* x, conforme destaca kennedy (1992, p. 27) *"*$sen\ x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} \ldots\ e\ cos\ x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} \ldots$*"*, permitiram uma bifurcação epistemológica entre as Funções Trigonométricas e Funções Exponenciais para justificar a representação do número $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$ (KENNEDY, 1992, p. 27).

Prosseguindo esse raciocínio, encontrou-se na obra deste pesquisador, mais um exemplo, partindo-se do apelo aos números imaginários representantes das raízes das equações algébricas que, respeitando-se todas as evoluções decorrentes de seu desenvolvimento, atingindo o formato que, de acordo com

kennedy (1992, p. 27), foi cunhado por Leonhard Euler em 1740, definiu as Funções Trigonométricas como sendo $sen\, z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$, $cos\, z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$ e $e^z = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n$.

Sob o âmbito desse abrigo histórico-epistemológico que foi norteado pela questão "como se desenvolveu o Campo Trigonométrico?", reuniram-se no quadro a seguir, alguns elementos[37] julgados importantes para a compreensão das questões iniciais, bem como o alcance dos objetivos dessa empreitada.

[37] Tarefa, técnica, autor, noção e estágios. O termo **Tarefa**, cunhado por Chevallard (1998) na criação da TAD, foi inserido aqui como sinônimo atualizado de um "evento natural ou situação-problema" citados à época do desenvolvimento histórico-epistemológico do Campo Trigonométrico, dado a motivação encontrada em Kennedy (1992) quando se referia ao termo ***técnica*** para auxiliar na resolução de situações-problema associadas às noções iniciais de Trigonometria; o termo **Autor** equivale a formulador; o termo **Noção** corresponde a um objeto matemático; e, por último, os estágios que foram identificados por Kennedy (1992) a partir de marcos primitivos.

Quadro 24

Mapeamento Histórico-epistemológico a partir de Kennedy (1992).

	Períodos Históricos			
	Pré-história	**Idade Antiga**	**Idade Média**	**Idade Moderna**
Motivação	- Mudanças climáticas; - Plantio; - Compreensão do tempo; -Movimento dos astros celestes.	- As fases da Lua; - Os pontos cardeais; - As estações do ano; - Calendário astrológico;	- Mudança de técnica (IV ou V d. C.); - Previsões astrológicas (IX d. C. até XV d. C.); - Separação da Trig. da Astr. (XIII d. C).	- Simbolismo algébrico (XVI d. C.) - Invenção do Cálculo infinitesimal e descoberta do domínio complexo
Tarefa	- Calcular o comprimento de uma sombra.	- Analisar as fases da Lua, os pontos cardeais e as estações do ano; - Medir distâncias, comprimentos e profundidades.	- Resolver um triângulo;	- Transformar a linguagem verbal em linguagem algébrica; - Construir tábuas trigonométricas; - Calcular o sen 1' com treze casas decimais.
Objetivo	- Compreender o tempo.	- Compreender o dia e a noite (o aparecimento e desaparecimento dos corpos celestes).	- Construir uma Trigonometria genuína;	- Contribuir para a invenção do cálculo infinitesimal;
Técnica	-Tabulação de sequências numéricas que relacionavam comprimentos de sombras às horas do dia.	- Resolução de figuras planas; - Resolução de figuras esféricas; - Utilização de analemas.	- Resolução de triângulos planos ou esféricos.	- Interações entre análise numérica e geométrica
Autor	-Iranianos, egípcios, indianos, gregos, chineses, babilônios e mesopotâmios.	- Babilônios, mesopotâmios, egípcios, gregos, romanos, chineses e indianos.	- Indianos (IV ou V d. C.) e gregos.	- Europeus
Noção	- Medida de tempo; - Ângulos; - Triângulos; - Semelhança; - Proporcionalidade; - Esfera celeste.	- Triângulos retângulos; - Trigonometria primitiva; - Relações trigonométricas; - Ângulo e medição de ângulos; - Trigonometria esférica	- Relações métricas nos triângulos planos ou esféricos; - Noções de quantidades variáveis.	- Razões trigonométricas; - Funções do ângulo (funções trigonométricas); - Séries infinitas;
Estágio	- Função Sombra.	- Função Sombra; - Função Corda; - Função Esferográfica.	- Função Esferográfica; - Função Seno.	- Função Seno.

Fonte: O autor (2015).

Por outro lado, cabe também considerar os ecos de estudos brasileiros, destacando-se as investigações de Lobo da Costa (1997), que para além de uma simples sistematização ou descrição das cronologias encontradas, diluidamente nas obras de Boyer (1974), Eves (1992, 1995), Struik (1989) e Kennedy (1992), primordialmente, permitiu que o presente rastreamento apresentasse mais uma poção, de modo didático, para analisar os períodos das transições e rupturas epistemológicas, tarefas, técnicas e noções trigonométricas ao longo do percurso histórico por ela dimensionado. Assim, buscou-se evitar dizer o que Lobo da Costa (1997), bem como outros pesquisadores que se debruçaram sobre os clássicos da história da matemática, já desvelou, procurando pinçar desse estudo, excertos significativos que possibilitaram identificar os elementos anunciados anteriormente e que constituíram os próximos quadros.

Quadro 25

Idade Antiga: Marcos cronológicos e elementos do desenvolvimento das noções das Funções Trigonométricas.

Séc. XXVIII a.C. → Na Astronomia é impossível estudar as fases da Lua, os pontos cardeais e as estações do ano sem usar triângulos, um sistema de unidade de medidas e uma escala. Os babilônios foram excelentes astrônomos e influenciaram os povos posteriores. Eles construíram no século 28 a.C., durante o reinado de Sargon, um calendário astrológico e elaboraram, a partir do ano 747 a.C, uma tábua de eclipses lunares. Este calendário e estas tábuas chegaram até os nossos dias (LOBO DA COSTA, 1997, p. 10).

Séc. XIX a.C. → O Papiro **Ahmes** é o mais extenso documento egípcio em matemática que chegou aos nossos dias. Ele é uma cópia de um antigo papiro do sec XIX a.C. que esteve em poder do escriba **Ahmes**. Foi adquirido no Egito por H. Rhind e por isso é usualmente conhecido como Papiro **Rhind** (*ibidem*, 1997, p. 9).

Séc. XV a.C. → Segundo o historiador **Heródoto** (490 - 420 a.C.), foram os gregos que deram o nome **gnômon** ao relógio de sol que chegou até eles através dos babilônios, embora já tivesse sido utilizado pelos egípcios antes de 1500 a.C. (*ibidem*, 1997, p. 12).

Séc. XI a.C. → Uma trigonometria primitiva também foi encontrada no Oriente. Na China, no reinado de Chóu-pei Suan-king, aproximadamente 1110 a.C., os triângulos retângulos eram frequentemente usados para medir distâncias, comprimentos e profundidades. Existem evidências tanto do conhecimento das relações trigonométricas quanto do conceito de ângulo e a forma de medi-lo mas, infelizmente não temos registro de como eram feitas as medições e quais as unidades de medida usadas. (*ibidem*, 1997, p. 11).

Séc. XI a.C. → A primeira amostra documentada de contribuição grega para o estudo da trigonometria apareceu por volta de 180 a.C. quando **Hipsícles**, influenciado pela cultura babilônica, dividiu o zodíaco em 360 partes. Essa idéia foi posteriormente generalizada por **Hiparco** para qualquer círculo. (*ibidem*, 1997, p. 13).

Século IV d.C. → No século IV da nossa era, a Europa Ocidental entrou em crise com as invasões dos bárbaros germânicos e com a queda do Império Romano. O centro da cultura começou a se deslocar para a Índia, que revolucionou a trigonometria com um conjunto de textos denominados **Siddhanta**, **que significa sistemas de Astronomia.** (*ibidem*, 1997, p. 18).

Fonte: O autor (2015).

Quadro 26

Idade Média: Marcos cronológicos e elementos do desenvolvimento das noções das Funções Trigonométricas.

Século XVI d.C. → **O Almagesto** é um marco, um modelo de Astronomia que perdurou até **Copérnico**, no século XVI. [...] Ptolomeu, na verdade, sistematizou e compilou no Almagesto uma série de conhecimentos bastante difundidos em sua época e que a maior parte da obra é baseada no trabalho do astrônomo e matemático grego Hiparco, cujos livros se perderam. (LOBO DA COSTA, 1997, p. 15). **Século XIV d.C.** → Na Europa do século XIV alguns importantes passos foram dados para o desenvolvimento da Matemática. Pela primeira vez, as noções de quantidades variáveis e de função são expressas e, tanto na Escola de Filosofia Natural do Merton College de Oxford quanto na Escola de Paris, chega-se à conclusão de que *a Matemática é o principal instrumento para o estudo dos fenômenos naturais.* (*ibidem*, 1997, p. 21).

Fonte: O autor (2015).

Quadro 27

Idade Moderna: Marcos cronológicos e elementos do desenvolvimento das noções das Funções Trigonométricas.

Século XV d.C. → O primeiro trabalho impresso em trigonometria provavelmente foi a "*Tabula Directionum"* de Regiomontanus, publicado em Nuremberg certamente antes de 1485, pois a segunda edição data deste ano, em Veneza. (LOBO DA COSTA, 1997, p. 22).

Século XVI d.C. → As seis funções trigonométricas foram definidas como funções do ângulo, em vez de funções do arco, e subentendidas como razões, pela primeira vez, no "*Canon DoctrinaeTtriangulorum"* de Joachim Rhaeticus em Leipzig, 1551, embora ele não tenha dado nomes para seno, cosseno ou cossecante, exceto *perpendiculum, basis e hypotenusa*. (*ibidem*, 1997, p. 22).

→ Rhaeticus (1514-1576) retomou, um século depois, as tábuas de Regiomontanus de 1464, com maior rigor nos cálculos. Aumentou a precisão para onze casas decimais e os senos, cossenos, tangentes e secantes foram calculados de minuto em minuto para os arcos do primeiro quadrante e de dez em dez segundos para o arco de 1º. Ele foi o primeiro a adotar a organização das tábuas em semiquadrantes, dando os valores dos senos, cossenos e tangentes de ângulos até 45º e completando a tabela com o uso da igualdade sen x = cos (π/2-x). Deve-se também a Rhaeticus a introdução das secantes na trigonometria européia e os cálculos do sen n θ, em termos de sen θ, que foram retomados e aprimorados por Jacques Bernoulli, em 1702. (*ibidem*, 1997, p. 22).

Século XVI - XVII d.C. → Neste relato histórico não poderíamos deixar de mencionar Viète (1540-1603), pois foi ele quem adicionou um tratamento analítico à trigonometria, em 1580. Foi o primeiro matemático a usar letras para representar coeficientes gerais, o que representou grande progresso no campo da Álgebra. Também construiu tábuas trigonométricas e calculou o sen 1' com treze casas. (*ibidem*, 1997, p. 22-23).

Século XVIII d.C. → A trigonometria toma a sua forma atual quando Euler (1707-1783) adota a medida do raio de um círculo como unidade e define funções aplicadas a um número e não mais a um ângulo como era feito até então, em 1748. A **transição das razões trigonométricas para as funções periódicas** começou com Viète no século XVI, teve novo impulso com o aparecimento do Cálculo Infinitesimal no século XVII e culminou com a figura de Euler. (*ibidem*, 1997, p. 24).

Fonte: O autor (2015).

Pelo que se objetivou, foi possível sintetizar até o momento, considerando-se o breve rastreamento desenvolvido partindo dos excertos de Lobo da Costa (1997) descritos nos Quadros 25, 26 e 27 (Cf. p. 211-213), ordenados por opção da presente investigação pelos períodos históricos identificados nessa obra, que as principais características do saber em jogo foram:

- *Extensão* – as noções das Funções Trigonométricas germinaram, segundo a pesquisadora em tela, por volta do século XXVIII a. C.,

contribuindo e bifurcando-se para servir outras áreas do conhecimento até os anos finais o século XVIII d.C.;

- *Vinculação a fenômenos naturais* – Tais noções se desenvolveram em diferentes civilizações, considerando-se seu impulso mobilizador os fenômenos climáticos;
- *Modelização* – Durante o seu progresso, auxiliou na concepção de modelos matemáticos para a resolução de problemas (tarefas e técnicas) relacionados à Agrimensura, Astronomia e a Análise, nessa ordem; permitindo, dessa forma, atingir sua fase adulta;

Na sequência, observou-se nos elementos dessa última característica, a possibilidade de utilizar as lentes de Chevallard (1998), buscando-se identificar no sequenciamento das civilizações encontradas no estudo de Lobo da Costa (1997), alguns exemplos de tarefas, técnicas e noções relacionadas ao Campo Trigonométrico, descritos nos quadros abaixo, servindo como auxílio de pistas para amalgamar o estudo parcial de seu desenvolvimento epistemológico, bem como abrigar a análise institucional, apresentada no capítulo seguinte. Nessa ocasião, vale ressaltar que interessa a essa pesquisa, principalmente, analisar os conhecimentos trigonométricos direcionados ao Ensino Médio para que sirvam de suporte as disciplinas do Ensino Superior.

Quadro 28

Civilização Babilônica

Os babilônios tinham grande interesse pela Astronomia, por suas ligações com os conceitos religiosas e por suas conexões com o calendário, as épocas de plantio e as estações do ano. Na Astronomia é impossível estudar as fases da Lua, os pontos cardeais e as estações do ano sem usar triângulos, um sistema de unidades de medidas e uma escala. (LOBO DA COSTA, 1997, p. 10). **TAREFAS:** estudar as fases da Lua, os pontos cardeais e as estações do ano. **TÉCNICAS**: utilização de triângulos, de um sistema de unidades de medidas e de uma escala. **NOÇÕES**: relações métricas em triângulos, sistema de medidas de ângulos (sistema sexagesimal).

Fonte: O autor (2015).

Quadro 29

Civilização Egípcia, exemplo (a)

Os rudimentos de uma trigonometria parecem ter surgido no Egito na Babilônia, a partir de razões entre números e entre lados de triângulos semelhantes. No Egito, isto pode ser observado no Papiro **Ahmes,** conhecido como Papiro **Rhind**, que data de aproximadamente 1650 a.C., contendo 84 problemas, dos quais quatro fazem menção ao **seqt** de um ângulo. [...] Ahmes não foi claro ao expressar o significado desta palavra mas, pelo contexto, pensa-se que o **seqt** de uma pirâmide regular seja equivalente, hoje, à cotangente do ângulo **OMV** (vide Figura 1). Na construção das pirâmides era essencial manter uma inclinação constante das faces, o que levou os egípcios a introduzirem o conceito de **seqt**, que representava a razão entre afastamento horizontal e elevação vertical. (LOBO DA COSTA, 1997, p. 9).

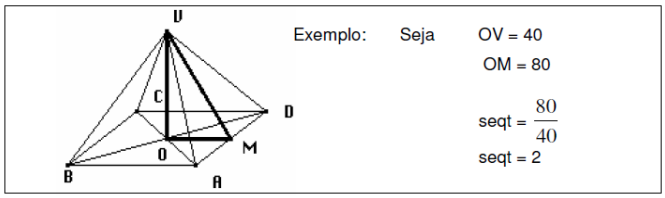


Figura 1 - O Seqt Egípcio

TAREFAS: calcular as razões entre os lados de um triângulo semelhante.
TÉCNICAS: utilização de conceito de cotangente (seqt).
NOÇÕES: cotangente de um ângulo agudo.

Fonte: O autor (2015)..

Quadro 30

Civilização Egípcia, exemplo (b)

Além da utilização da trigonometria nas medições das pirâmides, apareceu no Egito (1500 a.C. aproximadamente) a idéia de associar sombras projetadas por uma vara vertical a seqüências numéricas, relacionando seus comprimentos com horas do dia (relógios de sol). Poderíamos dizer então que essas idéias estavam anunciando a chegada, séculos depois, das **funções** tangente e cotangente. Os predecessores da tangente e da cotangente, no entanto, surgiram de modestas necessidades de medição de alturas e distâncias. (LOBO DA COSTA, 1997, p. 10).

TAREFAS: calcular as medições das pirâmides (alturas, arestas, distâncias, etc.).
TÉCNICAS: utilização de projeções de sombras de uma vara vertical; comparação, por semelhança, dos lados dos triângulos gerados por tais sombras.
NOÇÕES: razões trigonométricas de um ângulo agudo de um triângulo retângulo.

Fonte: O autor (2015).

Quadro 31

Civilização Chinesa

Uma trigonometria primitiva também foi encontrada no Oriente. Na China, no reinado de Chóu-pei Suan-king, aproximadamente 1110 a.C., os triângulos retângulos eram frequentemente usados para medir distâncias, comprimentos e profundidades. Existem evidências do conhecimento das relações trigonométricas, mas não se sabem os nomes dados pelos chineses para essas relações. Na literatura chinesa encontramos uma certa passagem que podemos traduzir por*: "O conhecimento vem da sombra, e a sombra vem do gnômon",* o que mostra que a trigonometria plana primitiva já era conhecida na China no segundo milênio a.C. O conceito de ângulo e a forma de medi-lo também sugiram na China. Assim como aconteceu com demais povos antigos, em razão do interesse astronômico dos chineses, fez-se necessário medir os ângulos, mas não sabemos como eram feitas as medições e quais as unidades de medidas usadas. (LOBO DA COSTA, 1997, p. 11).

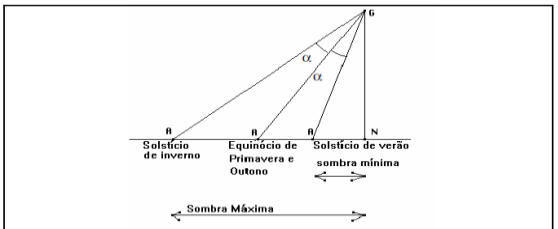
TAREFAS: medir distâncias, comprimentos e profundidades.
TÉCNICAS: não identificadas.
NOÇÕES: ângulo, triângulo retângulo, relações trigonométricas.

Fonte: O autor (2015).

Quadro 32

Civilização Grega, exemplo (a)

Segundo o historiador **Heródoto** (490 - 420 a.C.), foram os gregos que deram o nome **gnômon** ao relógio de sol que chegou até eles através dos babilônios, embora já tivesse sido utilizado pelos egípcios antes de 1500 a.C. O mais antigo gnômon de que temos conhecimento e que chegou até nossos dias, está no museu de Berlim (Eves, 1995). Ele evidencia e reforça a hipótese de que a trigonometria foi uma ferramenta para observação dos fenômenos astronômicos, uma vez que a documentação relativa a esse período é praticamente inexistente.



Solstício: sol estático		
Solstício de inverno	Equinócio :	Solstício de verão
mais de 12 h de escuridão	12 h de escuridão	mais de 12 h de claridade
menos de 12 h de claridade	12 h de claridade	menos de 12h de escuridão

Figura 2 : O Gnômon

O gnômon era uma vareta que se espetava no chão, formando com ele um ângulo de 90º, e o comprimento de sua sombra era observado, num horário determinado: meio dia. A vareta **GN** era chamada pelos gregos de **Gnômon.** Ela era erguida e a sombra **AN** observada. [...] Uma observação dos limites da sombra permitia medir a duração do ano. O movimento lateral diário do ponto A permitia medir a duração do dia. (LOBO DA COSTA, 1997, p. 12-13).

TAREFAS: observar fenômenos astronômicos, medir a duração do ano, medir a duração do dia.

TÉCNICAS: utilização do gnômon, projeção de sombras, comparação das medidas dos lados dos triângulos gerados a partir dos elementos gnômon e sombras.

NOÇÕES: ângulo, triângulo retângulo, razões trigonométricas.

Fonte: O autor (2015).

Quadro 33

Civilização Grega, exemplo (b)

Sabemos que os diversos ramos da Matemática não se formaram nem evoluíram da mesma maneira e ao mesmo tempo, mas sim gradualmente. O desenvolvimento da trigonometria está intimamente ligado ao da geometria. Neste campo, a Grécia produziu grandes sábios; entre eles **Thales** (625 - 546 a.C.), com seus estudos de semelhança que embasam a trigonometria, e seu discípulo **Pitágoras** (570 - 495 a.C.). Conjectura-se que este último tenha feito a primeira demonstração do teorema que leva seu nome: "*Em todo triângulo retângulo a área do quadrado construído sobre a hipotenusa é igual à soma das áreas dos quadrados construídos sobre os catetos".* **Deste teorema deriva a relação fundamental da trigonometria.** (LOBO DA COSTA, 1997, p. 13).

TAREFAS: demonstrar a relação de igualdade entre as áreas dos quadrados construídos sobre a hipotenusa e os catetos de um triângulo retângulo.
TÉCNICAS: não identificadas.
NOÇÕES: semelhanças, áreas, triângulo retângulo, relação fundamental da trigonometria.

Fonte: O autor (2015).

Quadro 34

Civilização Grega, exemplo (c)

A Escola Pitagórica, fundada no século V a.C., foi responsável por descobertas na acústica, elaborando uma lei de intervalos musicais. Essa lei relacionava os diapasões de notas emitidas por cordas distendidas, sob tensões iguais, aos comprimentos das cordas. Podemos tomar a lei dos intervalos musicais como um prenúncio do aparecimento das funções seno e cosseno no osciloscópio do futuro, para se estudar o som. (LOBO DA COSTA, 1997, p. 13).

TAREFAS: elaborar uma lei de intervalos musicais; estudar o som.
TÉCNICAS: utilização das equivalências entre os diapasões de notas emitidas por cordas distendidas, sob tensões iguais, aos comprimentos das cordas.
NOÇÕES: acústica, lei dos intervalos musicais, embrionização das funções seno e cosseno.

Fonte: O autor (2015).

Quadro 35

Civilização Grega, exemplo (d)

Por volta do ano 200 a.C. os astrônomos gregos estavam muito interessados em calcular a distância entre dois pontos da superfície terrestre e também o raio da Terra. Foi **Eratóstenes de Cirene** (276 -196 a.C.), contemporâneo de **Arquimedes** (287-212 a. C.) e Aristarco (310-230 a. C.) que produziu a mais notável medida da **Antiguidade** para a circunferência da Terra, usando semelhança de triângulos e razões trigonométricas, o que o levou a perceber a necessidade de relações mais sistemáticas entre ângulos e cordas. [...] Salientamos que, para tornar possível o trabalho de **Eratóstenes**, foi determinante na época o conhecimento do conceito de ângulo e de como medi-lo. O tratado "*Sobre a medida da Terra"* resume as conclusões a que ele chegou mas, infelizmente, esses escritos se perderam e tudo o que conhecemos sobre o assunto chegou até nós pelos relatos de **Ptolomeu** e **Heron**. (LOBO DA COSTA, 1997, p. 13-14).

TAREFAS: calcular a distância entre dois pontos da superfície terrestre; calcular a medida do raio da Terra.
TÉCNICAS: não identificadas.
NOÇÕES: semelhança de triângulos, razões trigonométricas,

Fonte: O autor (2015).

Quadro 36

Civilização Grega, exemplo (e)

Hiparco construiu o que foi presumivelmente a primeira tabela trigonométrica com os valores das cordas de uma série de ângulos de 0^o a 180^o, em cuja montagem utilizou interpolação linear. Ele observou que num dado círculo a razão do arco para a corda diminui quando o arco diminui de 180^o para 0^o. Resolveu então associar a cada corda de um arco o angulo central correspondente, o que representou um grande avanço na Astronomia e por isso ele recebeu o título de **"Pai da Trigonometria".** Em linguagem moderna, esse resultado seria: $\lim_{x\to 1} \frac{sen\, x}{x} = 1$ (LOBO DA COSTA, 1997, p. 14-15).

TAREFAS: construir uma tabela trigonométrica.
TÉCNICAS: utilização da interpolação linear.
NOÇÕES: razões trigonométricas dos ângulos de 0^o a 180^o.

Fonte: O autor (2015).

Quadro 37

Civilização Grega, exemplo (f)

O Almagesto sobreviveu e por isso temos suas tabelas trigonométricas e também uma exposição dos métodos usados nas construções, o que é de grande importância para nós, visto que tanto daquela época se perdeu. Como disse Kennedy (1992): *"Para os matemáticos o Almagesto tem interesse devido às identidades trigonométricas que Ptolomeu divisou para auxiliá-lo a reunir dados para sua tabela de cordas"* (pág. 28 – cápsula 1: Larry Mossburg). (LOBO DA COSTA, 1997, p. 14-15). **TAREFAS:** construir uma tabela de cordas (aproximadamente uma tábua de senos). **TÉCNICAS**: utilização das identidades trigonométricas. **NOÇÕES**: razões trigonométricas dos ângulos de 0^o a 180^o.

Fonte: O autor (2015)..

Quadro 38

Civilização Grega, exemplo (g)

Dos treze livros que compõem o Almagesto, o primeiro contém as informações matemáticas preliminares, indispensáveis na época, para uma investigação dos fenômenos celestes, tais como proposições sobre geometria esférica, métodos de cálculo, uma tábua de cordas e explicações gerais sobre os diferentes corpos celestes. [...] Ptolomeu desenvolveu o estudo da trigonometria nos capítulos dez e onze do primeiro livro do Almagesto. O capítulo 11 consiste numa tabela de cordas e o capítulo 10 explica como tal tabela pode ser calculada. Na verdade, não existe no Almagesto nenhuma tabela contendo as "funções" seno e cosseno, mas sim a função corda do arco x, ou crd x, embora naturalmente estes termos não apareçam. (LOBO DA COSTA, 1997, p. 15-16). **TAREFAS:** investigar fenômenos celestes **TÉCNICAS**: utilização das proposições sobre geometria esférica, métodos de cálculo, uma tábua de cordas e explicações gerais sobre os diferentes corpos celestes. **NOÇÕES**: trigonometria, função corda do arco x (crd x).

Fonte: O autor (2015).

Quadro 39

Civilização Grega, exemplo (h)

[...], operando com as cordas dos arcos, Ptolomeu chegou a um equivalente das fórmulas de seno da soma e da diferença de dois arcos, isto é sen (a + b) e sen (a – b). Especialmente a fórmula para a corda da diferença foi usada por ele para a construção da tabela trigonométrica; (d) O uso, também usando cordas, do seno do arco metade: sen ^{2} (θ /2) = ½ (1 – cos θ). Em nosso entender, a mais importante contribuição do **Almagesto** foi tornar evidente a possibilidade de uma descrição quantitativa dos fenômenos naturais, pela Matemática, já que ele desenvolveu, como muito bem escreveu Aaboe (1984): *..não somente seus modelos astronômicos, mas também as ferramentas matemáticas, além da geometria elementar, necessárias para a Astronomia, entre elas a trigonometria.(pág. 128). Mais do que qualquer outro livro, o Almagesto contribuiu para a idéia tão básica nas atividades científicas, de que uma descrição quantitativa matemática dos fenômenos naturais, capaz de fornecer predições confiáveis, é possível e desejável.* (pág. 129). (LOBO DA COSTA, 1997, p. 16-17).

TAREFAS: construir uma tabela trigonométrica.
TÉCNICAS: utilização da fórmula da corda da diferença, sen (a – b)
NOÇÕES: fórmulas de sen (a + b) e sen (a – b).

Fonte O autor (2015).

Quadro 40

Civilização Indiana

A importância do **Surya**, para nós, é que ele abriu novas perspectivas para a Trigonometria por não seguir o mesmo caminho de Ptolomeu [...] No Surya**,** a relação usada era entre a metade da corda e a metade do ângulo central correspondente, chamada por eles de **jiva**. Isto possibilitou a visão de um triângulo retângulo na circunferência, como na Figura 4. Definiam o **jiva** como sendo a razão entre o cateto oposto e a hipotenusa.

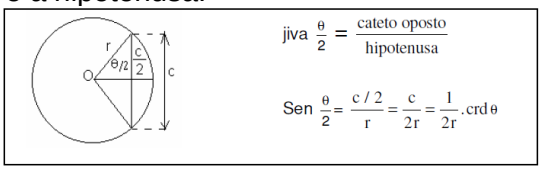


Figura 4: O "Jiva" Hindu

A metade da corda dividida pelo raio do círculo é o seno da metade do arco (ou da metade do ângulo central correspondente a todo o arco). (LOBO DA COSTA, 1997, p. 18).

TAREFAS: construir uma tabela trigonométrica.
TÉCNICAS: utilização da definição de seno de um ângulo agudo de um triângulo retângulo.
NOÇÕES: triângulo retângulo na circunferência; seno da metade do arco.

Fonte: O autor (2015).

Quadro 41

Civilização Árabe

Os estudos de **AL Battani** ficaram entre o Almagesto e Siddhanta e foi por sua influência que a trigonometria hindu foi adotada pelos árabes, principalmente a partir de sua genial idéia de introduzir o círculo de raio unitário e com isso demonstrar que a razão **jiva** é válida para qualquer triângulo retângulo, independentemente do valor da medida da hipotenusa. (LOBO DA COSTA, 1997, p. 19). **TAREFAS:** demonstrar que a razão **jiva** é válida para qualquer triângulo retângulo, independentemente do valor da medida da hipotenusa. **TÉCNICAS**: utilização de propriedade de semelhança de triângulos. **NOÇÕES**: introdução do círculo de raio unitário; seno da metade do arco.

Fonte: O autor (2015).

Com todos esses exemplos, foi possível concluir sobre as características das tarefas identificadas que:

- Nas civilizações Babilônica (Quadro 28), Egípcia (Quadro 29), Chinesa (Quadro 31) e Grega (Quadros 32, 33, 34 e 35), seus objetivos estavam direcionados para necessidades práticas;

- Concomitantemente, as civilizações Egípcia (Quadro 30) e Grega (Quadros 36, 37, 38 e 39), bem como Indiana (Quadro 40) e Árabe (Quadro 41), privilegiavam, muitas vezes, objetivos voltados para o desenvolvimento do conhecimento matemático puro.

O desenho que se configura por trás desse panorama, pode ser um dos indícios que ajudem a desvelar as rupturas epistemológicas, ao longo da história das noções matemáticas aqui investigadas. Em outras palavras, as rupturas epistemológicas podem ser compreendidas como o distanciamento entre as tarefas voltadas para as necessidades práticas (ou as aplicações) e os interesses pela purificação (ou lapidação ou formalização) do conhecimento matemático.

De forma análoga, buscou-se concluir sobre as características das técnicas associadas a tais tarefas que:

- Evocavam *propriedades geométricas planas e espaciais*, e, muitas vezes a *semelhança de triângulos*, sendo essas identificadas nos Quadros 28, 38, 30, 32, e 41, respectivamente;
- Eram baseadas em *propriedades trigonométricas* específicas, a exemplo das civilizações Egípcia (Quadro 29), grega (Quadro 32, 37, 39) e Indiana (Quadro 38), nessa ordem;
- Pinçavam de outros domínios, *propriedades alternativas* ou mais econômicas para complementar as tábuas trigonométricas, caso específico identificado no Quadro 34 (Cf. p. 219).

Dessa forma, observou-se uma variedade de técnicas, muitas vezes, utilizadas para resolver os mesmos tipos de tarefas em diferentes épocas e civilizações, contribuindo algumas vezes, para a lentidão do desenvolvimento das noções em análise, sobretudo, quando se precisava retornar ao domínio geométrico. Nesses termos, pode-se compreender a ruptura epistemológica, quando o Campo Trigonométrico toma fôlego e torna-se independente do Campo Geométrico, apesar de ter se derivado dele. No Quadro 39 (Cf. p. 222), pode-se inferir também que um exemplo dessa ruptura, repousa sobre a possibilidade de demonstração da fórmula da corda da diferença, *sen (a – b)*, por meio das propriedades algébricas.

Ao longo do trabalho de Lobo da Costa (1997), outras rupturas também foram percebidas, tais como: a Trigonometria dos hindus não seguiu os mesmos princípios de Ptolomeu; o trabalho do astrônomo persa, Nasîr ed-dên al-Tûsî que escreveu o primeiro trabalho de Trigonometria Plana desvinculando-a da Astronomia; o estudo de Regiomontanus (1436-1475) que estabeleceu as características da Trigonometria como uma ciência autônoma e independente da Astronomia.

Por fim, sobre as noções identificadas e que foram parcialmente extraídas do estudo Lobo da Costa (1997), observou-se que 92,85% delas estavam diretamente relacionadas aos conhecimentos do Campo Trigonométricos e, caso fosse considerado sua evolução histórico-epistemológica, serviriam de abrigo para a construção de sua Organização Matemática Pontual proposta por Chevallard (1998).

Assim, levando em consideração, os resultados da digressão histórica, análise epistemológica e, também, as características das tarefas, técnicas e noções

relacionadas ao saber em tela, identificadas nos quadros anteriores, arriscou-se, no próximo item, esboçar uma sequência dos marcadores no que se denominou de Transições Epistemológicas.

4.2 – Marcadores das Transições Epistemológicas (MT_E):

Com base nos estudos de Kennedy (1992) e Lobo da Costa (1997), primordialmente, foi considerado, em síntese, as seguintes características entre os estágios do desenvolvimento do Campo Trigonométrico para servirem como MT_E:

Quadro 42

Marcadores das Transições Epistemológicas (MT_E)

ESTÁGIO 01 → ESTÁGIO 02 < das sombras para as cordas > MT_{E1}: 1ª TRANSIÇÃO – passagem dos casos particulares para uma generalização.
ESTÁGIO 02 → ESTÁGIO 03 < das cordas para as esferas > MT_{E2}: 2ª TRANSIÇÃO: apelo aos elementos axiomáticos da geometria e da álgebra.
ESTÁGIO 03 → ESTÁGIO 04 < das esferas para os senos > MT_{E3}: 3ª TRANSIÇÃO: a mudança de uma TÉCNICA
ESTÁGIO 04 → ESTÁGIO 05 < dos senos para à Análise > MT_{E4}: 4ª TRANSIÇÃO: incorporação à Análise

Fonte: O autor (2015).

Por sua vez, as principais características desses estágios, bem como de seus marcadores possibilitaram observar o desenvolvimento do Campo Trigonométrico no que se refere aos seus momentos de concepção, ascensão, descompassos e bifurcações.

Nesse sentido, repousa sobre a interpretação de tal cenário, caso seja considerado, o objeto de apropriação e entendimento de diferentes leitores e instituições que o tornam o principal subsídio para a proposição de sua transposição didática, para levar até a sala de aula de Matemática elementos que permitam aos alunos a compreensão de fenômenos ondulatórios (ou circulares).

Assim, serão esses entendimentos que estarão “diluídos”, nos programas oficiais de ensino e nos livros didáticos, que propõem uma Organização Matemática das noções referentes às Funções Trigonométricas para serem, possivelmente, armazenadas na Memória de Longo Prazo dos estudantes por meio de um elenco de tipos de Tarefas e técnicas, que precisam estar abrigadas em uma ou mais tecnologias para justifica-las e que, por sua vez, necessitam alicerçarem-se em uma teoria para que, dessa forma, seja possível colocar o estudante em Atividade Matemática.

Seguindo esse modo de pensar, no capítulo seguinte foi desenvolvida a primeira parte da análise institucional, caso do Brasil, que para tanto, evocou, principalmente, as lentes de Chevallard (1998) para dar cabo desse trabalho.

CAPÍTULO V

Análise Institucional no Brasil: pela compreensão vertical da transição do Ensino das Funções Trigonométricas EM-ES.

Considerações Iniciais

O objetivo desse capítulo foi desenvolver uma análise institucional das noções das Funções Trigonométricas por meio dos documentos oficiais da educação brasileira. Além do respaldo alicerçado no caráter da pesquisa documental, esse intento tem abrigo nas investigações mobilizadas pelo matemático francês Yves Chevallard (1998) que, como criador da Teoria Antropológica do Didático (TAD), buscou fundamentar a organização do conhecimento matemático, especificamente das noções em tela, por meio de uma organização praxeológica.

Dentro da perspectiva da TAD, o contato dos estudantes com as noções matemáticas dar-se por meio de uma Atividade Matemática institucionalizada. Essa, por sua vez, tem sua gênese estruturada a partir de um aparelho complexo e dinâmico que sobrevive diante dos mecanismos de controle (pré-requisitos e observações) ditados pelos participantes, nesse caso, dos diferentes níveis de co-determinação (sociedade ↔ escola ↔ pedagogia ↔ disciplina ↔ domínio ↔ setor ↔ tema ↔ tópico), conforme Chevallard (2007a), responsáveis pela composição do sistema de ensino.

Considerando-se tal ponto de vista, entendeu-se que são nas primeiras regas estabelecidas por uma sociedade, as leis, que se inicia o processo de estruturação que pretende contribuir para a civilização de um povo.

No campo da educação brasileira, essas leis foram legitimadas ao longo da história pelo atual Ministério da Educação – MEC que tem como principal referência a LDB – Lei de Diretrizes e Base da educação nacional, lei federal 9.394/96, decretada pelo Congresso Nacional em 1996, que fundamenta, nessa ordem, as resoluções ministeriais organizadas pelo Conselho Nacional de Educação (CNE) e pela Câmara de Educação Básica (CEB), cujos resultados em prol das

demandas sociais e melhoria da qualidade do ensino, implementaram, os seguintes documentos, referências de qualidade para a educação no país:

- As Diretrizes Curriculares Nacionais Gerais para o Ensino Fundamental – DCNEF (1998; 2010);
- As Diretrizes Curriculares Nacionais Gerais para o Ensino Médio – DCNEM (1998; 2012);
- Os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Fundamental – PCNEF (1997[38]; 1998);
- Os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio – PCNEM (2000);
- Os Parâmetros Curriculares Nacionais + (Ensino Médio) – PCN^{+} (2005);
- Orientações Curriculares para o Ensino Médio – OCEM (2006).

Nesses documentos oficiais muitas são as questões que podem influenciar a constituição e institucionalização das atividades matemáticas, embora, nessa pesquisa tenham sido enfocadas questões referentes à Organização Matemática associadas às noções das Funções Trigonométricas tendo em vista os objetivos iniciais desse trabalho.

Sobretudo, repousa sobre essa justificativa que as DCNEF e DCNEM não estabelecem em seus artigos legais orientações acerca dessas noções, mas, tão somente e de modo geral, os princípios, fundamentos e procedimentos a serem considerados na organização pedagógica e curricular de todas as unidades de ensino pertencentes ao sistema brasileiro de educação. Considerando esse elenco de motivos, foram desenvolvidos os Parâmetros Curriculares Nacionais – PCNs, com a finalidade de orientar os Ensinos Fundamental e Médio nas áreas do conhecimento, classificando as disciplinas escolares pelas suas especificidades.

Dessa forma, foi demonstrado, por meio de alguns resultados, como as noções relativas às Funções Trigonométricas são introduzidas no Ensino Médio no Brasil, considerando-se para tal, os documentos (PCNs) e as mudanças neles

[38] Construídos sob o abrigo da LDB 9394/96, conforme BRASIL (1997).

estabelecidas pelo CNE/CEB, bem como pelos complementos estabelecidos no Plano Nacional de Educação em 2001.

Inicialmente e, com a finalidade de implementar tais mudanças, o ensino obrigatório foi ampliado, desde 2004, para o intervalo de 6 (seis) a 14 (quatorze) anos, constituindo-se dessa forma o Ensino Fundamental[39]. A faixa etária compreendida de 15 (quinze) a 17 (dezessete) anos direcionada para o Ensino Médio. Estabelecido tais critérios, denominou-se de Educação Básica brasileira a sequência cronológica que engloba, inclusive, os Ensinos Fundamental e Médio. Nestes termos, ratificaram-se as normativas para o Ensino Superior, sendo esse iniciado após conclusão do Ensino Médio e aprovação pelos sistemas de macroavaliações brasileiros. Foi ainda observado que de tais considerações instalaram-se necessidades de proposituras de novas recomendações curriculares, cujas intenções sinalizaram a tentativa de melhoria da qualidade do ensino, tanto na Educação Básica como no Ensino Superior.

Novamente recorrendo para os níveis de co-determinação de Chevallard (2007a), salienta-se que a inserção dessas propostas provocam efeitos e mudanças na cultura escolar dos referidos níveis de ensino e, por consequência, na transição EM-ES, cuja efetiva passagem ocasionará transformações no ES que precisam considerar as novas propostas para o EM, sobretudo, priorizando-se a (re)elaboração das novas matrizes curriculares. Seguindo esse pensamento, destaca-se que tal inquietação impactua diretamente no Curso de Licenciatura em Matemática, responsável pela formação inicial dos futuros professores que, teoricamente, deveriam apropriar-se pelas propostas contemporâneas, para a Educação Básica.

Isto posto, analisou-se as propostas oficiais via documentos disponibilizados pelo MEC para compreender as praxeologia existentes relativas às noções das Funções Trigonométricas voltadas para o Ensino Médio e, também, programa ou planos de ensino de uma universidade pública, voltados para a implementação das propostas curriculares da disciplina Cálculo I do Ensino Superior.

[39] Fixado pela Resolução CEB nº 01/2010, conforme BRASIL (2010).

Para tanto, optou-se pelo início das análises, a partir do Ensino Fundamental II, visto que pela análise epistemológica apresentada no capítulo IV, as noções iniciais de trigonometria repousam sobre o desenvolvimento da geometria que, juntamente com a aritmética e a álgebra, constituem o alicerce matemático de todas as noções relativas a esse campo do saber.

Isto posto, há necessidade de incrementar outros ingredientes para a conformação dessa análise que, nessa ordem, são os Livros Didáticos e as Macroavaliações. Tais objetos serviram para funcionar como contraponto auxiliando, por meio da comparação entre as relações institucionais esperadas e as existentes, constituindo, dessa forma, o retrato mais atual do cenário brasileiro para compreender a transição EM-ES.

Para essa sequência, articulou-se à TAD os pressupostos científicos de Dias (1998), Artigue (2004) e Gueudet (2008a), cuja experiência validou e considerou os documentos oficiais, como fontes primárias dos ambientes externos para aplicar análise praxeológica, dentre eles – os programas oficiais, livros didáticos e as macroavaliações que, quando reunidas permitiram responder a questão de pesquisa Q1 no território brasileiro.

Tal e qual foram levantados, no primeiro segmento, os programas de ensino, também foram mobilizados Livros Didáticos de Matemática dos Ensino Fundamental II e Médio, bem como selecionado a Macroavaliação denominada ENEM[40] e, posteriormente, para o Ensino Superior os planos de ensino da disciplina *Cálculo para funções de uma variável real I* (Cálculo I) da Universidade de São Paulo – USP, Livro Didático de Cálculo I de Stewart (2011) e as Macroavaliações ENADE[41]. Aplicando-se lentes microscópicas sobre a dinâmica, analisada por meio da TAD, foi possível esboçar a estrutura da *"gênese da Atividade Matemática"*, não visível e, talvez, não percebida institucionalmente, acerca do funcionamento da mesma, conforme segue:

[40] ENEM – Exame nacional do Ensino Médio.
[41] ENADE - Exame Nacional de Desempenho de Estudantes.

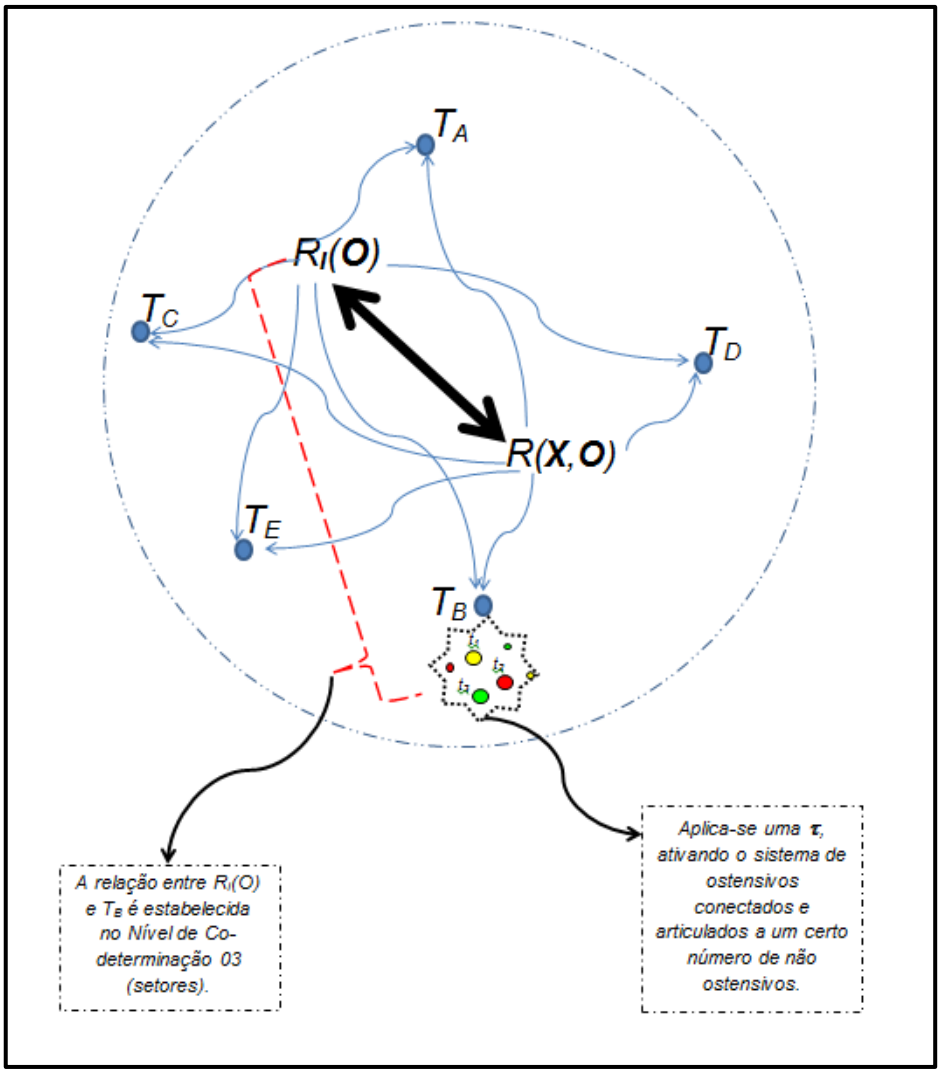


Figura 35: Gênese da Atividade Matemática.
Fonte: O autor (2015).

Como motor do conhecimento científico, a Atividade Matemática, embutida em ambos os níveis de ensino, médio e superior, foi analisada considerando-se uma sequência de questionamentos que ajudaram a desvelar algumas impressões iniciais, a saber: Como estão estruturados os Programas de Ensino de Matemática no Brasil? Como são introduzidas técnicas relativas ao ensino das Funções Trigonométricas nos Livros Didáticos brasileiros? Como essas técnicas são usadas na resolução dos tipos de Tarefas dispostas nesses livros? Quais tipos de Tarefas são privilegiados nas Macrosavaliações brasileiras para avaliarem, segundo Robert (1997, 1998), o Nível de Funcionamento do Conhecimento (NFC), dos estudantes acerca das noções das Funções Trigonométricas? Esses tipos de Tarefas estão previstos nos programas oficiais de ensino de matemática no Brasil?

Nessas avaliações, tanto os tipos de Tarefas, como as técnicas associadas foram desenvolvidas nos Livros Didáticos do Ensino Médio?

Dessa forma, entendeu-se essa análise como vertical, pois existe uma elevação do Ensino Médio para o Ensino Superior, considerando-se para ambos os lados à estrutura abaixo:

Ensino Médio: Análise dos Documentos Oficiais (Programas de Ensino); Análise dos Livros Didáticos; Análise das Macroavaliações (ENEM).

Ensino Superior: Análise dos Documentos Oficiais (Planos de Ensino); Análise dos Livros Didáticos; Análise das Macroavaliações (ENADE).

Por fim, a **Transição do Ensino das Funções Trigonométricas Ensino Médio-Ensino Superior**.

Destarte, incluíram-se nessa redação algumas figuras, quadros e tabelas, cuja finalidade foi informar parciais dos resultados dos subitens dos níveis de ensino analisados. A conclusão da análise foi embasada através do cruzamento dos dados verificados nas ferramentas de apresentação de dados que destacaram os sinais identificados como resultados das diversas análises.

5.1 – Educação Básica

5.1.1 – Análise dos Documentos Oficiais (Programas de Ensino de Matemática)

5.1.1.1 – Programas de Ensino de Matemática: PARÂMETROS CURRICULARES NACIONAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL (PCNEF).

Inicialmente, foi observado que os PCNEF (BRASIL, 1997), relativos ao Ensino Fundamental estavam divididos de forma a atenderem quatro ciclos:

- 1º Ciclo, responsável pela estruturação das 1ª e 2ª séries, atualmente equivalentes a 2º e 3º ano, atendendo as crianças de 7 e 8 anos, respectivamente. (BRASIL, 1997). No modelo atual, as crianças de 6 anos deixaram de pertencer a etapa da Educação Infantil e passaram a frequentar o 1º ano do Ensino Fundamental;

- 2º Ciclo, responsável pela estruturação das 3ª e 4ª séries, atualmente equivalentes a 4º e 5º ano, atendendo as crianças de 9 e 10 anos, respectivamente. (BRASIL, 1997);
- 3º Ciclo, responsável pela estruturação das 5ª e 6ª séries, atualmente equivalentes a 6º e 7º ano, atendendo as crianças de 11 e 12 anos, respectivamente. (BRASIL, 1998);
- 4º Ciclo, responsável pela estruturação das 7ª e 8ª séries, atualmente equivalentes a 8º e 9º ano, atendendo as crianças de 13 e 14 anos, respectivamente. (BRASIL, 1998).

Compreendida a estrutura inicial dos PCNEF, passou-se para identificação dos termos relativos às noções matemáticas, privilegiadas nessa pesquisa: trigonometria, triângulo retângulo e, finalmente, tendo motivação na análise epistemológica, geometria.

Nesse levantamento, os *domínios*[42] matemáticos verificados nesses documentos estão estruturados, considerando-se os níveis de co-determinação de Chevallard (2007a), a partir de quatro setores:

1. Números e operações.
2. Espaço e forma.
3. Grandezas e medidas.
4. Tratamento da informação.

Vale salientar que, segundo os PCNEF: Matemática (BRASIL, 1998, p. 49), esses setores estão contemplados pelos seguintes *domínios* matemáticos: número e operações (*domínios* da Aritmética e da Álgebra), espaço e forma (*domínio* da Geometria), grandezas e medidas (interligações entre os *domínios* da Aritmética, Álgebra e Geometria) e tratamento da informação (*domínio* da Estatística). Essas classificações facilitaram a compreensão da Organização Matemática em torno das noções das Funções Trigonométricas aqui investigadas.

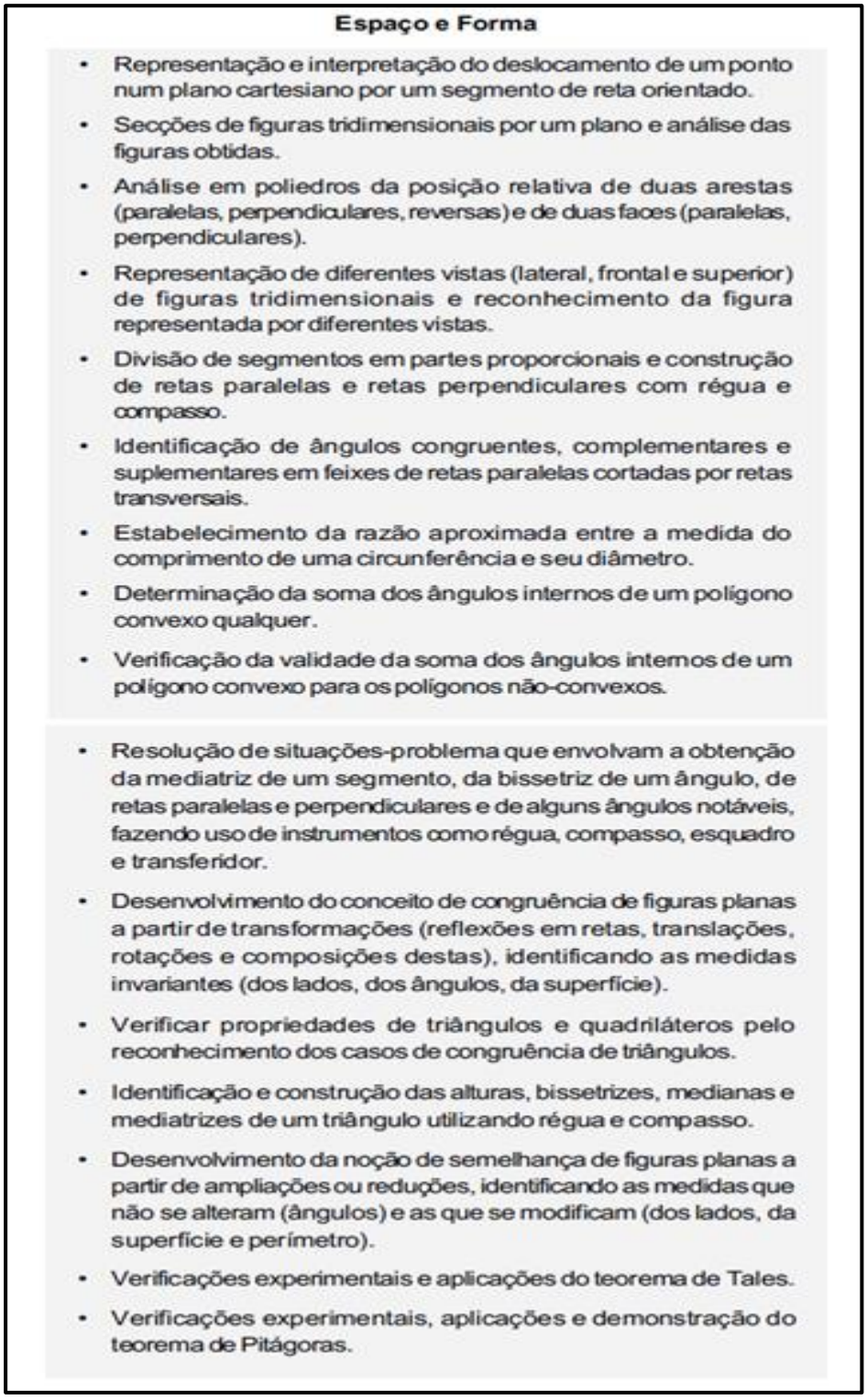
Com efeito, analisando-se os PCNEF: Matemática (BRASIL, 1997, 1998), verificou-se que apenas no 4º Ciclo, algumas aproximações com as noções das

[42] Compreendeu-se tais *domínios,* a partir do documento em análise, como sendo os três grandes campos da Matemática: *Aritmética, Álgebra e Geometria* e da Estatística. (BRASIL, 1998, p. 49).

Funções Trigonométricas poderia ser desveladas, pois nos ciclos anteriores os setores relativos ao domínio da geometria buscaram caracterizá-la em si mesma, preservando-se ainda seus elementos rudimentares.

Especificamente, o estudo do setor “espaço e forma”, privilegia ainda a análise das figuras por meio das observações, manuseios e construções para que sejam facilitadas a identificação de propriedades. Dessa forma, os alunos desse ciclo darão início às exigências iniciais estabelecidas pelo raciocínio dedutivo, rumo, inclusive, a aquisição do caráter formal e axiomático da geometria.

Seguindo-se os níveis de co-determinação, localizaram-se em cada um dos *setores* anunciados, *temas* de estudo que privilegiam os conceitos e procedimentos. No que se referem ao domínio da geometria, destacaram-se as seguintes figuras:

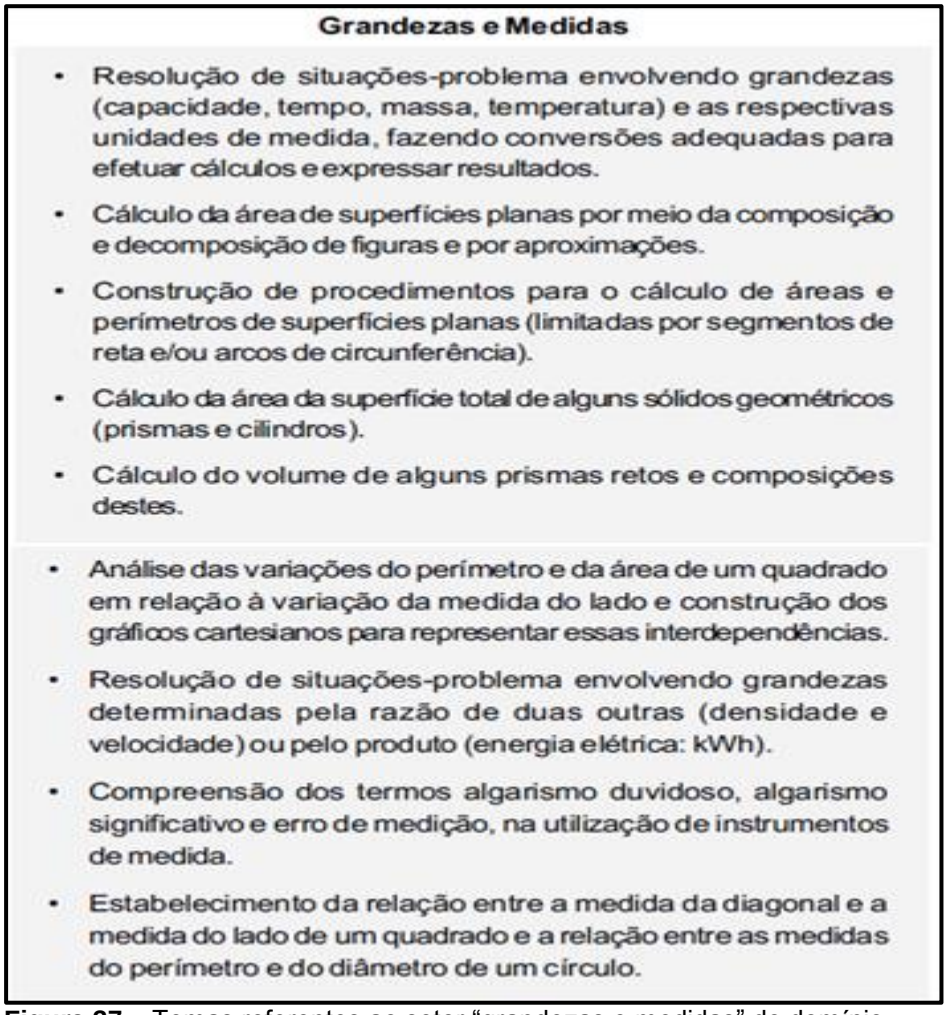


Espaço e Forma

- Representação e interpretação do deslocamento de um ponto num plano cartesiano por um segmento de reta orientado.
- Secções de figuras tridimensionais por um plano e análise das figuras obtidas.
- Análise em poliedros da posição relativa de duas arestas (paralelas, perpendiculares, reversas) e de duas faces (paralelas, perpendiculares).
- Representação de diferentes vistas (lateral, frontal e superior) de figuras tridimensionais e reconhecimento da figura representada por diferentes vistas.
- Divisão de segmentos em partes proporcionais e construção de retas paralelas e retas perpendiculares com régua e compasso.
- Identificação de ângulos congruentes, complementares e suplementares em feixes de retas paralelas cortadas por retas transversais.
- Estabelecimento da razão aproximada entre a medida do comprimento de uma circunferência e seu diâmetro.
- Determinação da soma dos ângulos internos de um polígono convexo qualquer.
- Verificação da validade da soma dos ângulos internos de um polígono convexo para os polígonos não-convexos.

- Resolução de situações-problema que envolvam a obtenção da mediatriz de um segmento, da bissetriz de um ângulo, de retas paralelas e perpendiculares e de alguns ângulos notáveis, fazendo uso de instrumentos como régua, compasso, esquadro e transferidor.
- Desenvolvimento do conceito de congruência de figuras planas a partir de transformações (reflexões em retas, translações, rotações e composições destas), identificando as medidas invariantes (dos lados, dos ângulos, da superfície).
- Verificar propriedades de triângulos e quadriláteros pelo reconhecimento dos casos de congruência de triângulos.
- Identificação e construção das alturas, bissetrizes, medianas e mediatrizes de um triângulo utilizando régua e compasso.
- Desenvolvimento da noção de semelhança de figuras planas a partir de ampliações ou reduções, identificando as medidas que não se alteram (ângulos) e as que se modificam (dos lados, da superfície e perímetro).
- Verificações experimentais e aplicações do teorema de Tales.
- Verificações experimentais, aplicações e demonstração do teorema de Pitágoras.

Figura 36 – Temas referentes ao setor “espaço e forma” do domínio da geometria.
Fonte: BRASIL (1998, p. 88-89)



Grandezas e Medidas

- Resolução de situações-problema envolvendo grandezas (capacidade, tempo, massa, temperatura) e as respectivas unidades de medida, fazendo conversões adequadas para efetuar cálculos e expressar resultados.
- Cálculo da área de superfícies planas por meio da composição e decomposição de figuras e por aproximações.
- Construção de procedimentos para o cálculo de áreas e perímetros de superfícies planas (limitadas por segmentos de reta e/ou arcos de circunferência).
- Cálculo da área da superfície total de alguns sólidos geométricos (prismas e cilindros).
- Cálculo do volume de alguns prismas retos e composições destes.

- Análise das variações do perímetro e da área de um quadrado em relação à variação da medida do lado e construção dos gráficos cartesianos para representar essas interdependências.
- Resolução de situações-problema envolvendo grandezas determinadas pela razão de duas outras (densidade e velocidade) ou pelo produto (energia elétrica: kWh).
- Compreensão dos termos algarismo duvidoso, algarismo significativo e erro de medição, na utilização de instrumentos de medida.
- Estabelecimento da relação entre a medida da diagonal e a medida do lado de um quadrado e a relação entre as medidas do perímetro e do diâmetro de um círculo.

Figura 37 – Temas referentes ao setor "grandezas e medidas" do domínio da geometria.
Fonte: BRASIL (1998, p. 89-90)

Nas Figuras 36 e 37, dentre os 16 e 09 temas apresentados, respectivamente, nenhum deles fazem referência ao Campo Trigonométrico, mas apenas, configuram-se como orientações que devem ser seguidas pelo professor.

Essa constatação serve para demarcar um **sinal**[43] **01** (S_{pEFu}-01[44]): ausência de tipos de Tarefas que permitissem desvelar a praxeologia existente das noções das Funções Trigonométricas nos PCNEF.

Na sequência, analisou-se o próximo documento já direcionado para o Ensino Médio.

[43] Os **sinais** dos programas serão representados por S_p.
[44] S_{pEFu}: Sinal dos programas do Ensino Fundamental.

5.1.1.2 – Programas de Ensino de Matemática: PARÂMETROS CURRICULARES NACIONAIS DO ENSINO MÉDIO (PCNEM).

O contato primeiro com esses documentos sinalizaram como necessário, a consideração dos objetivos direcionados para a área de Matemática. Nesses termos, destacam-se:

> • compreender os conceitos, procedimentos e estratégias matemáticas que permitam a ele desenvolver estudos posteriores e adquirir uma formação científica geral;
> • aplicar seus conhecimentos matemáticos a situações diversas, utilizando-os na interpretação da ciência, na atividade tecnológica e nas atividades cotidianas;
> • analisar e valorizar informações provenientes de diferentes fontes, utilizando ferramentas matemáticas para formar uma opinião própria que lhe permita expressar-se criticamente sobre problemas da Matemática, das outras áreas do conhecimento e da atualidade;
> • desenvolver as capacidades de raciocínio e resolução de problemas, de comunicação, bem como o espírito crítico e criativo;
> • utilizar com confiança procedimentos de resolução de problemas para desenvolver a compreensão dos conceitos matemáticos;
> • expressar-se oral, escrita e graficamente em situações matemáticas e valorizar a precisão da linguagem e as demonstrações em Matemática;
> • estabelecer conexões entre diferentes temas matemáticos e entre esses temas e o conhecimento de outras áreas do currículo. (BRASIL, 2000, p. 42).

Essa iniciativa encontrou abrigo partindo-se das considerações iniciais que buscaram mostrar a importância do desenvolvimento do conhecimento matemático para o nível de ensino em tela, embora não se tenha verificado exemplos pontuais, referindo-se às Funções Trigonométricas.

No entanto, cabe ainda considerar o apelo ao *"desenvolvimento de conhecimentos práticos, contextualizados, que respondam às necessidades da vida contemporânea, e o desenvolvimento de conhecimentos mais amplos e abstratos, que correspondam a uma cultura geral e a uma visão de mundo."* (BRASIL, 2000, p. 06).

Tal constatação é ainda mais valorizada pelo documento, quando se consideram aspectos como:

> O critério central é o da contextualização e da interdisciplinaridade, ou seja, é o potencial de um tema permitir conexões entre diversos conceitos matemáticos e entre diferentes formas de pensamento matemático, ou, ainda, a relevância cultural do tema, tanto no que diz respeito às suas aplicações dentro ou fora da Matemática, como à sua importância histórica no desenvolvimento da própria ciência. (BRASIL, 2000, p. 43).

Nesse sentido, salienta-se um, ainda de modo generalista, que:

> Um primeiro exemplo disso pode ser observado com relação às funções. O ensino isolado desse tema não permite a exploração do caráter integrador que ele possui. Devemos observar que uma parte importante da Trigonometria diz respeito às funções trigonométricas e seus gráficos. (BRASIL, 2000, p. 43).

E, para finalizar as sucessões de exemplos:

> Outro tema que exemplifica a relação da aprendizagem de Matemática com o desenvolvimento de habilidades e competências é a Trigonometria, desde que seu estudo esteja ligado às aplicações, evitando-se o investimento excessivo no cálculo algébrico das identidades e equações para enfatizar os aspectos importantes das funções trigonométricas e da análise de seus gráficos. Especialmente para o indivíduo que não prosseguirá seus estudos nas carreiras ditas exatas, o que deve ser assegurado são as aplicações da Trigonometria na resolução de problemas que envolvem medições, em especial o cálculo de distâncias inacessíveis, e na construção de modelos que correspondem a fenômenos periódicos. Nesse sentido, um projeto envolvendo também a Física pode ser uma grande oportunidade de aprendizagem significativa. (BRASIL, 2000, p. 44).

Elencados objetivos, considerações e exemplos, não há dúvidas que o presente documento oficial legitima a importância do estudo, tanto da Trigonometria como das Funções Trigonométricas no Ensino Médio. Mas, não permite ao professor seguir com objetividade um guia por meio de uma lista de tipos de Tarefas que possibilitem aos estudantes entrarem em ação, por meio da Atividade Matemática. Essa lacuna assinala o sinal (S_{pEMe}-02[45]): ausência de tipos de Tarefas que permitissem desvelar a praxeologia existentes das noções das Funções Trigonométricas nos PCNEM.

Observou-se ainda que, essas ausências deram continuidade às lacunas percebidas, nos Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Fundamental, cuja

[45] S_{pEMe}: Sinal dos programas do Ensino Médio.

fragilidade caracteriza preocupações com a formação social em detrimento de uma formação teórica. Esses prejuízos podem influenciar no processo de transição EM-ES, bem como no desenvolvimento das noções de Cálculo Diferencial e Integral quando essas evocarem os conhecimentos supostamente disponíveis das Funções Trigonométricas, por exemplo.

Percebido a forma superficial como as noções das Funções Trigonométricas foram tratadas nos Parâmetros Curriculares Nacionais dos Ensinos Fundamental e Médio, optou-se por continuar investigando uma publicação ministerial de 2002, o PCN+, produzido para tentar suprir críticas de diversos educadores, também apontadas nessa análise.

5.1.1.3 – Programas de Ensino de Matemática: PCN+: ENSINO MÉDIO – orientações educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais.

Esse novo formato dos Parâmetros Curriculares Nacionais, PCN+, assegura preencher as lacunas e críticas encontradas no texto anterior que foi planejado para o Ensino Médio no Brasil. Nas suas intenções iniciais, foi possível verificar que a motivação e justificativa tiveram por princípio facilitar a organização do trabalho na escola. Para tal, além de reforçar a articulação entre as competências gerais previstas para essa etapa da escolarização, propõe sugestões para a organização curricular e exemplifica algumas práticas educativas. Esses incrementos caracterizaram-no, de antemão, como um diferencial da sua versão anterior publicada no ano de 2000.

Outra marca considerada como inovadora repousa sobre o objetivo de preparar o estudante para a vida e não, como se fazia no antigo 2º grau, exclusivamente para o exame denominado vestibular, cuja aprovação legitimava o ingresso no nível superior. Esse intento exigiu que o formato dos novos PNC+ auxiliassem as escolas na reformulação do seu projeto pedagógico, tendo em vista que muitas dessas preservavam suas práticas, cujos propósitos tentaram atender necessidades anteriores que já estavam obsoletas nas circunstâncias atuais.

Um exemplo dessa nova versão foi ter melhor explicitado que os PCNEM, a perspectiva do desenvolvimento de conhecimentos, competências, disciplinas e seus temas estruturadores, anteriormente não existentes. Nesse sentido, foi lembrado nos PCN+ a seguinte reflexão:

> Para quem possa temer que se estejam violando os limites disciplinares, quando estes se compõem com conhecimentos e competências, vale lembrar que as próprias formas de organização do conhecimento, as disciplinas, têm passado por contínuos rearranjos. Muitas disciplinas acadêmicas e muitos campos da cultura resultam de processos recentes de sistematização de conhecimentos práticos ou teóricos, reunindo elementos que, em outras épocas, estavam dispersos em distintas especialidades. (BRASIL, 2002, p.14).

Ao que se refere à disciplina Matemática, os eixos ou temas estruturadores[46] foram apresentados em três blocos e desenvolvidos concomitantemente nas três séries do Ensino Médio, a saber:

- Álgebra: números e funções;
- Geometria e medidas;
- Análise de dados.

Diferentemente, do que se identificou nos PCNEF, esses três eixos estruturadores estabelecem-se como os *domínios* que, por sua vez, permite localizar no *setor* das funções, os *temas* que referenciaram as noções das Funções Trigonométricas. Conforme consta nesse documento, para o desenvolvimento do eixo da Álgebra *"[...] são propostas duas unidades temáticas:* ***variação de grandezas*** *e* ***trigonometria***." (BRASIL, 2002, p. 120).

Na sequência, os elementos bloco prático-técnico **[T/τ]** – saber/fazer – tipos de Tarefas e técnicas, relativos a esse domínio foram identificados apenas no nível de gênero de tarefas, pois não especificam com precisão qual a determinação que evoca a noção Matemática, responsável pela mobilização da Atividade Matemática.

[46] Compreendeu-se esses eixos ou temas estruturadores como as grandes entradas matemáticas, ou seja, os *domínios* de onde poderão decorrer, conforme os níveis de co-detreminação de Chevallard (2007a), os setores, temas e tópicos.

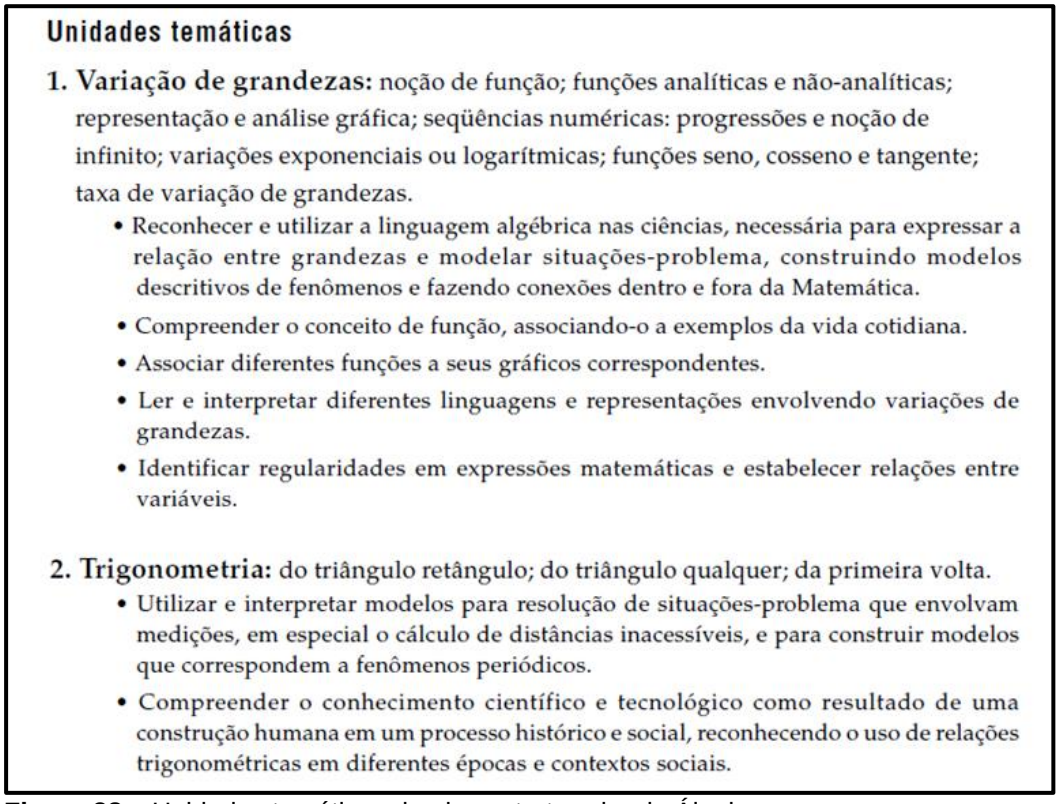
> Os procedimentos básicos desse tema se referem a calcular, resolver, identificar variáveis, traçar e interpretar gráficos e resolver equações de acordo com as propriedades das operações no conjunto dos números reais e as operações válidas para o cálculo algébrico. (BRASIL, 2002, p. 120-121).

Por outro lado, assinala uma preocupação com o Campo Trigonométrico quando destaca que

> Apesar de sua importância, tradicionalmente a **trigonometria** é apresentada desconectada das aplicações, investindo-se muito tempo no cálculo algébrico das identidades e equações em detrimento dos aspectos importantes das funções trigonométricas e da análise de seus gráficos. O que deve ser assegurado são as aplicações da trigonometria na resolução de problemas que envolvem medições, em especial o cálculo de distâncias inacessíveis e para construir modelos que correspondem a fenômenos periódicos. Dessa forma, o estudo deve se ater às funções seno, cosseno e tangente com ênfase ao seu estudo na primeira volta do círculo trigonométrico e à perspectiva histórica das aplicações das relações trigonométricas. Outro aspecto importante do estudo deste tema é o fato desse conhecimento ter sido responsável pelo avanço tecnológico em diferentes épocas, como é o caso do período das navegações ou, atualmente, na agrimensura, o que permite aos alunos perceberem o conhecimento matemático como forma de resolver problemas que os homens se propuseram e continuam se propondo. (BRASIL, 2002, p. 122).

Nessa demonstração de valor dispensado a esse campo, observou-se certo nível de consciência da necessidade de se considerar a análise epistemológica, cuja ausência afasta aspectos importantes, como a análise dos gráficos das Funções Trigonométricas. Nesse excerto, ratifica-se, em nível oficial, o que deve ser assegurado como forma de mobilizar a sinfonia orquestrada, das funções cognitivas rumo à aprendizagem, pois todas as recomendações explicitadas constituem o arsenal que tornará atrativo e, por isso, dará sentido e significado, para que sejam pensados tipos de Tarefas que considerem a resolução de problemas como motor do desenvolvimento histórico-epistemológico das Funções Trigonométricas.

Mais especificamente, identificaram-se na figura abaixo, os conteúdos e habilidades a serem desenvolvidas pelo tema proposto:



Unidades temáticas

1. **Variação de grandezas:** noção de função; funções analíticas e não-analíticas; representação e análise gráfica; seqüências numéricas: progressões e noção de infinito; variações exponenciais ou logarítmicas; funções seno, cosseno e tangente; taxa de variação de grandezas.
   - Reconhecer e utilizar a linguagem algébrica nas ciências, necessária para expressar a relação entre grandezas e modelar situações-problema, construindo modelos descritivos de fenômenos e fazendo conexões dentro e fora da Matemática.
   - Compreender o conceito de função, associando-o a exemplos da vida cotidiana.
   - Associar diferentes funções a seus gráficos correspondentes.
   - Ler e interpretar diferentes linguagens e representações envolvendo variações de grandezas.
   - Identificar regularidades em expressões matemáticas e estabelecer relações entre variáveis.

2. **Trigonometria:** do triângulo retângulo; do triângulo qualquer; da primeira volta.
   - Utilizar e interpretar modelos para resolução de situações-problema que envolvam medições, em especial o cálculo de distâncias inacessíveis, e para construir modelos que correspondem a fenômenos periódicos.
   - Compreender o conhecimento científico e tecnológico como resultado de uma construção humana em um processo histórico e social, reconhecendo o uso de relações trigonométricas em diferentes épocas e contextos sociais.

Figura 38 – Unidades temáticas do eixo estruturador da Álgebra.
Fonte: BRASIL (2002, p. 122-123)

Ainda assim e, considerando-se as observações anteriores como uma atitude positiva e abrigada pela análise epistemológica descrita no capítulo IV desse texto, não foi possível identificar os tipos de Tarefas que permitam os atores dos níveis de co-determinação (sociedade ↔ escola ↔ pedagogia ↔ disciplina), ou seja, tantos os autores de livros didáticos, como professores, pais e alunos, visualizar a hierarquia entre as Organizações Matemáticas (pontual, local, regional e global) que, conforme Chevallard (1998) são necessárias para a mobilização da Atividade Matemática, precisando essas estarem bem estabelecidas com o intuito de possibilitar que a transição intramatemática entre elas agregue o menor número de rupturas epistemológicas possíveis.

Essa carência aponta o sinal (S_{pEMe}-03[47]): ausência de tipos de Tarefas que permitissem desvelar a praxeologia existentes das noções das Funções Trigonométricas nos PCN+.

[47] S_{pEMe}: Sinal dos programas do Ensino Médio.

Apesar dessa constatação, encontrou-se ainda uma proposta para dispor os temas relativos aos três eixos estruturadores ao longo dos três anos do Ensino Médio, a saber:

1ª série	2ª série	3ª série
1. Noção de função; funções analíticas e não-analíticas; análise gráfica; seqüências numéricas; função exponencial ou logarítmica. 1. Trigonometria do triângulo retângulo.	1. Funções seno, cosseno e tangente. 1. Trigonometria do triângulo qualquer e da primeira volta.	1. Taxas de variação de grandezas.
2. Geometria plana: semelhança e congruência; representações de figuras.	2. Geometria espacial: poliedros; sólidos redondos; propriedades relativas à posição; inscrição e circunscrição de sólidos. 2. Métrica: áreas e volumes; estimativas.	2. Geometria analítica: representações no plano cartesiano e equações; intersecção e posições relativas de figuras.
3. Estatística: descrição de dados; representações gráficas.	3. Estatística: análise de dados. 3. Contagem.	3. Probabilidade.

Figura 39 – Proposta de distribuição dos temas concomitantemente nos três anos do Ensino Médio.
Fonte: BRASIL (2002, p. 128)

Isto posto, verificou-se que além de nada acrescentar no que se refere à compreensão das praxeologia existentes, essa proposta permite que a escolha dos conteúdos seja flexível e, ao mesmo tempo, abrangente. Isso pode contribuir para a instalação de dificuldades na escolha do livro didático, bem como na preparação do estudante para o Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM), prejudicando a transição EM-ES. (S_{pEMe}-04)

Outra observação repousa na identificação das primeiras noções trigonométricas, não verificadas pela análise dos PCNEF, estarem propostas pela primeira vez, no *domínio* da Álgebra e no final da primeira etapa da 1ª série do Ensino Médio, sendo a transição intramatemática – trigonometria do triângulo retângulo para trigonometria da primeira volta (círculo trigonométrico), ocorrida nesse mesmo nível escolar. (S_{pEMe}-05)

Cabe ainda enfatizar que ao alocar as noções de trigonometria no triângulo retângulo no *domínio* da Álgebra, os PCN+ comprovam a origem da ruptura epistemológica ao separar tais noções do domínio da geometria, conforme foi verificado no capítulo IV dessa pesquisa. (S_{pEMe}-06)

Também é questionável a ordem que é proposta, na 2ª série do Ensino Médio, para apresentar as noções trigonométricas na circunferência, já que as Funções Trigonométricas seno, cosseno e tangente, derivam-se da trigonometria da primeira volta como foi denominada no documento. (S_{pEMe}-07)

Finalizando-se a identificação e caracterização desses sinais, foi também localizado um documento subsequente aos PCN+, as Orientações Curriculares para o Ensino Médio, cuja justificativa para a sua elaboração, articula-se a partir de amplas discussões entre os integrantes das equipes técnicas das Secretarias Estaduais de Educação, professores, alunos e representantes da comunidade acadêmica objetivando-se a democratização e melhoria da qualidade do ensino público brasileiro.

Dentro dessa dimensão, deu-se prosseguimento à identificação de praxeologias que possibilitassem aos interessados, mobilizarem a Atividade Matemática por meio, nesse caso, das noções das Funções Trigonométricas, restaurando-se as fragilidades verificadas nessa etapa da análise.

5.1.1.4 – Programas de Ensino de Matemática: ORIENTAÇÕES CURRICULARES PARA O ENSINO MÉDIO (OCEM).

Essa nova proposta, considera de pronto, as DCNEM, PCNEM e os PCN+, enfatizando-se a necessidade de desenvolvimento das habilidades e competências por meio da disciplina Matemática, no que se refere às relacionadas à representação, compreensão, comunicação, investigação e, também, à contextualização sociocultural.

Nesse sentido, o documento das OCEM tratou, especificamente, de três aspectos: *"a escolha de conteúdos; a forma de trabalhar os conteúdos; o projeto*

pedagógico e a organização curricular" (BRASIL, 2006). Cabe aqui, salientar que interessou a presente pesquisa a identificação das praxelogias referentes às noções das Funções Trigonométricas passíveis de localização nas OCEM.

Considerando-se tais aspectos, as OCEM partem de quatro expectativas – que auxiliaram a escolha de conteúdos – previstas para os estudantes constituírem a própria formação Matemática no Ensino Médio, a saber:

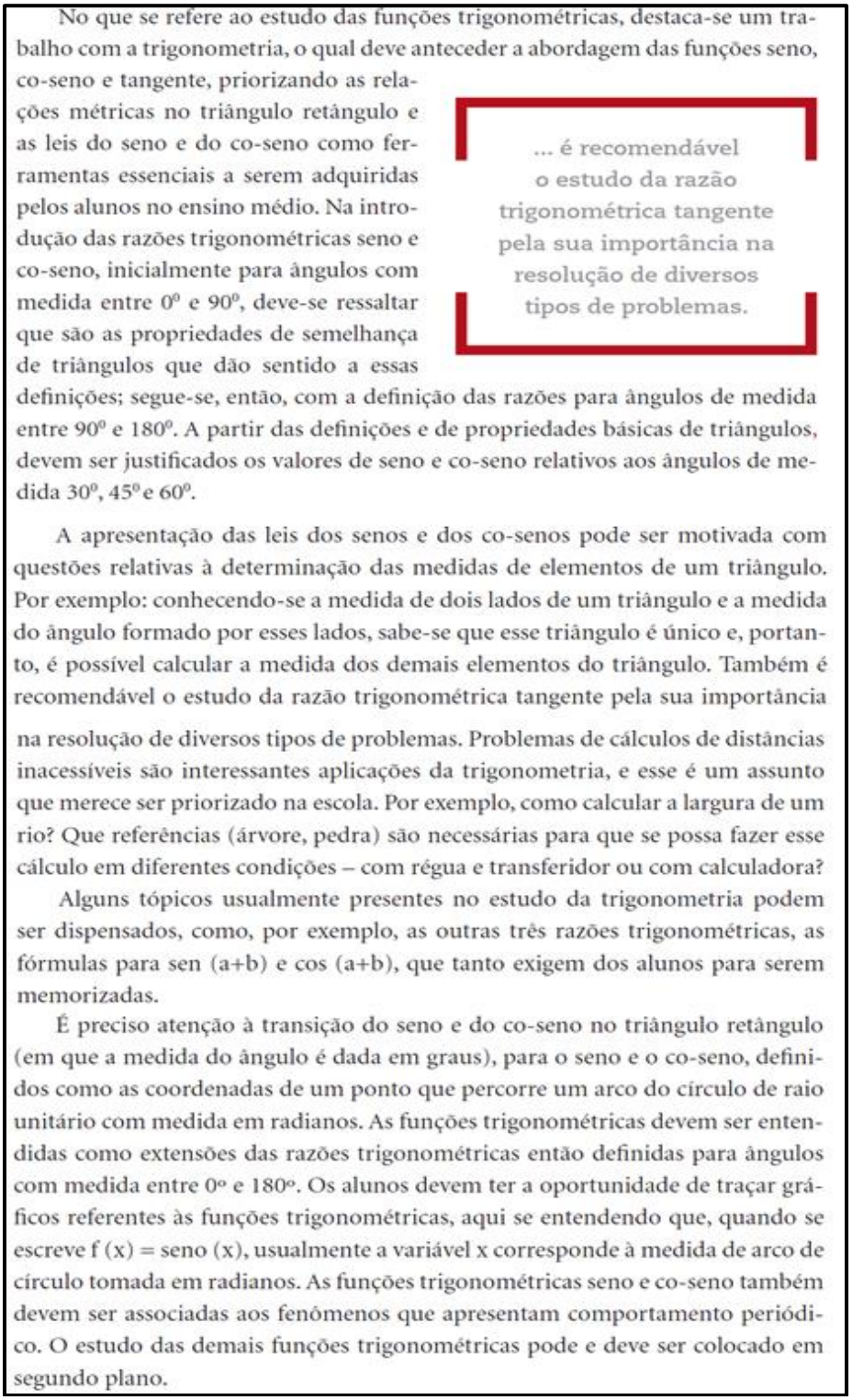
> - Usarem a Matemática para resolver problemas práticos do quotidiano e modelar fenômenos em outras áreas do conhecimento;
> - Compreenderem que a Matemática é uma ciência com características próprias, que se organiza via teoremas e demonstrações;
> - Percebam a Matemática como um conhecimento social e historicamente construído;
> - Saibam apreciar a importância da Matemática no desenvolvimento científico e tecnológico. (BRASIL, 2006, P. 69)

Com efeito, essa lista de expectativas partiu do *"princípio de que toda situação de ensino e aprendizagem deve agregar o desenvolvimento de habilidades que caracterizem o 'pensar matematicamente'"* (BRASIL, 2006, p. 70), elegendo, dessa forma, quatro blocos para organizarem os conteúdos básicos:

- Números e operações;
- Funções;
- Geometria;
- Análise de dados e probabilidade.

Evocando-se os níveis de co-determinação de Chevallard (2007a), esses blocos foram compreendidos como os *domínios* matemáticos responsáveis pelas grandes entradas matemáticas no Ensino Médio.

Pode-se ainda observar que, é no *domínio* das Funções que foram identificados, como *setores*, as Funções Trigonométricas, conforme consta na figura a seguir:



No que se refere ao estudo das funções trigonométricas, destaca-se um trabalho com a trigonometria, o qual deve anteceder a abordagem das funções seno, co-seno e tangente, priorizando as relações métricas no triângulo retângulo e as leis do seno e do co-seno como ferramentas essenciais a serem adquiridas pelos alunos no ensino médio. Na introdução das razões trigonométricas seno e co-seno, inicialmente para ângulos com medida entre 0^0 e 90^0, deve-se ressaltar que são as propriedades de semelhança de triângulos que dão sentido a essas definições; segue-se, então, com a definição das razões para ângulos de medida entre 90^0 e 180^0. A partir das definições e de propriedades básicas de triângulos, devem ser justificados os valores de seno e co-seno relativos aos ângulos de medida 30^0, 45^0 e 60^0.

... é recomendável o estudo da razão trigonométrica tangente pela sua importância na resolução de diversos tipos de problemas.

A apresentação das leis dos senos e dos co-senos pode ser motivada com questões relativas à determinação das medidas de elementos de um triângulo. Por exemplo: conhecendo-se a medida de dois lados de um triângulo e a medida do ângulo formado por esses lados, sabe-se que esse triângulo é único e, portanto, é possível calcular a medida dos demais elementos do triângulo. Também é recomendável o estudo da razão trigonométrica tangente pela sua importância na resolução de diversos tipos de problemas. Problemas de cálculos de distâncias inacessíveis são interessantes aplicações da trigonometria, e esse é um assunto que merece ser priorizado na escola. Por exemplo, como calcular a largura de um rio? Que referências (árvore, pedra) são necessárias para que se possa fazer esse cálculo em diferentes condições – com régua e transferidor ou com calculadora?

Alguns tópicos usualmente presentes no estudo da trigonometria podem ser dispensados, como, por exemplo, as outras três razões trigonométricas, as fórmulas para sen (a+b) e cos (a+b), que tanto exigem dos alunos para serem memorizadas.

É preciso atenção à transição do seno e do co-seno no triângulo retângulo (em que a medida do ângulo é dada em graus), para o seno e o co-seno, definidos como as coordenadas de um ponto que percorre um arco do círculo de raio unitário com medida em radianos. As funções trigonométricas devem ser entendidas como extensões das razões trigonométricas então definidas para ângulos com medida entre 0^o e 180^o. Os alunos devem ter a oportunidade de traçar gráficos referentes às funções trigonométricas, aqui se entendendo que, quando se escreve f (x) = seno (x), usualmente a variável x corresponde à medida de arco de círculo tomada em radianos. As funções trigonométricas seno e co-seno também devem ser associadas aos fenômenos que apresentam comportamento periódico. O estudo das demais funções trigonométricas pode e deve ser colocado em segundo plano.

Figura 40 – Lugar do *setor* “Funções Trigonométricas” nas OCEM.
Fonte: BRASIL (2006, p. 73-74)

Ao apreciar as orientações descritas na Figura 40, algumas considerações chamaram atenção e foram identificadas, permitindo-se, nesse sentido, as seguintes conclusões preliminares:

- Em primeiro lugar, S_{pEMe}-08, observou-se um trabalho com a trigonometria – relações métricas no triângulo retângulo e leis dos

senos e cossenos – para atenderem duas condições: (a) servirem como ferramentas essenciais a serem adquiridas pelos alunos do Ensino Médio; (b) funcionarem como pré-requisitos para o estudo das Funções Trigonométricas. Com tais destaques, conclui-se que: é no Ensino Médio que se estabelece pela primeira vez o contato dos estudantes com o Campo Trigonométrico, admitindo-se a hierarquia entre a trigonometria do triângulo retângulo e a trigonometria da circunferência.

- Em segundo lugar, S_{pEMe}-09, a necessidade de evocação à geometria, por meio das propriedades de semelhanças de triângulos, para introduzir as noções das razões trigonométricas seno e cosseno considerando-se os ângulos com medidas entre 0º e 90º que, conforme o documento em tela, tais propriedades dão sentido a definição dessas noções. Como conclusão, verificou-se que tal necessidade: (a) demarca a mudança entre o domínio da geometria para o domínio das funções; (b) orienta para que a seja diminuída a ruptura epistemológica sobre as Funções Trigonométricas.
- Em terceiro, S_{pEMe}-10, algumas orientações de problemas ou questões (supostos tipos de Tarefas), para motivar a apresentação das leis dos senos e dos cossenos e, na sequência, a recomendação do estudo da razão trigonométrica tangente, dada a sua importância a vários tipos de problemas que sugerem como solução aplicações da trigonometria, como, por exemplo, *"como calcular a largura de um rio? Que referências (árvore, pedra) são necessárias para que se possa fazer esse cálculo em diferentes condições – com régua e transferidor ou com calculadora?"* Nessas circunstâncias, conclui-se que as noções salientadas justificam e evocam o próprio desenvolvimento epistemológico das Funções Trigonométricas, sendo tal orientação a forma mais objetiva de se demonstrar a prioridade e considerações de uma análise epistemológica como forma de encontrar os sentidos e significados para o desenvolvimento da aprendizagem.

- Na quarta posição, S_{pEMe}-11, a orientação para subtrair tópicos como: o estudo da secante, cossecante e cotangente e das fórmulas de adição de arcos *sen (a+b)* e *cos (a+b)*, cujo argumento repousa sobre a exigência desses serem memorizados pelos alunos. Aqui, a conclusão imediata é confrontada com as expectativas institucionais para o Ensino Superior, pois são nos diversos livros de Cálculo essas noções são consideradas como disponíveis e apresentadas aos estudantes no Ensino Médio. Outro contraponto também foi verificado quando, no mesmo documento, as funções Trigonométricas são chamadas para a compreensão de fenômenos de comportamentos periódicos, cujas fórmulas *sen (a+b)* e *cos (a+b)* podem servir de exemplo para que se perceba, com naturalidade, os movimentos dos batimentos cardíacos, o som produzido pelas cordas vocais, etc.
- Por último, S_{pEMe}-12, pode ser considerada a preocupação com a transição das razões trigonométricas seno e cosseno de um triângulo retângulo para o círculo trigonométrico, migrando-se da medida de um ângulo em graus para radiano, permitindo-se, dessa forma, compreender as Funções Trigonométricas como extensões das razões trigonométricas definidas para ângulos com medidas no intervalo de 0º a 180º e, consequentemente, articular as representações algébricas às gráficas. Como conclusão, verificou-se que a passagem da trigonometria do triângulo para a trigonometria da circunferência representa um divisor de águas também apontado por Borges (2009) e Gois (2010) como os marcadores **$DAMFT_3$** e **$DAMFT_7$** localizados nos Quadro 09 e 13 (Cf. p. 79-82), respectivamente. E, nesse sentido, a ausência de superação desses marcadores, como efeito-dominó, acarretará problemas para a compreensão do desenvolvimento na fórmula de Euler para definir as Funções Trigonométricas necessárias para o estudo do Cálculo Diferencial e Integral no Ensino Superior.

Isto posto, apesar de não identificar tipos de Tarefas que contribuíssem para o desenvolvimento de uma análise praxeológica, foi possível desvelar a evolução dos programas (via intenções e reformulações), para essa etapa da

Educação Básica brasileira, permitindo-se eleger sinais que se constituíram em evidencias para a validação da hipótese de pesquisa H1.

Dessa forma, conclui-se a etapa de análise dos programas brasileiros de ensino de Matemática para a Educação Básica, reunindo-se no próximo quadro, os 12 primeiros sinais encontrados para servir a futuras considerações:

Quadro 43

Mapeamento de Sinais encontrados nos Programas Oficiais de Ensino de Matemática (Educação Básica) no Brasil.

Referência	**Mapeamento de Sinais nos Programas** (MS_{pEBa})
S_{pEFu}-01	Ausência de tipos de Tarefas que permitissem desvelar a praxeologia existentes das noções das Funções Trigonométricas nos **PCNEF**.
S_{pEMe}-02	Ausência de tipos de Tarefas que permitissem desvelar a praxeologia existentes das noções das Funções Trigonométricas nos **PCNEM**.
S_{pEMe}-03	Ausência de tipos de Tarefas que permitissem desvelar a praxeologia existentes das noções das Funções Trigonométricas nos **PCN+**.
S_{pEMe}-04	Verificou-se que além de nada acrescentar no que se refere à compreensão das praxeologia existentes, os **PCN+** permite que a escolha dos conteúdos seja flexível e, ao mesmo tempo, abrangente. Isso pode contribuir para a instalação de dificuldades na escolha do livro didático, bem como na preparação do estudante para o Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM), prejudicando a transição EM-ES.
S_{pEMe}-05	Outra observação nos **PCN+**, repousa na identificação das primeiras noções trigonométricas, não verificadas pela análise dos PCNEF, estarem propostas pela primeira vez, no domínio da Álgebra e no final da primeira etapa da 1ª série do Ensino Médio, sendo a transição intramatemática – trigonometria do triângulo retângulo para trigonometria da primeira volta (círculo trigonométrico), ocorrida nesse mesmo nível escolar.
S_{pEMe}-06	Cabe ainda enfatizar que ao alocar as noções de trigonometria no triângulo retângulo no domínio da Álgebra, os **PCN+** comprovam a origem da ruptura epistemológica ao separar tais noções do domínio da geometria, conforme foi verificado no capítulo IV dessa pesquisa.
S_{pEMe}-07	Também é questionável a ordem que é proposta nos **PCN+**, na 2ª série do Ensino Médio, para apresentar as noções trigonométricas na circunferência, já que as Funções Trigonométricas seno, cosseno e tangente, derivam-se da trigonometria da primeira volta, como foi denominada no documento.
S_{pEMe}-08	Observou-se nas **OCEM** que reside no Ensino Médio o estabelecimento, pela primeira vez, do contato dos estudantes com o Campo Trigonométrico, admitindo-se a hierarquia entre a trigonometria do triângulo retângulo e a trigonometria da circunferência.

S_{pEMe}-09	Verificou-se as **OCEM** que existe a necessidade de evocação da geometria, por meio das propriedades de semelhanças de triângulos e, por isso: (a) demarca-se uma mudança entre o domínio da geometria para o domínio das funções; (b) tal orientação, contribui para que a seja diminuída a ruptura epistemológica sobre as Funções Trigonométricas.
S_{pEMe}-10	As noções salientadas nas **OCEM** justificam e evocam o próprio desenvolvimento epistemológico das Funções Trigonométricas, sendo tal orientação a forma mais objetiva de se demonstrar a prioridade e considerações de uma análise epistemológica como forma de encontrar os sentidos e significados para o desenvolvimento da aprendizagem.
S_{pEMe}-11	A orientação das **OCEM** para subtrair tópicos como: o estudo da secante, cossecante e cotangente e das fórmulas de adição de arcos *sen (a+b)* e *cos (a+b)*, imediatamente é confrontada com as expectativas institucionais para o Ensino Superior, pois são nos diversos livros de Cálculo essas noções são consideradas como disponíveis e apresentadas aos estudantes no Ensino Médio. Outro contraponto também foi verificado quando, no mesmo documento, as funções Trigonométricas são chamadas para a compreensão de fenômenos de comportamentos periódicos, cujas fórmulas *sen (a+b)* e *cos (a+b)* podem servir de exemplo para que se perceba, com naturalidade, os movimentos dos batimentos cardíacos, o som produzido pelas cordas vocais, etc.
S_{pEMe}-12	Verificou-se que a passagem da trigonometria do triângulo para a trigonometria da circunferência apontada pelas **OCEM** representa um divisor de águas também apontado por Borges (2009) e Gois (2010) como os marcadores $\mathbf{DAMFT_3}$ e $\mathbf{DAMFT_7}$ localizados nos Quadro 09 e 13 (Cf. p. 79-82), respectivamente. E, nesse sentido, a ausência de superação desses marcadores, como efeito-dominó, acarretará problemas para a compreensão do desenvolvimento na fórmula de Euler para definir as Funções Trigonométricas necessárias para o estudo do Cálculo Diferencial e Integral no Ensino Superior.

Fonte: O autor (2015).

Reunidos nesse quadro, esses sinais permitiram também constatar a evolução das relações institucionais esperadas no Ensino Médio, principalmente. Dentre elas, pode-se destacar, por meio dos S_{pEFu}-01, S_{pEMe}-02 e S_{pEMe}-03 que apesar de não considerarem tipos de Tarefas que favorecessem a mobilização da Atividade Matemática, localizou-se nos PCN+ (S_{pEMe}-05), evidências iniciais de preocupações mais objetivas relativas ao Campo Trigonométrico, tais como a citada transição intramatemática e a indicação temporal para apresentação das referidas noções.

Na sequência, as OCEM (S_{pEMe}-08 e S_{pEMe}-09) reforçam essa ideia, na medida que estabelecem a característica hierárquica entre as etapas do Campo

Trigonométrico, buscando inclusive restaurar a ruptura epistemológica verificada na mudança entre os domínios matemáticos, considerando, para tanto, as propriedades de semelhança de triângulos como pré-requisitos para o estudo das relações trigonométricas no triângulo retângulo.

No entanto, na contramão dessa evolução, os sinais S_{pEMe}-11 e S_{pEMe}-12, demonstram a involução quando desconsideram a transição EM-ES por ignorarem as expectativas prevista pelo Ensino Superior para a compreensão das noções referentes ao Cálculo Diferencial e Integral que admitem como disponíveis o estudo de todas as Funções Trigonométricas (seno, cosseno, tangente, secante, cossecante, cotangente e suas respectivas inversas), bem como as fórmulas de adição *sen (a+b)* e *cos (a+b),* duplicação *sen (2a)* e *cos (2a)* e divisão *sen (a/2)* e *cos (a/2)* de arcos.

Aliado a Quadro 41 (Cf. p. 223), esse movimento de evolução-involução suscitou a visualização do que pode está – ainda num nível de latência para instituições, professores, alunos e pais – contribuindo para o insucesso da transição do Ensino das Funções Trigonométricas EM-ES:

Quadro 44
Mudanças entre os Domínios Matemáticos.

Nível de Ensino	Domínio Matemático	Definição	Noção
Fundamental (PCNEF)	Geometria	-Propriedades de semelhanças de figuras planas e Teorema de Pitágoras.	Semelhança de figuras planas.
Médio (PCNEM): 1ª série	Função	-A partir de um círculo trigonométrico.	Seno, cosseno e tangente de um número real.
Médio (PCN+): 1ª e 2ª séries	Álgebra	-Relação entre os comprimentos dos lados de um triângulo retângulo. -A partir de um círculo trigonométrico.	Seno e cosseno de um ângulo de um triângulo retângulo. Seno, cosseno e tangente de um número real.
Médio (OCEM): Não é indicado a série	Função	-Relação entre os comprimentos dos lados de um triângulo retângulo. -Definição das funções seno, cosseno e tangente.	Seno e cosseno de um ângulo de um triângulo retângulo. Funções seno, cosseno e tangente.

Fonte: O autor (2015).

Com efeito, no que se refere, segundo Chevallard (1998), a uma Organização Matemática Global, os dados apresentados na segunda coluna do quadro acima, apontaram para a ruptura epistemológica como causa principal da dificuldade de aprendizagem das Funções Trigonométricas, na transição EM-ES, onde a partir das variações entre os domínios matemáticos geometria-função-álgebra-função, verificou-se as dificuldades percebidas nos documentos oficiais ao lidarem com tal ruptura, pela ausência de praxeologias, tanto para abordar os domínios citados, como para tentar diminuir, caso fossem percebidas e consideradas, a passagem entre eles.

Assim, e, admitindo-se como respondida a primeira questão de pesquisa Q1, em nível dos programas oficiais, passou-se para a análise de livros didáticos considerando-os como os veículos das relações institucionais existente no Ensino Médio brasileiro. Para guiar essa empreitada, consideraram-se os seguintes

questionamentos: Como são introduzidas técnicas relativas ao ensino das Funções Trigonométricas nos livros didáticos brasileiros? Como essas técnicas estão sendo usadas na resolução dos tipos de Tarefas dispostas nesses livros? Esses livros conseguem superar as lacunas verificadas nos programas oficiais?

Na sequência, iniciou-se a análise praxeológica de livros didáticos brasileiros propostos ao Ensino Médio, objetivando-se encontrar algumas respostas às questões relacionadas acima.

5.1.2 – Análise dos Livros Didáticos:

5.1.2.1 – Livros de Matemática para o Ensino Fundamental:

Após analisadas as relações institucionais esperadas para o Ensino Médio via documentos oficiais, essa fase da investigação, intenta analisar as praxeologias existentes relacionadas ao *tema* "Funções Trigonométricas" priorizando-se os livros didáticos brasileiros.

Nesse sentido e, levando-se em conta os resultados da análise epistemológica desenvolvida no capítulo IV desse texto, decidiu-se por um levantamento inicial nos livros didáticos de Matemática destinados ao Ensino Fundamental II (6º ao 9º ano), valendo-se do critério para a escolha dos mesmos a aprovação no Programa Nacional do Livro Didático – PNLD/2014-2016 validado e distribuído gratuitamente em todo território nacional pelo MEC.

Para alcançar esse objetivo, estabeleceu-se uma metodologia de análise, descrita abaixo, para servir como um itinerário facilitador do mapeamento e compreensão das praxeologias possivelmente existentes nos livros didáticos de Matemática selecionados no Brasil. Esse processo constituiu-se de:

- Identificação do livro didático;
- Caracterização do livro didático: linhas gerais;
- Caracterização do capítulo relacionado ao tema: estrutura e objetivos;
- Identificação, classificação e localização dos tipos de tarefas T;
- Análise praxeológica de T;
- Mapeamento de Sinais nos livros didáticos (MS_{LDEF}).

Iniciando-se o processo pela identificação, seguem alguns dados para contribuir com a caracterização do objeto:

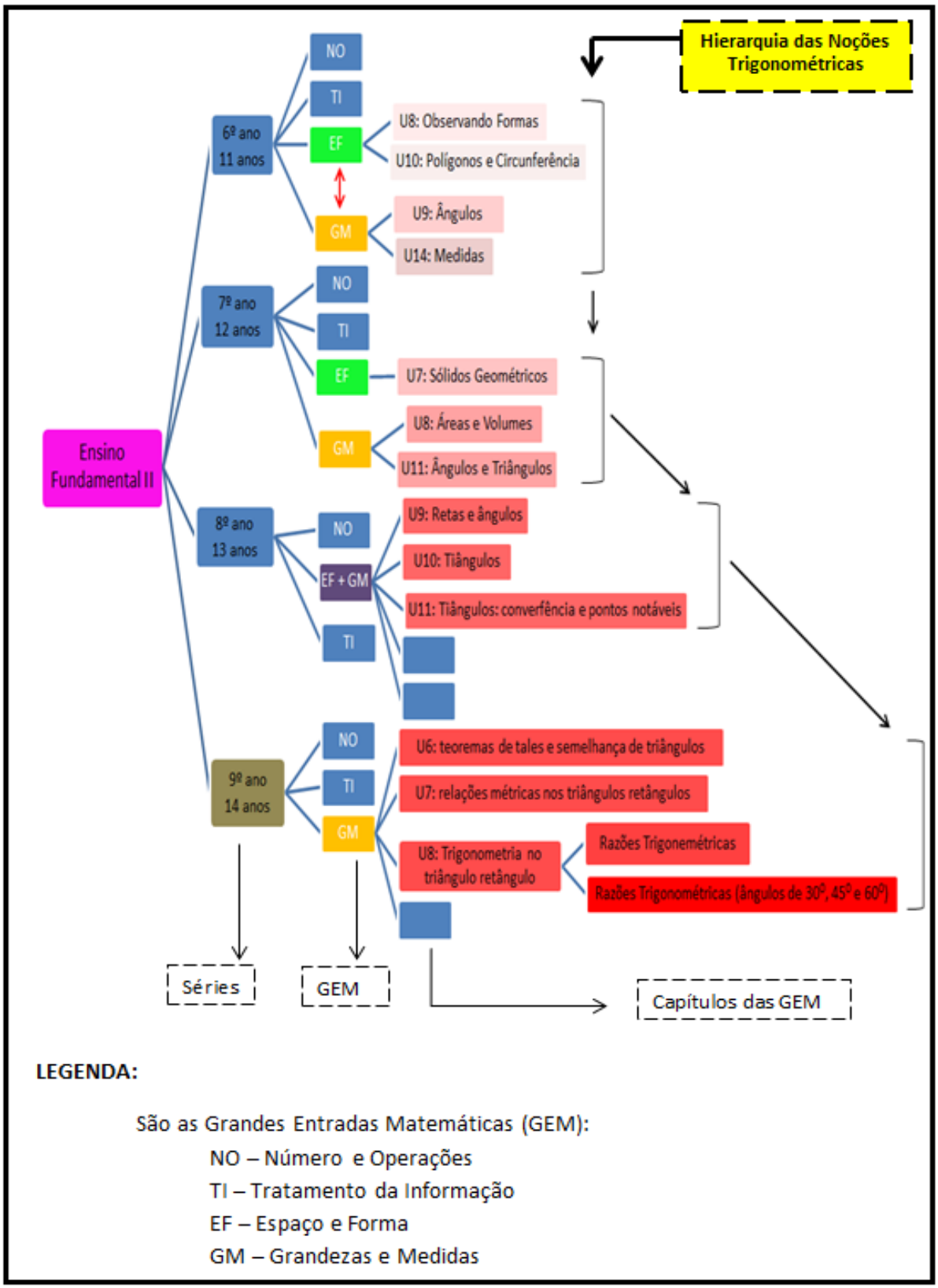
Título: *"Praticando Matemática, v. 6, 7, 8 e 9".*
Autores: Álvaro Andrini e Maria José Vasconcelos.
Editora: *Editora do Brasil*
Ano de publicação: *2012*

Na sequência, apesar de não terem sido explicitamente identificadas, segue um esquema inicial das Grandes Entradas Matemáticas (GEM)[48], cujo objetivo foi guiar a análise que se segue nesses manuais:

[48] Essas GEM, foram compreendidas, a partir dos níveis de co-determinação de Chevallard (2007a), como sendo os *domínios* matemáticos supostos no sumário das obras analisadas. Mesmo não tendo identificados nos volumes destacados acima esses *domínios*, considerou-se via PCNEF (BRASIL, 1988), para efeito de organização dessa pesquisa, suas origens a partir dos *setores* encontrados nos quatro sumários, a saber: Números e operações; Espaço e forma; Grandezas e medidas; Tratamento da informação. Assim, enquadrou-se a seguinte disposição dos *domínios* matemáticos: Número e operações (*domínios* da Aritmética e da Álgebra), Espaço e forma (*domínio* da Geometria), Grandezas e medidas (interligações entre os *domínios* da Aritmética, Álgebra e Geometria) e tratamento da informação (*domínio* da Estatística).

Quadro 45

Esquema dos **"DADOS TRIGONOMÉTRICOS DE ENTRADAS"** por meio dos Livros Didáticos da coleção *"Praticando Matemática"* do Ensino Fundamental II no Brasil – 2014.



Fonte: O autor (2015).

Em consonância com o estudo epistemológico sobre as Funções Trigonométricas, observou-se que esse tema é desenvolvido partindo-se do domínio da geometria que, nesses livros didáticos, é mobilizado pela entrada “espaço e forma” no 6º ano do Ensino Fundamental. Pelo degradê dos tons vermelhos, é visível como um largo conjunto de noções matemáticas são apresentadas anteriormente ao tema em análise e que, por esse motivo, são concebidas como conhecimentos prévios, devendo o estudante dispor das mesmas no nível disponível de funcionamento do conhecimento para que possa continuar, satisfatoriamente, seus estudos matemáticos.

Isto posto, faz-se notório observar que reside na oitava unidade (GM: U8)[49] do 9º ano o contato inicial e específico com as razões trigonométricas que inauguram o cenário dos conceitos abstratos desse tema, já que é impossível o estudante visualizar o número ½ como resultado do *sen 30º*.

Entretanto, faz-se também necessário salientar que essa iniciativa de abordar esse tema matemático não está respaldada nos programas oficiais brasileiros para o Ensino Fundamental, os PCNEF (BRASIL, 1988) que, apenas sugere um rol de conteúdos a serem desenvolvidos nessa etapa da educação básica.

Essas descobertas, incentivaram uma breve análise em todos os sumários da coleção “Praticando Matemática”, objetivando-se reconhecer a organização geral dessa obra para então, iniciar a análise praxeológica referente ao *tema*. Assim, constatou-se no Quadro 44 (Cf. p. 252) a seguinte disposição:

[49] U = unidade didática da entrada Grandezas e Medidas (GM).

Quadro 46

Suposta Estruturação da Organização Matemática nos Livros Didáticos da coleção Praticando Matemática.

Livros Didáticos	Supostas GEM	Nº de unidades didáticas	Totais
6º ano	Número e operações	09	10 (p_{6a1})
	Tratamento da informação	01	
	Espaço e forma	02	**04** (p_{6a2})
	Grandezas e medidas	**02**	
7º ano	Número e operações	07	08 (p_{7a1})
	Tratamento da informação	01	
	Espaço e forma	01	**03** (p_{7a2})
	Grandezas e medidas	**02**	
8º ano	Número e operações	08	09 (p_{8a1})
	Espaço e forma + Grandezas e medidas	**05**	**05** (p_{8a2})
	Tratamento da informação	**01**	
9º ano	Número e operações	04	06 (p_{9a1})
	Tratamento da informação	02	
	Grandezas e medidas	**04**	**04** (p_{9a2})

Fonte: O autor (2015)..

Esse levantamento possibilitou evidenciar que:

● As entradas pela via “Números e operações” – **NO**, antecipam-se em todos os anos as noções reunidas nos blocos direcionados para a geometria **EF** e **GM** (Espaço e forma & Grandezas e medidas);

● O número de capítulos (nc), resulta que: (nc)NO = (p_{6a1}) + (p_{7a1}) + (p_{8a1}) + (p_{9a1}) = 33 e (nc)GM = (p_{6a2}) + (p_{7a2}) + (p_{8a2}) + (p_{9a2}) = 16. Logo, (nc) ON > (nc) GM.

De posse dessas duas últimas constatações e das considerações posteriores ao Quadro 41 (Cf. p. 2238), identificou-se os primeiros **sinais** (S_{LDEF}[50])**:**

S_{LDEF}-01: É considerado pelos livros didáticos analisados o desenvolvimento epistemológico das noções das Funções Trigonométricas, pois a entrada “espaço e forma – U8: observando formas” do 6º ano representa o berço

[50] Os **sinais** dos Livros Didáticos para o Ensino Fundamental serão representados por S_{LDEF}.

dessas noções ao mesmo tempo em que demonstram a relação de hierarquia entre a geometria e a trigonometria;

S_{LDEF}-02: A carga destinada ao domínio da geometria – medida por meio de (nc) – é inferior ao domínio da aritmética (em maior escala, a álgebra) e, além disso, essa sucedendo-se a aritmética é posicionada na última etapa dos livros didáticos da coleção em tela;

S_{LDEF}-03: o contato inicial e específico com as razões trigonométricas só acontece na U8 da GM do 9º ano, residindo nessa ocasião, a tentativa de superação da abstração do conceito de número, pois é impossível representar visualmente ½ como fruto do cálculo do *sen 30º;*

S_{LDEF}-04: a inclusão da trigonometria no triângulo retângulo no livro didático "Praticando Matemática" do 9º ano, não está respaldada pelos PCNEF (BRASIL, 1988).

Os quatro volumes da coleção de livros didáticos "Praticando Matemática" não apresentam em seu interior uma estrutura constante. Mas, de modo geral, estão organizados da seguinte forma: Definições (Df); Exercícios (Exc); Exercícios de Revisão (ExcR); Exercícios Desafios (ExcD); Autoavaliação (Auv).

Tal organização revelou o quanto é objetiva a apresentação das noções iniciais de trigonometria. Esse diagnóstico conduz a aplicação da análise praxeológica sobre essa disposição a fim de identificar os tipos de Tarefas que supostamente mobilizariam a Atividade Matemática nos estudantes dessa etapa escolar.

Ademais, vale ainda lembrar que nos apontamentos da perspectiva epistemológica das Funções Trigonométricas desenvolvida anteriormente e, considerando-se potencialmente, as contribuições de Boyer (1974), Kennedy (1992) bem como, os esforços de Fonseca (2011, 2012b) para dar luzes ao cenário do Campo Trigonométrico, observou-se a necessidade de se investigar se os cálculos que deram origem a esse campo repousam, principalmente, em tipos de Tarefas que solicitem reflexões sobre as distâncias inacessíveis, os tamanhos e distâncias da Terra, do sol e da lua.

Foi nesse sentido, segundo revelou os estudos históricos da trigonometria que esses objetivos puderam ser satisfeitos, partindo-se do estudo das relações métricas em triângulos – base inicial das inquirições – que por sua vez, recorre às propriedades de semelhança entre figuras planas, particularmente, entre os triângulos. Nesse sentido, repousa sobre essas marcas primitivas, segundo Boyer (1974) e Kennedy (1992), o inicio das origens axiomáticas da trigonométrica.

5.1.2.1.1 – O Livro Didático de Matemática para o 9ª ano[51]:

Para justificar a escolha desse último volume da coleção de livros didáticos "Praticando Matemática", considerou-se os ecos deixados pelo sinal S_{LDEF}-03 e, também pelas indicações históricas-epistemológicas pinçadas de Boyer (1974) e Kennedy (1992) descritas acima.

Dessa forma, procedeu-se o início do processo de identificação, classificação e localização dos tipos e subtipos de tarefas T a partir do livro didático do 9º ano do Ensino Fundamental, valendo-se, inclusive do pretexto de que nessa obra foram identificadas, no *domínio* da geometria, as primeiras noções relativas às Funções Trigonométricas: *a trigonometria no triângulo retângulo*.

Partindo-se dessas, evocou-se as orientações de Chevallard (1994) para descrever a praxeologia existente nessa obra, cujos resultados possibilitam, inclusive, o auxílio da descrição hierárquica e natural da Organização Matemática existente.

Dessa forma, os tipos e subtipos de Tarefas T encontrados foram[52]:

T_{1LDEF9}: Identificar um lado em um triângulo retângulo dado.
- $T_{1.1LDEF9}$: Identificar a hipotenusa em um triângulo retângulo.
- $T_{1.2LDEF9}$: Identificar o lado adjacente a um ângulo em um triângulo retângulo.
- $T_{1.3LDEF9}$: Identificar o lado oposto a um ângulo em um triângulo retângulo.

[51] Para os livros desse volume os sinais serão identificados como S_{LDEF9}.

[52] Faz-se necessário esclarecer que quase todos os exercícios destinados a essa unidade didática não se utilizaram de verbos conjugados no infinitivo que dariam, segundo Chevallard (1998), um propósito relativamente específico e, dessa forma, justificariam a mobilização do estudante para entrar em Atividade Matemática. Nesse sentido, todos os exercícios foram lidos, interpretados e reescritos conforme os postulados da TAD, buscando-se preservar a natureza explícita dos mesmos. Foi partindo-se dessa compreensão que se tornou possível a identificação e classificação dos tipos e subtipos de Tarefas do tema matemático em análise.

T_{2LDEF9}: Dar o valor do seno, cosseno e tangente de um ângulo dado.

$T_{2.1LDEF9}$: Dar o valor do seno de um ângulo dado.

$T_{2.2LDEF9}$: Dar o valor do cosseno de um ângulo dado.

$T_{2.3LDEF9}$: Dar o valor da tangente de um ângulo dado .

T_{3LDEF9}: Calcular o comprimento (exato ou aproximado) do lado em um triângulo retângulo.

$T_{3.1LDEF9}$: Calcular o comprimento da hipotenusa.

$T_{3.2LDEF9}$: Calcular o comprimento do lado adjacente a um ângulo agudo.

$T_{3.3LDEF9}$: Calcular o comprimento do lado oposto a um ângulo agudo.

T_{4LDEF9}: Escolher a relação trigonométrica adequada para um cálculo dado.

T_{5LDEF9}: Dar o valor (exato ou aproximado) de um ângulo.

$T_{5.1LDEF9}$: Dar o valor de um ângulo agudo em um triângulo retângulo conhecendo os comprimentos de alguns dos seus lados.

$T_{5.2LDEF9}$: Dar o valor de um ângulo conhecendo o valor do seno, cosseno ou tangente.

Associado a esses tipos e subtipos de Tarefas T, foram identificados e descritos outros elementos (técnicas, tecnologias e teorias) que auxiliam na complementação da praxeologia existente:

Quadro 47

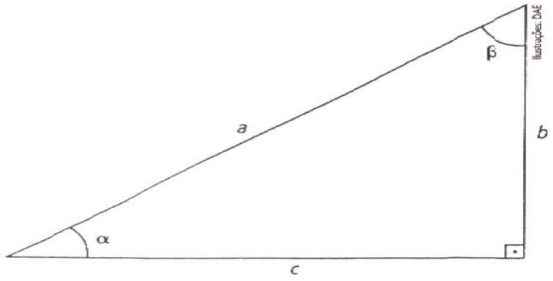
Praxeologia existente nos tipos e subtipos de Tarefas T do Livro Didático "Praticando Matemática" para o 9º ano.

Bloco do Saber-Fazer: [T/τ]			**Bloco do Saber:** [θ/Θ]	
Tipo de tarefa, T		**Técnica utilizada, τ**	**Tecnologia existente, θ**	**Teoria base, Θ**
$\mathbf{T_{1}}_{LDEF9}$	$\mathbf{T_{1.1}}_{LDEF9}$	τ_{1LDEF9}: aplicar a definição de hipotenusa em um triângulo retângulo.	θ_{1LDEF9}: Propriedades (definições) geométricas do triângulo retângulo.	Θ_{1LDEF9}: Geometria Plana
	$\mathbf{T_{1.2}}_{LDEF9}$	τ_{2LDEF9}: aplicar a definição de lado adjacente em um triângulo retângulo.		
	$\mathbf{T_{1.3}}_{LDEF9}$	τ_{3LDEF9}: aplicar a definição de lado oposto em um triângulo retângulo.		
$\mathbf{T_{2}}_{LDEF9}$	$\mathbf{T_{2.1}}_{LDEF9}$	τ_{4LDEF9}: aplicar a definição de seno em um triângulo retângulo.	θ_{2LDEF9}: Propriedades (definições) trigonométricas do triângulo retângulo.	
	$\mathbf{T_{2.2}}_{LDEF9}$	τ_{5LDEF9}: aplicar a definição de cosseno em um triângulo retângulo.		
	$\mathbf{T_{2.3}}_{LDEF9}$	τ_{6LDEF9}: aplicar a definição de tangente em um triângulo retângulo.		
$\mathbf{T_{3}}_{LDEF9}$	$\mathbf{T_{3.1}}_{LDEF9}$	τ_{4LDEF9} ou τ_{5LDEF9} τ_{7LDEF9}: utilizar à tabela trigonométrica τ_{8LDEF9}: utilizar à calculadora		
	$\mathbf{T_{3.2}}_{LDEF9}$	$\tau_{5LDEF9} + \tau_{7LDEF9}$ ou τ_{8LDEF9}		
	$\mathbf{T_{3.3}}_{LDEF9}$	$\tau_{4LDEF9} + \tau_{7LDEF9}$ ou τ_{8LDEF9}		
$\mathbf{T_{4}}_{LDEF9}$		τ_{4LDEF9} ou τ_{5LDEF9} ou τ_{6LDEF9}		
$\mathbf{T_{5}}_{LDEF9}$	$\mathbf{T_{5.1}}_{LDEF9}$	τ_{9LDEF9}: escolher a relação trigonométrica adequada, escrevendo-a e utilizando a regra dos produtos cruzados para encontrar o valor procurado.		
	$\mathbf{T_{5.2}}_{LDEF9}$	$\tau_{10LDEF9}$: utilizar a função inversa tangente (não sendo dito, supõem-se aqui o uso da tabela trigonométrica).	θ_{3LDEF9}: Propriedade que a composição de uma função com o seu inverso dá a função de identidade.	Θ_{2LDEF9}: Função

Fonte: O autor (2015).

A seguir, foram pinçadas da obra em análise algumas ilustrações que confirmaram os tipos e subtipos de Tarefas revelados acima:

1 Considere o triângulo abaixo.



a) Qual é a hipotenusa?
b) Qual é o cateto oposto a α?
c) Qual é o cateto adjacente a α?
d) Qual é o cateto oposto a β?
e) Qual é o cateto adjacente a β?

Figura 41: T_{1LDEF9} e seus respectivos subtipos.
Fonte: Livro Didático Praticando Matemática/9º ano (2012, p. 210).

2 No triângulo retângulo da figura, calcule os valores de:

a) sen $\hat{A}$
b) cos $\hat{A}$
c) tg $\hat{A}$
d) sen $\hat{C}$
e) cos $\hat{C}$
f) tg $\hat{C}$

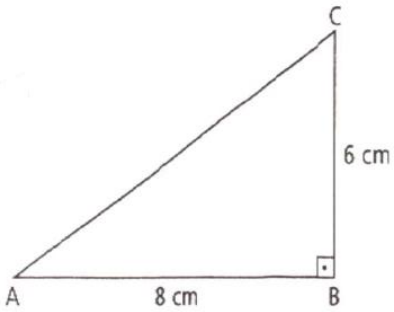


Figura 42: T_{2LDEF9} e seus respectivos subtipos.
Fonte: Livro Didático Praticando Matemática/9º ano (2012, p. 210).

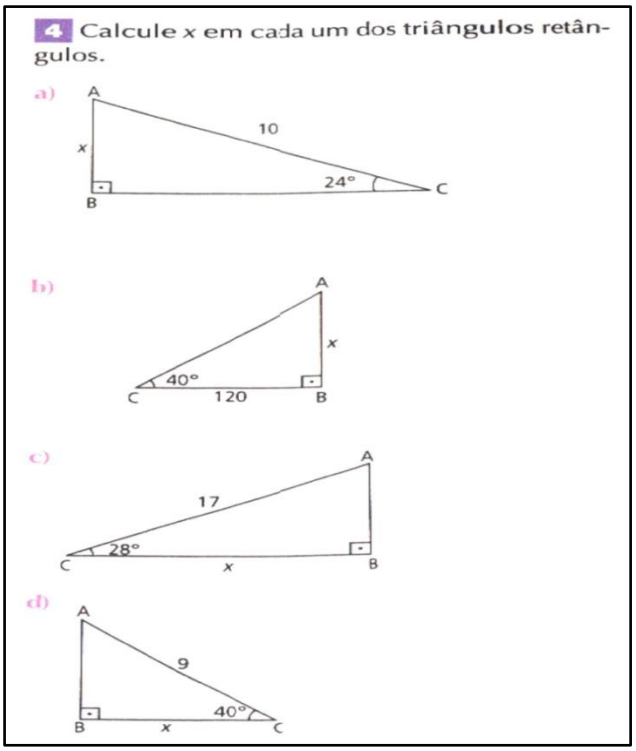


Figura 43: T_{3LDEF9} e seus respectivos subtipos.
Fonte: Livro Didático Praticando Matemática/9º ano (2012, p. 210).

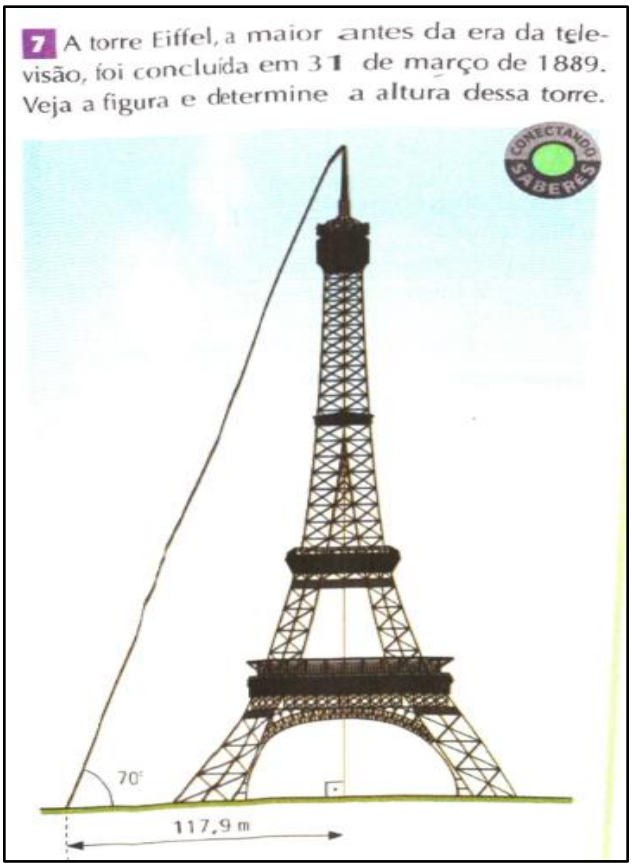


Figura 44: T_{4LDEF9} e seus respectivos subtipos.
Fonte: Livro Didático Praticando Matemática/9º ano (2012, p. 211).

Figura 45: T_{5LDEF9} e seus respectivos subtipos.
Fonte: Livro Didático Praticando Matemática/9º ano (2012, p. 211).

Ao longo do corpo da obra, buscou-se desenvolver um levantamento quantitativo em torno dos tópicos ou bloco estruturantes desse capítulo (Df, Exc, ExcR, ExcD, Auv), que resultou em 38 tarefas (exercícios e/ou atividades) dispostas conforme o quadro abaixo:

Quadro 48

Estatística dos tipos de Tarefas T *encontradas no Livro Didático "Praticando Matemática" para o 9º.*

T	Cinco blocos de Questões com exercícios e/ou atividades					$Total_1$
	Df	Exc	EXcR	ExcD	Auv	
	Rastreamento e localização das questões enumeradas de 1 a 42					
T_{1LDEF9}	-	1	-	-	-	**1**
T_{2LDEF9}	-	2; 3	-	-	-	2
T_{3LDEF9}	-	3; 4; 8; 12	-	-	-	4
T_{4LDEF9}	-	5; 6; 7; 10; 11	18; 19; 20; 21; 22; 23; 24; 25; 26; 27; 29; 30; 31	32; 33	34; 35; 36; 37; 38; 39; 40; 41; 42	**29**
T_{5LDEF9}	-	9	28	-	-	2
$Total_2$	0	13	14	2	9	
Total de Questões						42

Fonte: O autor (2015).

Dessa forma e, cumprindo-se o objetivo desenvolver uma análise sobre as informações do quadro acima, utilizou-se como questionamentos da análise

desse livro didático: quais tipos de Tarefas T permanecem nos exercícios e/ou atividades desse capítulo? Existem tipos de Tarefas T não previstos no tópico da teoria? O bloco do saber justifica as técnicas associadas aos tipos de tarefas T encontrados?

Essas questões foram respondidas por meio das seguintes constatações:

● O T_{4LDEF9} é o tipo mais privilegiado por aparecer 29 vezes, contemplando a maioria dos blocos de questões;

● O T_{1LDEF9} é o tipo menos privilegiado por aparecer apenas 01 vez, notadamente em um único bloco, talvez porque seja considerado pelos autores um conhecimento básico e disponível nos estudantes;

● O bloco EXcR, com 14 questões, agrega a maior quantidade de variedade relativa a todos os tipos de tarefas T, enquanto no ExcD existem apenas 02 questões, cujo subtipos anteriores devem estar disponíveis para ajudar na construção da resposta;

● Foi verificado nos quatro últimos blocos examinados, tipos de tarefas T que não estavam previstas no bloco Df e, nesse sentido, os objetivos para auxiliar no desenvolvimento da aprendizagem, nessas noções ao longo do capítulo podem estar comprometidos.

Ainda assim, foi verificado por meio da praxeologia apresentada no Quadro 47 (Cf. p. 261) que o bloco do Saber, [θ/Θ], demonstrou mudanças complexas e significativas entre tecnologias relacionadas às teorias $\mathbf{\Theta_{1LDEF9}}$ e $\mathbf{\Theta_{2LDEF9}}$ detectada uma vez, especificamente, entre os tipos de Tarefas $\mathbf{T_{5.1}}_{LDEF9}$ e $\mathbf{T_{5.2}}_{LDEF9}$ ($\mathbf{\Theta_{1LDEF9}} \rightarrow \mathbf{\Theta_{2LDEF9}}$) que visivelmente, espera do estudante o conhecimento prévio e disponível a noção de função inversa associada as noções trigonométricas mencionadas.

Sendo essa uma constatação de referência, demonstrou-se que a ruptura epistemológica entre os domínios da geometria e das funções é o fato mais contundente para justificar a origem matemática da etiologia das dificuldades de aprendizagem dos estudantes sempre que se encontrarem em situação de aprendizagem das noções referentes ao Campo Trigonométrico.

Nessa medida e, valendo-se como uma forte referência para justificar a dificuldade da transição das Funções Trigonométricas EM-ES – o processo de transição intramatemática –, cujo resultado destacado foi suficiente para demarcar o **sinal** S_{LDEF9}-05: a mudança entre os *domínios* da geometria plana ($\mathbf{\Theta_{1LDEF9}}$) e a função ($\mathbf{\Theta_{2LDEF9}}$), constituintes do bloco do saber, mesmo cumprindo os papéis de justificar, fundamentar e explicar as suas respectivas tecnologias e técnicas associadas aos tipos de Tarefas relacionados, potencializam o problema da ruptura epistemológica entre tais campos dificultando a aquisição das informações direcionadas por meio das noções iniciais das Funções Trigonométricas.

Essa revelação também pode ser fundamentada comparando-se às técnicas utilizadas para resolver os tipos e subtipos de Tarefas até T_{4LDEF9} com os tipos e subtipos de T_{5LDEF9}, cujo saber-fazer repousa sobre o raciocínio funcional, ou seja, articulação entre duas variáveis que, até então, não traduz os objetivos da geometria plana.

A seguir, foi construído um quadro que possibilitou visualizar todos os sinais encontrados na análise desenvolvida no livro didático brasileiro em tela, reunindo-se as principais marcas desse levantamento:

Quadro 49

Mapeamento de Sinais encontrados no Livro Didático "Praticando Matemática" do Ensino Fundamental no Brasil.

Referência	**Mapeamento de Sinais no Livro Didático do Ensino Fundamental** (MS_{LDEF})
S_{LDEF}-01	É considerado pelos livros didáticos analisados o desenvolvimento epistemológico das noções das Funções Trigonométricas, pois a entrada "espaço e forma – U8: observando formas" do 6º ano representa o berço dessas noções ao mesmo tempo em que demonstram a relação de hierarquia entre a geometria e a trigonometria.
S_{LDEF}-02	A carga destinada ao domínio da geometria – medida por meio de (nc) – é inferior ao domínio da aritmética (em maior escala, a álgebra) e, além disso, essa sucedendo-se a aritmética é posicionada na última etapa dos livros didáticos da coleção em tela.
S_{LDEF}-03	O contato inicial e específico com as razões trigonométricas só acontece na U8 da GM do 9º ano, residindo nessa ocasião, a tentativa de superação da abstração do conceito de número, pois é impossível representar visualmente ½ como fruto do cálculo do *sen 30º.*
S_{LDEF}-04	A inclusão da trigonometria no triângulo retângulo no livro didático "Praticando Matemática" do 9º ano, não está respaldada pelos PCNEF (BRASIL, 1988).
S_{LDEF9}-05	A mudança entre os *domínios* da geometria plana (Θ_{1LDEF9}) e a função (Θ_{2LDEF9}), constituintes do bloco do saber, mesmo cumprindo os papéis de justificar, fundamentar e explicar as suas respectivas tecnologias e técnicas associadas aos tipos de Tarefas relacionados, potencializam o problema da ruptura epistemológica entre tais campos dificultando a aquisição das informações direcionadas por meio das noções iniciais das Funções Trigonométricas.

Fonte: O autor (2015).

Ampliando-se as lentes para apreciar os achados do quadro acima, observou-se que a geometria é um ramo da Matemática ainda pouco explorado, quando comparado, principalmente, à aritmética e a álgebra, sendo ela o berço para gestar a transição intramatemática necessária para suplantar a ausência do domínio da função, cuja noção de inversão é evocada por meio de técnicas específicas desse domínio.

Assim, reforçando-se tais características como as provas documentais para justificar o insucesso da transição EM-ES, considerando-se o EM como uma etapa subsequente do Ensino Fundamental, mobilizou-se energias para tentar encontrar respostas às questões: Será que no EM, essas características serão

preservadas? Como as técnicas relativas ao ensino das Funções Trigonométricas são introduzidas nos livros didáticos brasileiros desse nível? Como são usadas na resolução dos tipos de Tarefas? Esses livros didáticos conseguem superar as lacunas verificadas no livro didático do Ensino Fundamental?

A seguir, apresentou-se a análise praxeológica de alguns livros didáticos brasileiros destinados ao Ensino Médio, objetivando-se responder às questões anteriores, considerando-se, para tanto, o estudo praxeológico das noções das Funções Trigonométricas supostamente apresentadas.

5.1.2.2 – Livros Didáticos de Matemática para o Ensino Médio:

Nessa fase da investigação, foi desenvolvida a análise praxeológica das expectativas institucionais existentes frente ao *tema* "Funções Trigonométricas", aplicando-as no exame dos livros didáticos brasileiros produzidos para os estudantes do Ensino Médio: nível intermediário entre o Ensino Fundamental e o Ensino Superior.

Nesse sentido, tal empreitada, valeu-se dos impressos também aprovados no Programa Nacional do Livro Didático – PNLD/2014-2016, validado e distribuído gratuitamente em todo território nacional pelo MEC.

Sendo esse o critério de seleção de uma obra para ser submetida a presente análise, optou-se por continuar utilizando-se da metodologia desenvolvida no tópico anterior e, por isso, foram preservados os seguintes elementos:

- Identificação do manual;
- Caracterização do manual: linhas gerais;
- Caracterização do capítulo relacionado ao tema: estrutura e objetivos;
- Identificação, classificação e localização dos tipos de tarefas T;
- Análise praxeológica de T;
- Mapeamento de Sinais nos Manuais do Ensino Médio (MS_{LDEM}).

Iniciando-se o processo pela identificação, seguem alguns dados para contribuir com a caracterização do objeto:

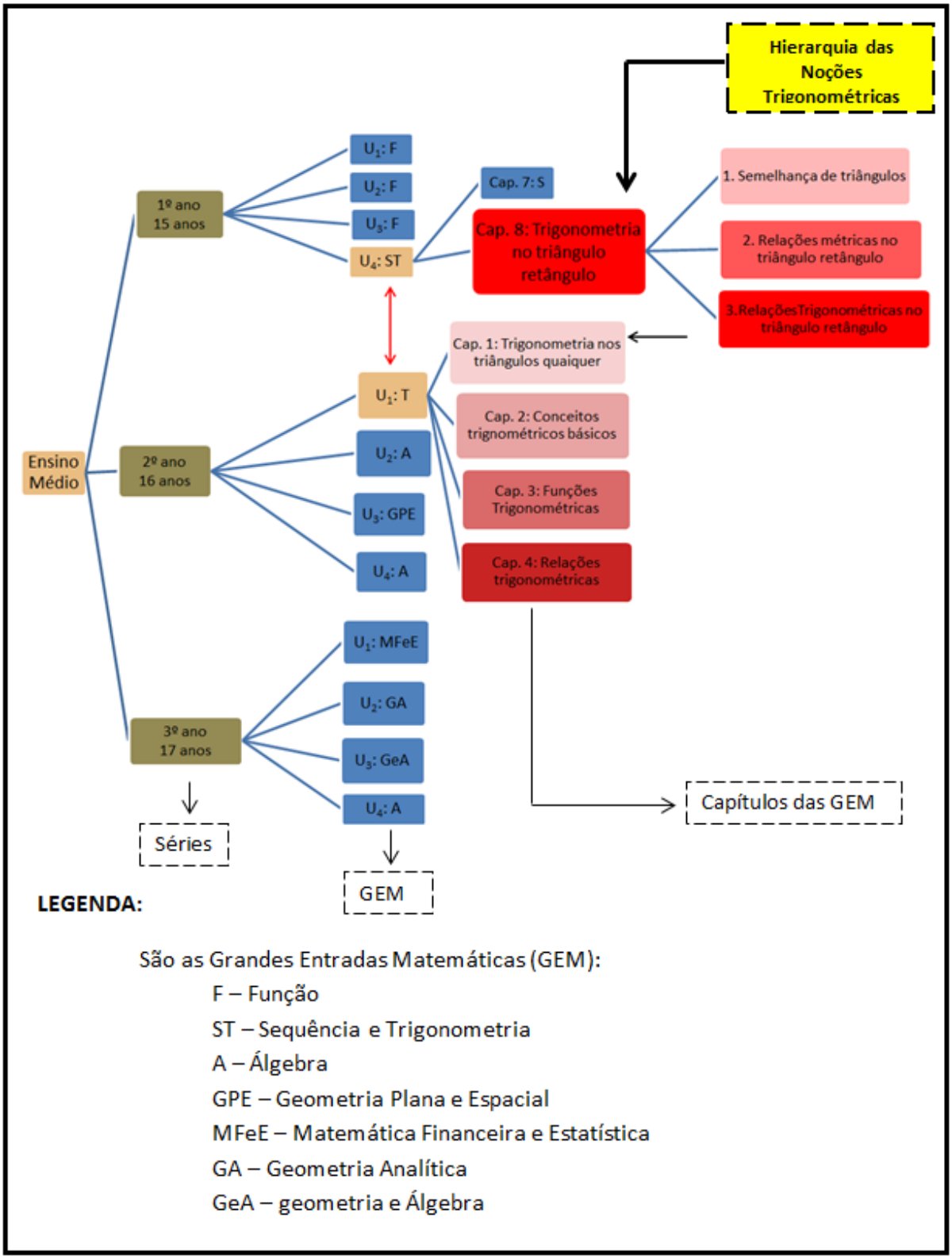
Título: *"Matemática: contexto & aplicações, v. 1, 2 e 3"*

Autores: Luiz Roberto Dante.
Editora: *Ática*
Ano de publicação: *2013*

Na sequência, segue um esquema inicial das Grandes Entradas Matemáticas, cujo objetivo foi guiar a análise que se segue nos livros dessa coleção:

Quadro 50

Esquema dos **"DADOS TRIGONOMÉTRICOS DE ENTRADAS"** por meio dos Livros Didáticos da coleção *"Matemática: contextos & aplicações"* do Ensino Fundamental II no Brasil – 2014.



Fonte: O autor (2015).

A apreciação do quadro em destaque deu luzes ao cenário que se objetivou, também, investigar: os “genes” iniciais do Campo Trigonométrico no meio escolar. Tal identificação permitiu ainda desvelar duas diferentes entradas matemáticas, em diferentes etapas do Ensino Médio (EM), respectivamente: ST (U_4), no 1º ano e a T (U_1), no 2º ano. Além disso, cabe salientar que é, no Ensino Médio, por meio dessa obra, que se dá o contato inicial com as primeiras noções trigonométricas.

Essas comprovações anunciaram uma variação epistemológica entre os domínios matemáticos iniciais, mas, ainda latentes, que foram percebidos considerando o estudo epistemológico do capítulo IV. Na ordem que se segue, geometria e função, desenvolvidos nesses livros, respectivamente, nos 1º e 2º anos do EM. Nesse sentido e servindo-se dessas impressões primeiras nos sumários desses três volumes dos livros didáticos em tela, identificaram-se os seguintes sinais[53]:

S_{LDEM}-01: as primeiras noções trigonométricas apresentadas aos estudantes repousam, nessa obra, na U_4 do 1º ano do EM, destacando-se “a trigonometria no triângulo retângulo”.

S_{LDEM}-02: existem as noções da trigonometria na circunferência, dessa obra, na U_1 do 2º ano do EM, sendo o capítulo 3 destinado às “Funções Trigonométricas”.

Tais indicações, instigaram um mergulho nos volumes 1 e 2 dessa coleção, a fim de compreender se essas disposições permitem a visualização de uma Organização Matemática em torno das noções em análise. Para tanto, fez-se necessário aplicar a análise praxeológica nos volumes indicados.

5.1.2.1.1 – O Livro Didático de Matemática para o 1º ano[54]:

Uma característica encontrada em todos os livros dessa coleção, que se fez necessário informar, são as considerações e referências (oficiais e legais, teóricas e metodológicas) que o autor vincula ao final de cada livro, permitindo ao professor, especificamente, a compreensão do planejamento estabelecido para a

[53] Os **sinais** dos Livros Didáticos para o Ensino Médio serão representados por $S_{LDEM.}$

[54] Para os livros desse volume os sinais serão identificados como S_{LDEM1}.

construção do mesmo. Conforme, Dante (2013), dentre elas, destacam-se, por exemplo: o estabelecido nos documentos oficiais LDB 9394/96, PCN (1998, 2000), principalmente; as contribuições teóricas de Brousseau, Chevallard, D'Ambrósio, entre outros e as orientações metodológicas de Biembengut, Pais, Toledo, etc.

No entanto, não foi verificado algum tipo de quadro ou tabela, construída e baseada nos programas ou orientações oficiais de ensino de Matemática, para justificar a organização ou distribuição dos conteúdos (ou noções matemáticas) para os três volumes dessa coleção. Esse achado sinalizou, S_{LDEM1}-03, que os livros didáticos consideram como disponíveis as orientações curriculares nos documentos oficiais divulgados pelo MEC, embora busquem outros meios capazes de "explicar" a estruturação dos conteúdos matemáticos para o EM da forma como são apresentados.

Nesse contexto, as noções primeiras de trigonometria é apresentada no capítulo 8 da unidade 4, considerando-se a hierarquia dos seguintes tópicos: semelhança de triângulos, relações métricas no triângulo retângulo, relações trigonométricas no triângulo retângulo. Esse último, interesse particular dessa pesquisa, foi estruturado na sequência, a saber:

- Sessão de **DEFINIÇÕES** (Df): são apresentadas as definições de seno, cosseno e tangente de um ângulo de um triângulo retângulo por meio das propriedades de semelhança de triângulos. Na sequência, as definições da relação fundamental do triângulo retângulo, a relação entre seno, cosseno e tangente, a relação entre seno e cosseno de ângulos complementares e, por último, a definição de seno, cosseno e tangente dos ângulos notáveis (30°, 45° e 60°).

- Sessão de **EXERCÍCIOS RESOLVIDOS** (ExcR): são disponibilizados cinco modelos de exercícios, cujos detalhes discriminação das técnicas, que permitiram identificar as tecnologias e teorias a elas associadas e, dessa forma, compreender os níveis da Organização Matemática dessas noções.

- Sessão de **EXERCÍCIOS** (Exc): constam 29 questões que se referem aos subtópicos das definições, cujo funcionamento também contribuiu para desvelar as praxeologias existentes.

De posse dessa visão geral da obra em tela, passou-se a submissão, sob as lentes de Chevallard (1998), as duas últimas sessões, objetivando identificar e analisar, os tipos de Tarefas existentes. A seguir, esses, foram descritos abaixo e, posteriormente, organizados no Quadro 48 (Cf. p. 264) que facilitou associá-los as suas respectivas técnicas, tecnologias e teorias.

T_{1LDEM1}: Dar o valor do seno, cosseno e tangente de um ângulo dado.
- $T_{1.1LDEM1}$: Dar o valor do seno de um ângulo dado.
- $T_{1.2LDEM1}$: Dar o valor do cosseno de um ângulo dado.
- $T_{1.3LDEM1}$: Dar o valor da tangente de um ângulo dado .

T_{2LDEM1}: Calcular o comprimento (exato ou aproximado) do lado em um triângulo retângulo.
- $T_{2.1LDEM1}$: Calcular o comprimento da hipotenusa.
- $T_{2.2LDEM1}$: Calcular o comprimento do lado adjacente a um ângulo agudo.
- $T_{2.3LDEM1}$: Calcular o comprimento do lado oposto a um ângulo agudo.

T_{3LDEM1}: Escolher a relação trigonométrica adequada para um cálculo dado.

T_{4LDEM1}: Dar o valor (exato ou aproximado) de um ângulo agudo em um triângulo retângulo conhecendo os comprimentos de alguns dos seus lados.

Quadro 51

Praxeologia existente nos tipos e subtipos de Tarefas T Livro Didático "Matemática: contexto & aplicações" para 1º ano.

<table>
<tr><th colspan="3">Bloco do Saber-Fazer: [T/τ]</th><th colspan="2">Bloco do Saber: [θ/Θ]</th></tr>
<tr><th colspan="2">Tipo de tarefa, T</th><th>Técnica utilizada, τ</th><th>Tecnologia existente, θ</th><th>Teoria base, Θ</th></tr>
<tr><td rowspan="3">T_{1LDEM1}</td><td>$T_{1.1LDEM1}$</td><td>τ_{1LDEM1}: aplicar a definição de seno em um triângulo retângulo.</td><td rowspan="3">θ_{1LDEM1}: Propriedades (definições) geométricas do triângulo retângulo.</td><td rowspan="8">Θ_{1LDEM1}: Geometria (plana)</td></tr>
<tr><td>$T_{1.2LDEM1}$</td><td>τ_{2LDEM1}: aplicar a definição de cosseno em um triângulo retângulo.</td></tr>
<tr><td>$T_{1.3LDEM1}$</td><td>τ_{3LDEM1}: aplicar a definição de tangente em um triângulo retângulo.</td></tr>
<tr><td rowspan="3">T_{2LDEM1}</td><td>$T_{2.1LDEM1}$</td><td>τ_{3LDEM1}</td><td rowspan="5">θ_{2LDEM1}: Propriedades (definições) trigonométricas do triângulo retângulo.</td></tr>
<tr><td>$T_{2.2LDEM1}$</td><td>τ_{2LDEM1}</td></tr>
<tr><td>$T_{2.3LDEM1}$</td><td>τ_{1LDEM1}</td></tr>
<tr><td colspan="2" rowspan="2">T_{3LDEM1}</td><td rowspan="2">τ_{1LDEM1} ou τ_{2LDEM1} ou τ_{3LDEM1}
ou
τ_{4LDEM1}: utilizar a relação trigonométrica fundamental do triângulo retângulo;
τ_{5LDEM1}: utilizar a relação trigonométrica para ângulos complementares de um triângulo retângulo;
τ_{6LDEM1}: utilizar a relação entre tangente, seno e cosseno de um triângulo retângulo.
τ_{7LDEM1}: utilizar à tabela trigonométrica;
ou
τ_{8LDEM1}: utilizar à calculadora</td></tr>
<tr><td colspan="2">T_{4LDEM1}</td><td>τ_{9LDEM1}: escolher a relação trigonométrica adequada, escrevendo-a e utilizando a regra dos produtos cruzados para encontrar o valor procurado.
$\tau_{10LDEM1}$: utilizar a função inversa seno, cosseno ou tangente (não sendo dito, supõem-se aqui o uso da calculadora ou da tabela trigonométrica).</td><td>θ_{3LDEM1}: Propriedade que a composição de uma função com o seu inverso dá a função de identidade.</td><td>Θ_{2LDEM1}: Função</td></tr>
</table>

Fonte: O autor (2015).

A fim de justificar os tipos e subtipos de Tarefas desvelados acima, foram escolhidos, a título de exemplos, algumas ilustrações desse volume, conforme sequência abaixo:

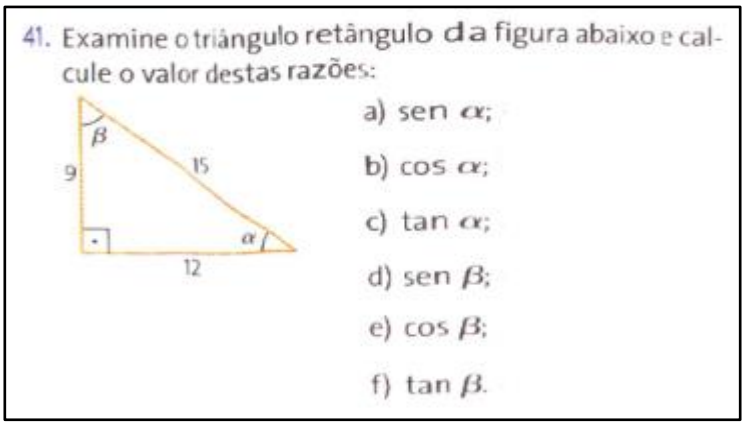


Figura 46: T_{1LDEM1} e seus respectivos subtipos.
Fonte: Livro Didático Matemática: contexto & aplicações/1º ano (2013, p. 251).

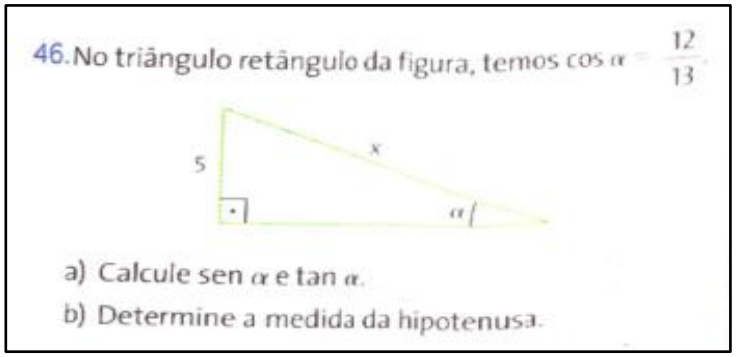


Figura 47: T_{2LDEM1} e seus respectivos subtipos.
Fonte: Livro Didático Matemática: contexto & aplicações/1º ano (2013, p. 252).

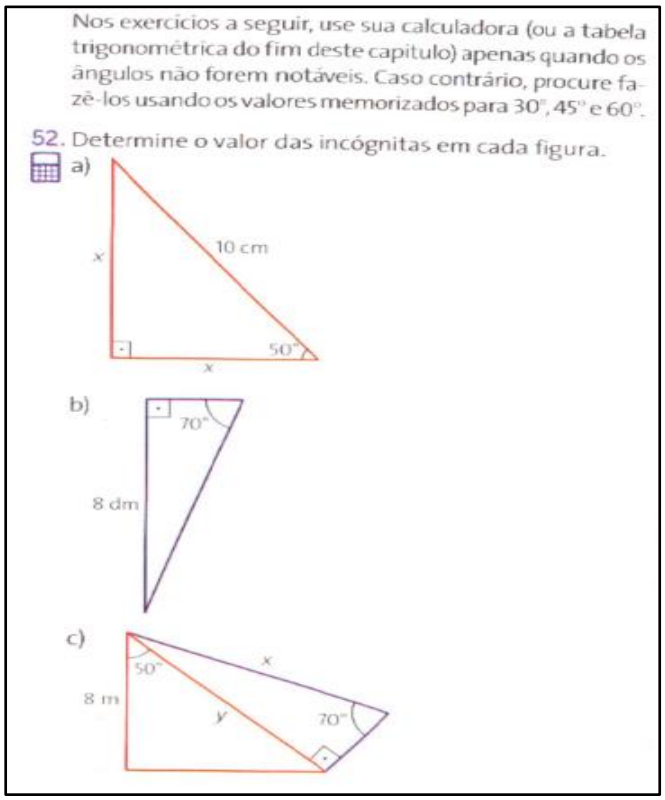


Figura 48: T_{3LDEM1}.
Fonte: Livro Didático Matemática: contexto & aplicações/1º ano (2013, p. 256).

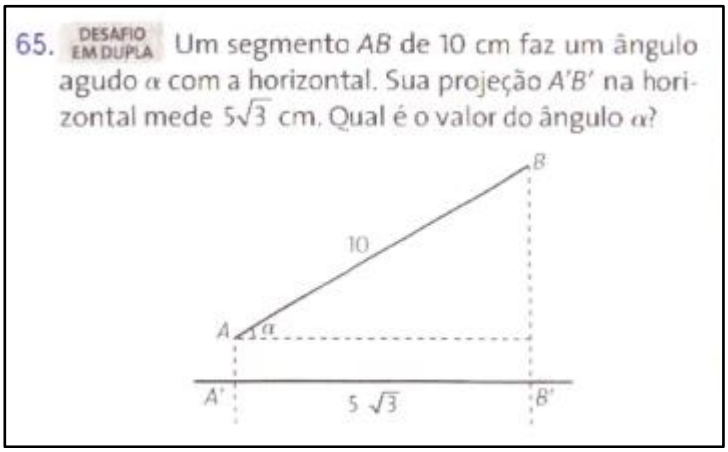


Figura 49: T_{4LDEM1}.
Fonte: Livro Didático Matemática: contexto & aplicações/1º ano (2013, p. 258).

Levantando-se, nesse volume, o quantitativo em torno dos tópicos ou bloco estruturantes desse capítulo (Df, ExcR, Exc), verificou-se 29 tarefas (exercícios e/ou atividades) dispostas conforme o quadro a seguir:

Quadro 52

Estatística dos tipos de Tarefas T *encontradas no Livro Didático "Matemática: contexto & aplicações" para 1º ano.*

T	Três blocos de Questões com exercícios e/ou atividades			$Total_1$
	Df	ExcR (7 a 11)	Exc	
	Rastreamento e localização das questões enumeradas de 41 a 69			
T_{1LDEM1}	-	-	41; 42; 43; 45; 48	5
T_{2LDEM1}	-	10; 11	46	**3**
T_{3LDEM1}	-	7; 8; 9	44; 52; 53; 54; 55; 56; 57; 58; 59; 60; 61; 62; 63; 64; 66; 67; 68; 69	**21**
T_{4LDEM1}	-	-	47; 49; 50; 51; 65	5
$Total_2$	-	5	29	
Total de Questões				34

Fonte: O autor (2015).

Valendo-se das estratégias estatísticas, utilizadas para desenvolver a análise anterior no Livro Didático do 9º, para o Ensino Fundamental, desejou-se saber: quais tipos de Tarefas T permanecem nos exercícios e/ou atividades desse capítulo? Existem tipos de Tarefas T, não previstos no tópico da teoria? O bloco do saber justifica as técnicas associadas aos tipos de tarefas T encontrados?

Seguindo-se o mesmo raciocínio, constatou-se que:

● O T_{3LDEM1} é o tipo mais privilegiado por aparecer 21 vezes, contemplando a maioria dos blocos de questões;

● O T_{2LDEM1} é o tipo menos privilegiado por aparecer apenas 03 vezes, notadamente em dois dos blocos, minimizando o treinamento das técnicas associadas às mesmas;

● O bloco EXc, com 29 questões, agrega a maior quantidade de variedade relativa a todos os tipos de tarefas T, enquanto no Df não existem questões, que mobilizem o desenvolvimento das noções seno, cosseno e tangente, apesar de serem identificadas técnicas, oriundas das propriedades de semelhança de triângulos retângulos. Essa observação permite inferir sobre a ausência de sentido dos estudantes acompanharem, por meio da leitura, a gênese das primeiras definições da trigonometria;

● Foram construídos blocos ExcR e Exc, cuja articulação, na maioria das tarefas, pode ser verificada apenas por meio do uso das técnicas, decorrentes das

propriedades de semelhança de triângulos retângulos. Dessa forma, os estudantes dependem das orientações dos professores para adquirirem as técnicas relativas aos tipos de Tarefas T_{1LDEM1}, T_{2LDEM1}, T_{3LDEM1} e T_{4LDEM1}, pois apenas por meio do Livro Didático, em tela torna-se um objetivo difícil de ser alcançada.

Analisando-se a praxeologia apresentada no Quadro 48 (Cf. p. 264), verificou-se que as tecnologias θ_{1LDEM1} e θ_{2LDEM1} cumprem seus papéis que, conforme Chevallard (1998) são de justificar, explicar, tornar inteligível e esclarecer as técnicas τ, bem como, inclusive, permitir a produção de outras τ para resolver o mesmo ou outros tipos de Tarefas, caso particular da tecnologia θ_{3LDEM1}. No entanto, essa última tecnologia, θ_{3LDEM1}, se desenvolve sobre discurso tecnológico, o Θ_{2LDEM1}, rompendo abruptamente com o discurso anterior, Θ_{1LDEM1}, na medida em que é deixado de considerar o grau de complexidade existente, segundo Chevallard (1998), de uma praxeologia para outra.

Para esse autor, a transição entre as praxeologias pontuais – casos alicerçados nas tecnologias θ_{1LDEM1} e θ_{2LDEM1} em tela – e, as praxeologias locais – caso que se fez necessário ampliar o discurso teórico para a realização do tipo de Tarefa T_{4LDEM1} por meio da técnica τ_{10} –, deveriam estar centradas em uma única tecnologia. Tal desarticulação é, por princípio chevallardiano, a característica que permitiu essa pesquisa identificar, demonstrar e confirmar pela segunda vez – considerando inicial o S_{LDEF9}-05, no sentido mais microscópico possível, as etiologias das **DAMFT**[55], cuja mudança entre os domínios da geometria para função assinala o que já foi denominado em S_{LDEF9}-05, de ruptura epistemológica.

Apesar de θ_{1LDEM1} e θ_{2LDEM1} recorrerem a propriedades diferençadas, ambas são abrigadas pela teoria da geometria plana, Θ_{1LDEM1}, que não necessita da propriedade de inversão – caso particular de θ_{3LDEM1} – para ajudar na resolução de T_{4LDEM1}.

Tendo reunido o conjunto dessas percepções, o sinal S_{LDEM1}-04 ratifica o indício microscópico e, por isso, talvez não percebido entre os autores dos livros didáticos examinados: a transição entre as praxeologias pontuais e as praxeologias locais, quando não centradas em uma mesma tecnologia, ocasiona uma ruptura

[55] Vide capítulo I.

epistemológica que, nesse caso, girou-se em torno do domínio da geometria plana para o domínio da função.

Cumprido-se os objetivos previstos para esse item, foi examinado, na sequência, o segundo volume do Livro Didático em questão.

5.1.2.1.2 – O Livro Didático de Matemática para o 2º ano[56]:

Esse volume também apresentou a mesma estrutura que o anterior, preservando-se as **DEFINIÇÕES** (Df), os **EXERCÍCIOS RESOLVIDOS** (ExcR) e os **EXERCÍCIOS** (Exc). Em meio as suas quatro GEM (ou, para essa obra, unidades didáticas), reservaram-se quatro capítulos para a unidade 1 – Trigonometria, que segundo Dante (2013) é constituído dos:

- Capítulo 1 – Trigonometria: resolução de triângulos quaisquer;
- Capítulo 2 – Conceitos trigonométricos básicos;
- Capítulo 3 – Funções Trigonométricas;
- Capítulo 4 – Relações trigonométricas.

Ao apreciar o interior de cada um desses capítulos, antecedendo-se a análise praxeológica, observaram-se algumas justificativas descritas pelo autor que valeu a pena considerar, a saber:

No ***capítulo 1***:

(1) Existem em plantas de terrenos representações de lagos ou montanhas, cujos procedimentos das medidas indicadas não são explicitados, coibindo, dessa forma, pensar como essas foram obtidas;
(2) Recorre à Topografia, como um ramo da Engenharia, para justificar uma de suas funções*: "medições que determinam a forma e a posição de elementos do relevo, com base em relações estabelecidas pela **Trigonometria**."* (DANTE, 2013, p. 12, grifo do autor);
(3) Que o instrumento teodolito é utilizado para auxiliar no cálculo de distâncias inacessíveis demarcadas com a ajuda de triângulos determinados por pontos do próprio terreno;

[56] Para os livros desse volume os sinais serão identificados como S_{LDEM2}.

(4) Que o topógrafo, profissional dessa área, precisa conhecer as medidas de pelo menos três das seis existentes, entre lados e ângulos desses triângulos captados, para calcular as possíveis relações entre eles;

(5) Que os conhecimentos sobre os triângulos retângulos não são suficientes para resolver esses tipos de Tarefas e, em caso positivo, demandavam de cálculos complexos e extensos;

(6) Que a determinação de tais medidas só foi possível considerando-se a evolução da Trigonometria, cujas características resultaram nas denominações: lei dos senos e lei dos cossenos;

(7) Para tanto, será necessário "saber" as medidas de seno e cosseno de ângulos obtusos e

> como esse assunto ainda anão foi estudado – não existem ângulos obtusos nos triângulos retângulos – aprenderemos nesse momento apenas como lidar com eles na prática, e deixaremos a parte teórica, que fundamenta o que estudaremos agora, para o capítulo seguinte. Inicialmente, é necessário saber que: sen 90°=1 e cos 90°=0; senos de ângulos obtusos são exatamente iguais aos senos dos ângulos suplementares desses ângulos: sen x= sen (180° – x); cossenos de ângulos obtusos são opostos aos cossenos dos suplementares desses ângulos: cos x = – cos (180° – x). (DANTE, 2013, p. 14)

O elenco dessas justificativas permitiu observar que:

- Que de (1) a (6), contribuiu-se para dar sentido, estimular a atenção dos alunos, evocar memórias, enfim, sensibilizá-los de fatos no campo da Engenharia que são posteriores aos fundamentos da Matemática, especificamente, da Trigonometria;
- No entanto, apesar da tentativa de introduzir o item (7) dessa lista para justificar a passagem do cálculo das razões trigonométricas de ângulos agudos para ângulos obtusos, reside também nessa opção ou estratégia metodológica a instalação de algumas lacunas ou rupturas epistemológicas na aprendizagem das Funções das Trigonométricas na medida em que se acentua a separação entre teoria e prática, entre o dito e o não demonstrado, que acabam funcionando como "verdades" que deverão ser aceitas simplesmente, sobretudo, quando se diz que *"é necessário saber*

que sen 90°=1 e cos 90°=0”. Tais verificações apontaram para o sinal S_{LDEM2}-05: rupturas epistemológicas na aprendizagem das Funções das Trigonométricas na passagem do cálculo das razões trigonométricas de ângulos agudos para ângulos obtusos na medida em que, sem demonstração, *“é necessário saber que sen 90°=1 e cos 90°=0”*.

No ***capítulo 2***:

(1) Evoca da história da Matemática as justificativas para o estudo dos ângulos e suas propriedades, bem como a divisão do círculo atrelada à ideia de ângulos centrais congruentes, aproveitando-se desse pretexto para conceituar a palavra Trigonometria;

(2) Alegando como necessário, evocam-se também as noções de arcos, ângulos, entre outras, como prerrogativa para introduzir as unidades, grau e radiano, para medir arcos (ângulos) de uma circunferência.

Nesses dois tópicos, tais justificativas não contribuíram, sob as lentes dessa pesquisa, para a instalação contundentes de fragilidades que conduzissem os leitores aos descaminhos da aprendizagem. No entanto, cabe salientar que o raciocínio funcional está latente quando é proposta a relação entre as unidades de medidas grau e radianos.

No ***capítulo 3***:

(1) Destaca que foi a representação das relações trigonométricas no círculo de raio unitário a força mobilizadora, que impulsionou o estudo dos comportamentos de fenômenos periódicos, valendo-se de classificações da Física (movimento oscilatório ou vibratório) para contextualizar a introdução das Funções Trigonométricas.

Pinçar mais essa descrição possibilitou dizer que existe a tentativa, por parte do autor, referenciar o desenvolvimento histórico-epistemológico das Funções Trigonométricas, para sensibilizar e atrair a atenção dos estudantes. Resta saber se, nesse caso, as Organizações Matemáticas que serão investigadas a partir da identificação dos tipos de Tarefas mobilizarão a Atividade Matemática nos alunos.

No ***capítulo 4***:

(1) Por último, constatou-se que esse capítulo recorre inicialmente às justificativas de aprofundamento teórico ou abstrato das Funções Trigonométricas por intermédio das relações trigonométricas, do tipo: relações fundamentais (ampliação para cotangente, secante e cossecante), identidades trigonométricas, fórmulas de adição, duplicação e divisão de arcos, equações trigonométricas. Vale ressaltar que todas elas foram apresentadas como válidas e verdadeiras sem a demonstração matemática correspondente.

Nessa etapa, observou-se que o encadeamento das noções relacionadas é coerente com o desenvolvimento do campo em tela. Mas, no entanto, a ausência das demonstrações matemáticas contribui para que os estudantes, além de não desenvolverem o raciocínio abstrato por meio delas, passem também a aceitar essas relações trigonométricas como algo mágico, pronto e acabado, sendo necessário apenas utilizar. Esse tipo de raciocínio implicará nas dificuldades de aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral sempre que for solicitado aos estudantes provar, por exemplo, a existência de um limite trigonométrico. Tal verificação permitiu identificar o sinal S_{LDEM2}-06: ausência de demonstrações matemáticas (de tecnologias) para justificarem as técnicas evocadas e utilizadas ao longo do desenvolvimento das mesmas, obstruindo o hábito de implementá-las no Ensino Superior, especificamente, para provar, por exemplo, a existência de um limite trigonométrico.

Munindo-se desses achados, passou-se a identificação dos seguintes tipos de Tarefas localizadas ao longo dos capítulos 2 e 3, por serem esses, específicos aos objetivos da presente investigação:

T_{1LDEM2}: Determinar a medida, em radianos, de um arco dado contido em uma circunferência de raio dado.

T_{2LDEM2}: Converter em radianos (ou graus) os ângulos (ou arcos) dados.

T_{3LDEM2}: Escrever a expressão geral dos arcos côngruos aos arcos dados.

T_{4LDEM2}: Calcular o seno (cosseno ou tangente) de ângulo (ou arco) dado.

T_{5LDEM2}: Determinar o quadrante de um ângulo (arco) dado o seno (cosseno) correspondente.

T_{6LDEM2}: Determinar o cosseno (seno) dado um deles e um intervalo do arco (ângulo) correpondente.

T_{7LDEM2}: Calcular, em IR, os valores dos ângulos (arcos) correspondentes dado o seno (tangente).

T_{8LDEM2}: Determinar o valor de uma incógnita numa equação trigonométrica que envolva seno (cosseno).

T_{9LDEM2}: Calcular o valor numérico de funções reais seno (cosseno) dado o arco correspondente.

$T_{10LDEM2}$: Determinar os valores máximo e mínimo de funções reais seno (cosseno).

$T_{11LDEM2}$: Construir o gráfico de funções seno (cosseno), informando o domínio, imagem e período, respectivamente.

$T_{12LDEM2}$: Determine o período de funções seno (cosseno).

$T_{13LDEM2}$: Determine, a partir do gráfico dado, o valor das incógnitas identificadas.

$T_{14LDEM2}$: Escolher a função trigonométrica adequada para um cálculo dado.

Considerando-se esses tipos de Tarefas, buscou-se aplicar os princípios da TAD de Chevallard (1998) para constituir a análise praxeólogica, que permitiu desvelar se existe coerência entre os domínios apresentados nos programas oficiais de ensino e os encontrados nesse volume, além disso, se os mesmos estariam justificando as tecnologias e técnicas para o desenvolvimento dessas tarefas:

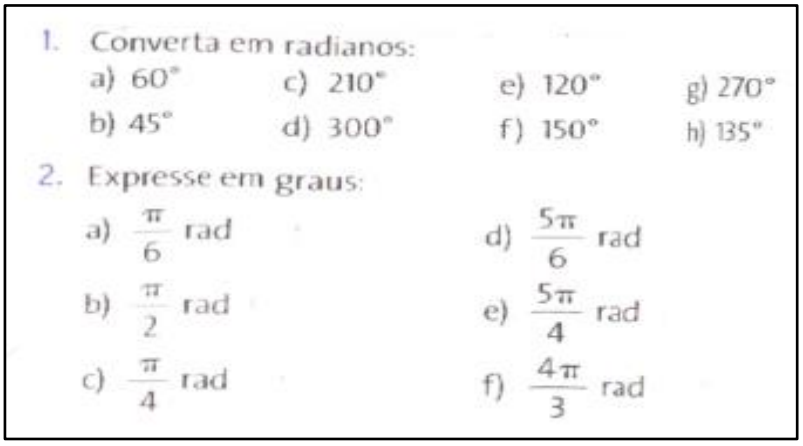
Quadro 53

Praxeologia existente nos tipos de Tarefas T Livro Didático "Matemática: contexto & aplicações" para 2º ano.

Bloco do Saber-Fazer: [T/τ]		**Bloco do Saber:** [θ/Θ]	
Tipo de tarefa, T	**Técnica utilizada, τ**	**Tecnologia existente, θ**	**Teoria base, Θ**
T_{1LDEM2}	τ_{1LDEM2}: Aplicar a regra de três (produto cruzado), valendo-se da fórmula C = 2π rad. τ_{2LDEM2}: Utilizar a fórmula mais reduzida $\ell = \alpha.r$, sendo ℓ = o comprimento do arco em cm, α = o ângulo cetral da circunferência e *r* o raio da mesma.	θ_{1LDEM2}: Definição de comprimento de circunferência.	Θ_{1LDEM2}: Geometria (plana)
T_{2LDEM2}	τ_{2LDEM2}		
T_{3LDEM2}	τ_{3LDEM2}: Aplicar a propriedade de arcos côngruos.	$\theta_{2\ LDEM2}$: Definição de arcos côngruos.	
T_{4LDEM2}	τ_{3LDEM2} τ_{4LDEM2}: Aplicar a propriedade de seno, cosseno ou tangente de um número real.	θ_2 θ_{3LDEM2}: Definição de seno, cosseno e tangente de um número real.	Θ_{2LDEM2}: Função
T_{5LDEM2}	τ_{3LDEM2} e τ_{4LDEM2}	θ_{2LDEM2} e θ_{3LDEM2}	
T_{6LDEM2}	τ_{3LDEM2} e τ_{4LDEM2}		
T_{7LDEM2}	τ_{3LDEM2} τ_{5LDEM2}: Aplicar a propriedade (inversa) de seno (tangente) de um número real.		
T_{8LDEM2}	τ_{6LDEM2}: Utilizar a propriedade de função trigonométrica seno (cosseno) em IR.	θ_{4LDEM2}: Definição da função trigonométrica seno (cosseno)	
T_{9LDEM2}	τ_{6LDEM2} τ_{7LDEM2}: Aplicar a propriedade de seno (cosseno) de um número real e substituir diretamente.	θ_{4LDEM2} e θ_{3LDEM2}	
$T_{10LDEM2}$	τ_{6LDEM2}	θ_{4LDEM2}	
$T_{11LDEM2}$	τ_{8LDEM2}: Utilizar a tabela de valores reais (em radianos) τ_{6LDEM2} τ_{9LDEM2}: Utilizar as propriedades funcionais, como: domínio, imagem e periodicidade. $\tau_{10LDEM2}$: Utilizar o estudo do sinal da função. $\tau_{11LDEM2}$: Utilizar o software livre Geogebra.		
$T_{12LDEM2}$	τ_{8LDEM2} e τ_{6LDEM2} $\tau_{13LDEM2}$: Aplicar a propriedade do período.		
$T_{13LDEM2}$	τ_{6LDEM2} $\tau_{14LDEM2}$: Comparar as incógnitas identificadas com a definição.		
$T_{14LDEM2}$	τ_{6LDEM2} e $\tau_{12LDEM2}$		
$T_{15LDEM2}$	τ_{6LDEM2} e τ_{9LDEM2}		

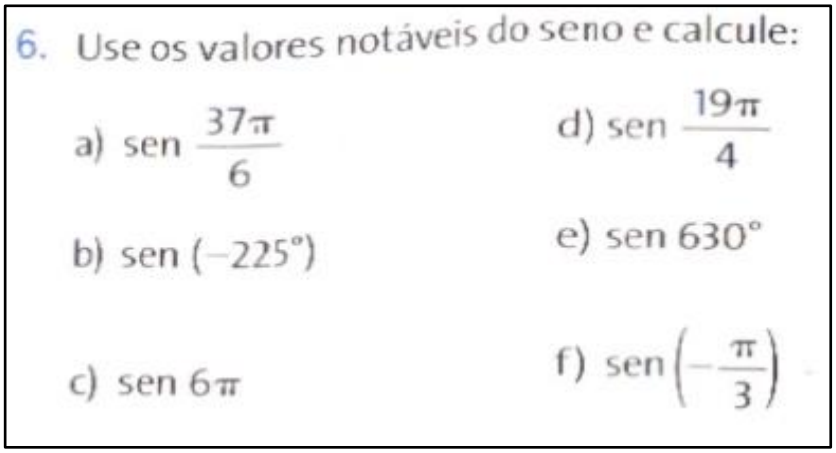
Fonte: O autor (2015).

Dado o quantitativo de tipos de Tarefas identificados, optou-se por exemplificar algumas dessas, priorizando-se as quatro tecnologias existentes θ_{1LDEM2}, θ_{2LDEM2}, θ_{3LDEM2} e θ_{4LDEM2}, a saber:



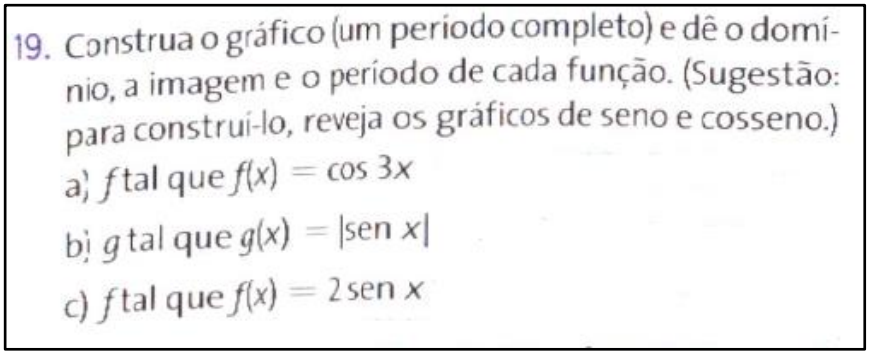
1. Converta em radianos:
   a) 60° c) 210° e) 120° g) 270°
   b) 45° d) 300° f) 150° h) 135°
2. Expresse em graus:
   a) $\frac{\pi}{6}$ rad d) $\frac{5\pi}{6}$ rad
   b) $\frac{\pi}{2}$ rad e) $\frac{5\pi}{4}$ rad
   c) $\frac{\pi}{4}$ rad f) $\frac{4\pi}{3}$ rad

Figura 50: T_{2LDEM2} (θ_{1LDEM2}).
Fonte: Livro Didático Matemática: contexto & aplicações/1º ano (2013, p. 30).



6. Use os valores notáveis do seno e calcule:
   a) $\operatorname{sen}\frac{37\pi}{6}$ d) $\operatorname{sen}\frac{19\pi}{4}$
   b) $\operatorname{sen}(-225°)$ e) $\operatorname{sen} 630°$
   c) $\operatorname{sen} 6\pi$ f) $\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{3}\right)$

Figura 51: T_{4LDEM2} (θ_{2LDEM2} e θ_{3LDEM2}).
Fonte: Livro Didático Matemática: contexto & aplicações/1º ano (2013, p. 40).



19. Construa o gráfico (um período completo) e dê o domínio, a imagem e o período de cada função. (Sugestão: para construí-lo, reveja os gráficos de seno e cosseno.)
   a) f tal que $f(x) = \cos 3x$
   b) g tal que $g(x) = |\operatorname{sen} x|$
   c) f tal que $f(x) = 2\operatorname{sen} x$

Figura 52: $T_{11LDEM2}$ (θ_{4LDEM2}).
Fonte: Livro Didático Matemática: contexto & aplicações/1º ano (2013, p. 54).

Considerando os tipos de Tarefas, cujas técnicas que são justificadas pelas tecnologias informadas acima, desenvolveu-se, nesse volume, uma breve estatística a partir dos tópicos ou bloco estruturantes dos capítulos selecionados (Df, ExcR, Exc), onde 48 tarefas (exercícios e/ou atividades) foram dispostas conforme o quadro abaixo:

Quadro 54

Estatística dos tipos de Tarefas T *encontradas no Livro Didático "Matemática: contexto & aplicações" para 2º ano.*

T	Três blocos de Questões com exercícios e/ou atividades			$Total_1$
	Df	ExcR [1 a 4 (cap. 2) e de 1 a 6 (cap. 3)]	Exc	
	Rastreamento e localização das questões enumeradas de 1 a 12 (cap. 2) e de 1 a 26 (cap. 3)[57]			
T_{1LDEM2}	-	1a	-	1
T_{2LDEM2}	-	2a	1a, 2a, 3a, 4a, 5a, 6a	7
T_{3LDEM2}	-	3a, 4a	7a, 8a, 9a, 10a, 11a, 12a, 8b, 9b, 10b, 14b	**12**
T_{4LDEM2}	-	1b, 5b	4b, 5b, 6b, 12b	6
T_{5LDEM2}	-	-	1b, 2b	2
T_{6LDEM2}	-	-	3b	1
T_{7LDEM2}	-	-	7b, 11b	2
T_{8LDEM2}	-	2b	13b	2
T_{9LDEM2}	-	3b, 6b	15b, 17b, 18b	5
$T_{10LDEM2}$	-	-	16b	1
$T_{11LDEM2}$	-	4b	19b	2
$T_{12LDEM2}$	-	-	20b	1
$T_{13LDEM2}$	-	-	21b	1
$T_{14LDEM2}$	-	-	22b, 23b, 25b, 26b	4
$T_{15LDEM2}$	-	-	24b	1
$Total_2$	-	10	38	
Total de Questões				38

Fonte: O autor (2015).

Dessa estatística, evocando-se a análise do Livro Didático, desejou-se saber: quais tipos de Tarefas T permanecem nos exercícios e/ou atividades desse capítulo? Existem tipos de Tarefas T não previstos no tópico da teoria? O bloco do saber justifica as técnicas associadas aos tipos de tarefas T encontrados?

Paralelo aos raciocínios anteriores, constatou-se que:

[57] Todas as questões do **capítulo 2** foram acrescidas da letra ***a*** e do **capítulo 3** da letra ***b***, objetivando diferenciá-las entre si.

● O T_{3LDEM2} é o tipo mais privilegiado por aparecer 12 vezes, contemplando a maioria dos blocos de questões;

● Seis tipos foram menos privilegiado por aparecer apenas 01 vez, principalmente, no bloco de Exc, minimizando o treinamento das técnicas associadas às mesmas;

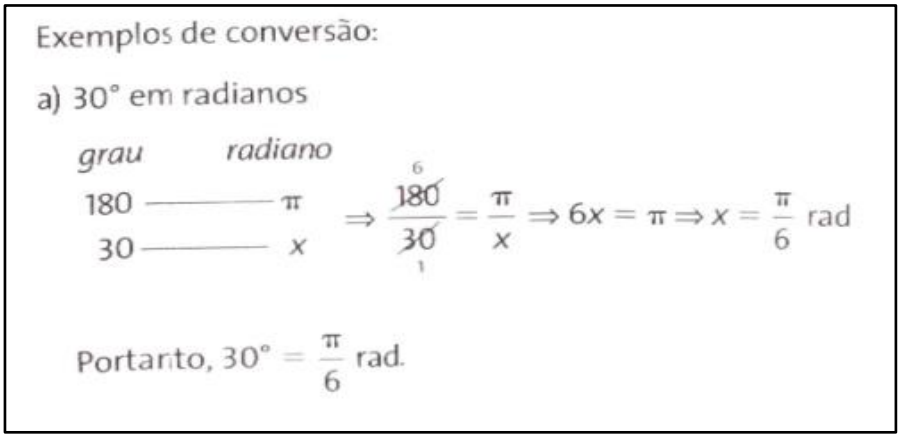
● O bloco EXc, com 38 questões, continua liderando o maior quantitativo e variedade dos tipos de tarefas T identificados, contrariamente ao bloco Df que não disponibilizou técnicas, por meio do desenvolvimento das demonstrações matemáticas das noções trigonométricas associadas. Esse fato fundamenta a hipótese de que a ausência desses recursos matemáticos contribuem para dificultar a aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral, sobretudo, quando se faz necessário os recursos da Trigonometria para resolver tarefas tais como: demonstrar que $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

● Apesar de o bloco ExcR disponibilizar uma pequena mobilização das técnicas utilizadas para resolverem as tarefas do bloco Exc, as tecnologias θ_{1LDEM2}, θ_{2LDEM2}, θ_{3LDEM2} e θ_{4LDEM2} servem de fundamentação da produzir novas técnicas que se valem das definições e propriedades peculiares as noções trigonométricas desses dois capítulos e, por isso, possibilitam a articulação entre elas para resolverem os outros tipos de Tarefas apresentados, sobretudo, quando se utilizam da força das definições de função seno (cosseno) abrigadas pela teoria Θ_{2LDEM2}.

Isto posto e, aplicando as lentes de Chevallard (1998) sobre o Quadro 50 (Cf. p. 270), foi possível compreender a praxeologia que está nos bastidores dos dois capítulos do volume 2 da coleção em tela.

Inicialmente, o que foi mais visível, a mudança de *domínios* matemáticos representada pela variação entre Θ_{1LDEM2} e Θ_{2LDEM2}, onde o resgate das tecnologias θ_{1LDEM2} e θ_{2LDEM2}, referentes à geometria (plana) para mostrar as relações entre arcos e ângulos, bem como suas propriedades de equivalências para determinação de suas respectivas medidas, sofrem ou são atingidas pela necessidade introdução do raciocínio funcional (dissimulado na regra de três por meio das grandezas diretamente proporcionais) que recorre à fórmula para a determinação do comprimento C de uma circunferência d raio *r*, ou seja, $C = 2\pi r$ e, como cara raio *r* corresponde a 1 rad (radiano), essa expressão passa a ser representada por:

C = 2π.rad. Como um arco de 360º mede 2π.rad, o raciocínio equivalente dessa metades é abundantemente utilizado para converter graus em radianos, conforme mostra a figura abaixo:


Exemplos de conversão:

a) 30° em radianos

grau — radiano

180 ——— π

30 ——— x

$\Rightarrow \frac{\cancel{180}^{6}}{\cancel{30}_{1}} = \frac{\pi}{x} \Rightarrow 6x = \pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{6}$ rad

Portanto, $30° = \frac{\pi}{6}$ rad.

Figura 53: Raciocínio funcional apoiado no raciocínio proporcional (regra de três).
Fonte: DANTE (2013, p. 29).

Teoricamente, mesmo sendo a partir das tecnologias θ_{3LDEM2} e θ_{4LDEM2} que foram responsáveis pela definição da articulação e ampliação do pensamento trigonométrico entre as razões trigonométricas e número real e, mais ainda, incorporação dessas noções à ideia de função trigonométrica – que deveriam funcionar como uma bricolagem entre os dois *domínios* matemáticos geometria (plana) e função – os resíduos da ruptura epistemológica podem está contribuindo para que esse raciocínio não seja assimilado, conforme foi observado na **DAMFT$_7$**[58] pinçada de Goios (2010).

Nesse sentido, observou-se que mesmo por meio da tentativa de bricolagem entre as propriedades da geometria (plana) e da função que, por sua vez, objetiva possibilitar à primeira, um modelo matemático para tratar, no nível abstrato, tais propriedades, ainda reside apresentação didática dessa "bricolagem" cinzas epistemológicas que podem estar influenciando na aprendizagem das Funções Trigonométricas. Assim, repousa sobre essa constatação o sinal S_{LDEM2}-07: a dificuldade de percepção no processo de bricolagem entre os domínios da geometria (plana) e função, cujo objetivo do segundo é conceber um modelo matemático (abstrato) para manipular propriedades geométricas. Vale ainda

[58] Vide Quadro 14 (Cf. p. 83).

salientar que, mesmo sendo específico ao Campo Trigonométrico, esse fato é abrigado pelos estudos de Gueudet (2008a), por compartilhar dos resultados encontrados pela autora, sobretudo quando destaca que são os conceitos abstratos as características mais difíceis de serem superadas na transição EM-ES.

Na sequência, foi examinado o terceiro volume da coleção organizada por Dante (2013).

5.1.2.1.3 – O Livro Didático de Matemática para o 3º ano:

Conforme apresentado no Quadro 48 (Cf. p. 264), não existe, nesse volume, traços das Funções Trigonométricas e, por esse motivo, não se procedeu a uma análise praxeológica.

Dessa forma, além de diminuir essa análise, essa lacuna importou para a definição do sinal S_{LDEM3}-08: ausência de praxeologia referente às noções das Funções Trigonométricas no Livro Didático para o 3º ano.

Isto posto, foi distribuído no quadro seguinte um panorama dos sinais identificados na análise desenvolvida nos Livros Didáticos da coleção brasileira para o Ensino Médio.

Quadro 55

Mapeamento de Sinais encontrados no Livro Didático "Matemática: contexto & aplicações" para o Ensino Médio no Brasil.

Referência	**Mapeamento de Sinais no Livro Didático do Ensino Médio** (MS_{LDEM})
S_{LDEM}-01	As primeiras noções trigonométricas apresentadas aos estudantes repousam, nessa obra, na U_4 do 1º ano do EM, destacando-se "a trigonometria no triângulo retângulo".
S_{LDEM}-02	Existem as noções da trigonometria na circunferência, dessa obra, na U_1 do 2º ano do EM, sendo o capítulo 3 destinado às "Funções Trigonométricas".
S_{LDEM1}-03	Os livros didáticos consideram como disponíveis as orientações curriculares nos documentos oficiais divulgados pelo MEC, embora busquem outros meios capazes de "explicar" a estruturação dos conteúdos matemáticos para o EM da forma como são apresentados.
S_{LDEM1}-04	Ratifica o indício microscópico e, por isso, talvez não percebido entre os autores dos livros didáticos examinados: a transição entre as praxeologias pontuais e as praxeologias locais, quando não centradas em uma mesma tecnologia, ocasiona uma ruptura epistemológica que, nesse caso, girou-se em torno do domínio da geometria plana para o domínio da função.
S_{LDEM2}-05	Rupturas epistemológicas na aprendizagem das Funções das Trigonométricas na passagem do cálculo das razões trigonométricas de ângulos agudos para ângulos obtusos na medida em que, sem demonstração, *"é necessário saber que sen 90°=1 e cos 90°=0"*.
S_{LDEM2}-06	Ausência de demonstrações matemáticas (de tecnologias) para justificarem as técnicas evocadas e utilizadas ao longo do desenvolvimento das mesmas, obstruindo o hábito de implementá-las no Ensino Superior, especificamente, para provar, por exemplo, a existência de um limite trigonométrico.
S_{LDEM2}-07	A dificuldade de percepção no processo de bricolagem entre os domínios da geometria (plana) e função, cujo objetivo do segundo é conceber um modelo matemático (abstrato) para manipular propriedades geométricas.
S_{LDEM3}-08	Ausência de praxeologia referente às noções das Funções Trigonométricas no Livro Didático para o 3º ano.

Fonte: O autor (2015).

Esse mapeamento permitiu perceber que no Brasil, residem nos Livros Didáticos de Matemática, particularmente nos da coleção *"Matemática: contexto & aplicações"*, a apresentação oficial do Campo Trigonométrico, instituído em conformidade com os documentos oficiais, anteriormente analisados.

No entanto, se faz ainda necessário aumentar o rigor da institucionalização das noções das Funções Trigonométricas, para evitar fragilidades apontadas pelos sinais S_{LDEM1}-03 e S_{LDEM1}-04.

Ademais que, evocando-se os ensinamentos de Gueudet (2008a), revisitar a história de Matemática sempre que uma noção precisar ser apresentada representa uma necessidade para atenuar as rupturas epistemológicas, que foram identificadas microscopicamente, mesmo depois da tentativa da bricolagem entre os domínios verificados, caso do sinal S_{LDEM1}-07.

E, por fim, valorizar as demonstrações matemáticas pode auxiliar nos desafios que favorecem à superação das dificuldades de aprendizagem quando as rupturas epistemológicas são assimiladas pelas bricolagens universalmente validadas.

Assim, cumpriu-se mais uma etapa da pesquisa em tela, demonstrando os elementos que estão nos bastidores, das causas para o insucesso da transição EM-ES, onde os Livros Didáticos, mesmo com todos os esforços e cuidados dispensados pelos autores, deixam "escapar", sutilizas existentes que aparentemente, seriam superadas pelos estudantes brasileiros que, possivelmente, caso migrassem para o ES levarão consigo o contágio, aparentemente superado, fruto das rupturas epistemológicas, existentes nesses documentos.

Com efeito, e, em conformidade com as outras fontes documentais – as macroavaliações – decidiu-se compreender como alguns aspectos encontrados até o presente momento, também residem nesses exames e sirvam para fortalecer as justificativas, que foram verificadas até essa etapa da pesquisa.

5.1.3 – Análise das Macroavaliações de Matemática (AMM) [59]

Para dar cabo dessa empreitada, utilizou-se das questões abaixo como fio condutor:

(AMM1) Qual o Nível de Funcionamento do Conhecimento (NFC), segundo Robert (1997, 1998), encontrado nas macroavaliações institucionais brasileiras?

(AMM2) Quais são os tipos de Tarefas associada(s) às noções de Funções Trigonométricas?

[59] Os **sinais** das Macroavaliações para o Ensino Médio serão representados por S_{MAvEM}.

(AMM2) Esses tipos de Tarefas estão previstos nos: (a) Programas Oficiais de Ensino de Matemática do Brasil? (b) Livros Didáticos do Ensino Médio?

Essa demanda exigiu que, além da utilização dos pressupostos teóricos da TAD de Chevallard (1998), evocasse também as considerações de Robert (1997, 1998) abordadas no capítulo III dessa pesquisa para revelar o oculto – "o não dito e o não visível" – nas macroavaliações institucionais brasileiras que servem além de uma forma de validação do Ensino Médio, como uma ferramenta de controle para o ingresso no Ensino Superior.

No Brasil, denomina-se de ENEM – Exame Nacional do Ensino Médio, o sistema de macroavaliações utilizado para verificar, primordialmente, o desempenho e conhecimento prévio disponível dos estudantes do Ensino Médio, para a entrada nas universidades públicas federais e para as bolsas do PROUNI (Programa Universidade para Todos) do MEC, conforme a *Lei Federal n.º 11.096/2005,* destinadas as instituições privadas de Ensino Superior. Além desse, existem ainda algumas instituições de Ensino Superior que fabricam seus próprios instrumentos de seleção tradicionalmente, conhecidos como "vestibular". Para tanto, optou-se por restringir essa análise às cinco últimas edições (2009 a 2013), do ENEM acreditando-se ser suficiente para alicerçar as respostas esperadas pelos questionamentos acima.

É também intenção dessa análise observar se as expectativas institucionais esperadas dos estudantes, nesses exames, particularmente, as voltadas para as noções de Funções Trigonométricas e baseadas nas expectativas institucionais existentes nos documentos oficiais (Programas de Ensino e Livros Didáticos), coexistem e dialogam entre si.

Isto posto, cabe esclarecer que o ENEM, foi implementado pelo MEC desde 1998, compreendendo, até o final do ano de 2014, dezesseis edições realizadas[60]. Ao longo dessas, o referido exame sofreu algumas modificações para atender às exigências de reformulações curriculares do Ensino Médio, bem como a

[60] Faz-se necessário esclarecer que à época do desenvolvimento da presente análise, o ENEM 2014 ainda não tinha sido realizado. Por esse motivo, rastrearam-se as últimas cinco edições contadas a partir de 2013.

democratização das oportunidades de acesso às vagas do Ensino Superior Público Federal, que vislumbra a continuidade dos estudos do Ensino Médio.

Outro ponto necessário em destaque, repousou na fonte fundamentadora do ENEM: os PCNs dos Ensinos Fundamental e Médio, analisados no início desse capítulo. Tal verificação permitiu comprovar que existe conformidade, entre as expectativas presentes nesses documentos e no perfil sobre o qual, de modo geral, o ENEM foi desenvolvido, quando supõe disponíveis os conhecimentos prévios dos estudantes do Ensino Médio.

Esse exame é estruturado a partir de 180 questões objetivas e uma dissertação, ambas desenvolvidas sob a óptica da Matriz de Referência disponibilizada pelo MEC, sendo 45 questões dirigidas para área de Matemática e suas Tecnologias. Nessa matriz foram apresentadas as competências e habilidades (H) esperadas dos estudantes do Ensino Médio que, por sua vez, estão alicerçadas em cinco Eixos Cognitivos (iguais para todas as áreas do conhecimento), sendo o segundo deles, CF (compreender fenômenos), responsável por abrigar os objetos de conhecimento, associados à própria matriz, a saber: conhecimentos numéricos, conhecimentos geométricos, conhecimentos de estatística e probabilidade, conhecimentos algébricos e conhecimentos algébricos/geométricos. Pelo abrigo indicado para as noções do Campo Trigonométrico, optou-se destacar dois desses:

> **Conhecimentos geométricos**: características das figuras geométricas planas e espaciais; grandezas, unidades de medida e escalas; comprimentos, áreas e volumes; ângulos; posições de retas; simetrias de figuras planas ou espaciais; congruência e semelhança de triângulos; teorema de Tales; relações métricas nos triângulos; circunferências; trigonometria do ângulo agudo. (BRASIL, 2009, p. 18)
>
> **Conhecimentos algébricos**: gráficos e funções; funções algébricas do 1.º e do 2.º graus, polinomiais, racionais, exponenciais e logarítmicas; equações e inequações; relações no ciclo trigonométrico e funções trigonométricas. (BRASIL, 2009, p. 18)

Essa comprovação ratifica os resultados das análises praxeológicas anteriores nos documentos oficiais (Programas de Ensino e Livros Didáticos para o Ensino Médio) que, dessa forma, acentua a ruptura epistemológica entre os domínios da geometria e função.

A seguir, o levantamento das tarefas propostas que consideraram as noções relativas às Funções Trigonométricas em jogo, foi apresentado no quadro abaixo:

Quadro 56

Quantitativo de questões referentes às noções das Funções Trigonométricas nos ENEMs.

ENEM	Questões (Q)	Total absoluto	Total relativo (%)
2009	164 e 174	2	4,4
2010	160	1	2,2
2011	158	1	2,2
2012	–	0	0
2013	156	1	2,2

Fonte: O autor (2015).

Observando-se a última coluna do quadro acima, constatou-se que o objetivo a se verificar, o desempenho e conhecimento prévio disponível dos estudantes do Ensino Médio, sobre as referidas noções, para a entrada nas universidades públicas federais oscilou para menos de 5% e aponta uma tendência para seu desaparecimento, seguindo-se, dessa forma, na contramão das impressões iniciais que levou em consideração as suas generalidades.

Sob o olhar dessa análise, tal constatação contribui para diminuir, ainda mais, a motivação dos estudantes para se interessarem pela compreensão de fenômenos naturais ondulatórios, por meio dos modelos trigonométricos, conduzindo-os a um possível fracasso escolar, na disciplina de Física do mesmo nível de ensino, bem como enfrentar as supostas dificuldades de aprendizagem, durante o curso da disciplina Cálculo Diferencial e Integral do Ensino Superior.

Nesse sentido, supõe-se que, talvez, outras noções matemáticas foram privilegiadas em detrimento das noções das Funções Trigonométricas, residindo nessa possibilidade, uma contradição quando se leva em consideração as orientações nos PCNEM, PCN+, OCEM e, também na coleção de Livros Didáticos analisados para o Ensino Médio, visto que essas noções ocupam a mesma quantidade de unidades didáticas no volume 2 (U1: cap. 1, 2, 3 e 4) e a metade da quantidade da unidade no volume 1 (U4: cap. 8), conforme indicado no Quadro 42 (Cf. p. 225). Essa marca, constituiu o primeiro sinal, S_{MAvEM}-01, desses documentos.

Tendo elencado essas impressões iniciais, apresentaram-se, na sequência, as discussões em relação às questões identificadas associadas as suas, respectivas, tarefas.

5.1.3.1 – ENEM 2009: Função Trigonométrica

O percentual de 4,4% foi representado pelas questões de número 164 e 174 para verificar o desempenho e o conhecimento prévio disponível dos estudantes do Ensino Médio sobre as noções de Funções Trigonométricas. Recorrendo às expectativas institucionais esperadas pela **Matriz de Referências de Matemática e suas Tecnologias (MRMT)**, para os estudantes dessa etapa escolar, tem-se que:

> **(1) Questão 164 – MRMT**: Levando-se em consideração as competências supostas adquiridas no Ensino Médio, é esperado dos estudantes que os mesmos sejam capazes de atender à "*Competência de área 5 - Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas".* (BRASIL, 2009).

Constam nesse documento, as seguintes habilidades (H) associadas às competências dessa área:

Quadro 57

Habilidades 19 a 23.

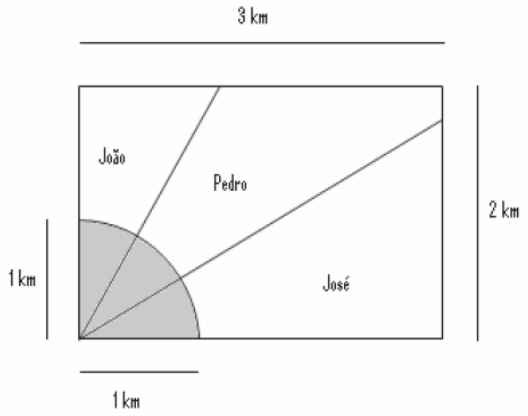
H19 - Identificar representações algébricas que expressem a relação entre grandezas.
H20 - Interpretar gráfico cartesiano que represente relações entre grandezas.
H21 - Resolver situação-problema cuja modelagem envolva conhecimentos algébricos.
H22 - Utilizar conhecimentos algébricos/geométricos como recurso para a construção de argumentação.
H23 - Avaliar propostas de intervenção na realidade utilizando conhecimentos algébricos.

Fonte: BRASIL (2009).

Ao comparar a questão 164 com a **MRMT**, identificou-se na competência de área 5, por meio das habilidades matemáticas relacionadas, ostensivos de representações discursivas quando descreve as características métricas do terreno, bem como a condição para que o mesmo fosse dividido entre os herdeiros; ostensivos de representação gráfica (a figura) que auxilia na visualização para evocação dos não ostensivos associados e, ostensivos de representação escrita que são mencionados nas alternativas das respostas o que favorece também, a evocação das noções de porcentagens para modela a resposta final. Com esses dados e juntamente com as definições de Robert (1997, 1998), foi possível compreender o Nível de Funcionamento do Conhecimento (NFC), tanto da questão em tela quanto do esperado dos estudantes para encontrar a solução desse tipo de Tarefa, cujas habilidades relacionadas não estão claramente postas no enunciado da questão.

TAREFA:

Ao morrer, o pai de João, Pedro e José deixou como herança um terreno retangular de 3 km x 2 km que contém uma área de extração de ouro delimitada por um quarto de círculo de raio 1 km a partir do canto inferior esquerdo da propriedade. Dado o maior valor da área de extração de ouro, os irmãos acordaram em repartir a propriedade de modo que cada um ficasse com a terça parte da área de extração, conforme mostra a figura.

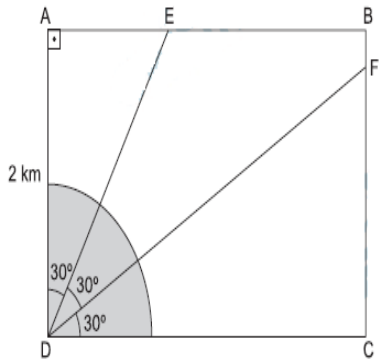


Em relação à partilha proposta, constata-se que a porcentagem da área do terreno que coube a João corresponde, aproximadamente, a

(considere $\frac{\sqrt{3}}{3} = 0,58$)

A 50%.
B 43%.
C 37%.
D 33%.
E 19%.

Figura 54: Questão 164, gabarito "E".
Fonte: ENEM (2009).



No triângulo retângulo ADE, representante da parte do terreno que coube a João, temos:

$$\text{tg } 30° = \frac{AE}{AD} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{AE}{2} = 0,58 \Rightarrow AE = 1,16 \text{ km}$$

A área desse triângulo, em km^2, é:

$$\frac{1,16 \cdot 2}{2} = 1,16$$

O terreno que coube a João corresponde a

$$\frac{1,16 \text{ km}^2}{2 \cdot 3 \cdot \text{km}^2} \cong 0,193 = 19,3\% \text{ do terreno total, ou seja,}$$

aproximadamente, 19% do terreno inicial.

Figura 55: Resolução da Questão164.
Fonte: O autor (2015).

Em respostas aos questionamentos iniciais dessa análise, tem-se:

AMM1: *TÉCNICO.*

AMM2: *T_{4LDEF9} (T_{3LDEM1}): Escolher a relação trigonométrica adequada para um cálculo dado; $T_{2.3LDEM1}$: Calcular o comprimento do lado oposto a um ângulo agudo;*

AMM3: *Os tipos de Tarefas associados à **questão 164** estão previstos apenas nos Livros Didáticos, tanto no volume 9 para o Ensino Fundamental como no volume 1 para o Ensino Médio.*

Nessas condições, pode-se elencar os sinais:

- S_{MAvEM}-02: Os dados informados no problema são facilmente identificados por conta dos ostensivos discursivos, escriturais e gráficos (a figura), permitindo-se, dessa forma, perceber a incógnita que se deseja descobrir

(a medida do cateto oposto ao ângulo de 30º no ∆ ADE). Por sua vez, evoca-se os não ostensivos, representados pelas técnicas τ_{6}LDEF9 ou τ_{3}LDEM1, verificadas nos tipos de Tarefas relacionados para resolver a questão proposta. A técnica utilizada para a finalização do problema – razão entre duas medidas de superfície – está imersa nos diferentes tipos de problemas relacionados a geometria e, também, a *função* de uma maneira geral.

- S_{MAvEM}-03: Observou-se a necessidade de evocar, respectivamente, os seguintes conhecimentos prévios: noção de ângulo, divisão de ângulos, noção de fração, noção de triângulo retângulo, noção da razão trigonométrica tangente → para manipular a definição de tangente de um ângulo agudo no ∆ ADE; noção de área do triângulo, divisão proporcional, noção de porcentagem → para manipular o cálculo da área solicitada e transformar o resultado de acordo com as alternativas dadas. Caso, essa lista de conhecimentos prévios não estiver disponível, provavelmente, o estudante não resolverá a questão.
- S_{MAvEM}-04: Cabe ainda destacar que o contexto pensado para essa questão estimula a evocação das noções de trigonometria e mostra quanto se faz necessário articular outros conhecimentos para modelar o raciocínio matemático (geométrico-algébrico) e dar cabo da resposta.
- S_{MAvEM}-05: Talvez, a maior dificuldade encontrada pelo estudante para finalizar essa tarefa resida no tempo gasto com os cálculos aritméticos, a exemplo da divisão das duas áreas, pois existe a pressão psicológica quando se leva em consideração a quantidade total de questões e, ainda mais, a condição de não utilização do uso da calculadora.

> **(2) Questão 174 – MRMT**: Levando-se em consideração as competências supostas adquiridas no Ensino Médio, é esperado dos estudantes que os mesmos sejam capazes de atender a "*Competência de área 3 - Construir noções de grandezas e medidas para a compreensão da realidade e a solução de problemas do cotidiano".* (BRASIL, 2009).

Constam nesse documento, as seguintes habilidades (H) associadas às competências dessa área:

Quadro 58

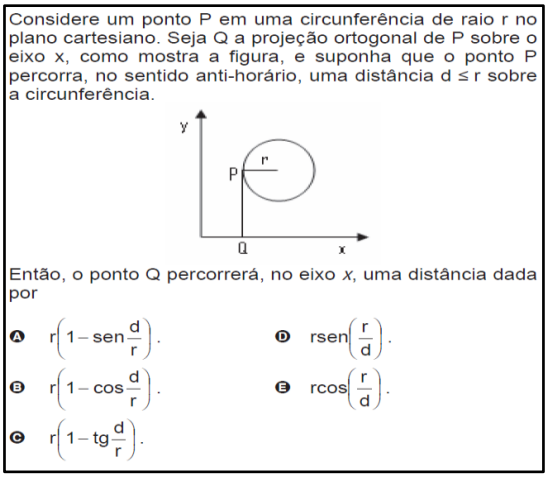
Habilidades 10 a 14.

H10 - Identificar relações entre grandezas e unidades de medida.
H11 - Utilizar a noção de escalas na leitura de representação de situação do cotidiano.
H12 - Resolver situação-problema que envolva medidas de grandezas.
H13 - Avaliar o resultado de uma medição na construção de um argumento consistente.
H14 - Avaliar proposta de intervenção na realidade utilizando conhecimentos geométricos relacionados a grandezas e medidas.

Fonte: BRASIL (2009).

Confrontando a questão 174 com a **MRMT**, identificou-se na competência de área 3, por meio das habilidades matemáticas relacionadas, ostensivos de representação gráfica (a figura) que auxilia na visualização para evocação dos não ostensivos, associados às noções de arcos e ângulos de uma circunferência localizada em um sistema de eixos cartesianos e, ostensivos de representação escrita que são mencionados nas alternativas das respostas, o que favorece também, a evocação das noções de seno, cosseno e tangente de um número real, principalmente, para obtenção da resposta final. Mesmo que não se tenha percebido, algumas habilidades atreladas à competência de área 3 estão sendo analisadas, sobretudo, quando a tarefa em tela, prioriza a medidas de grandezas e constantes análises dos resultados dessas. Dessa forma, pode-se caracterizar o NFC e listar alguns conhecimentos prévios esperados dos estudantes, para resolver a questão.

TAREFA:


Considere um ponto P em uma circunferência de raio r no plano cartesiano. Seja Q a projeção ortogonal de P sobre o eixo x, como mostra a figura, e suponha que o ponto P percorra, no sentido anti-horário, uma distância d ≤ r sobre a circunferência.

Então, o ponto Q percorrerá, no eixo *x*, uma distância dada por

(A) $r\left(1-\text{sen}\frac{d}{r}\right)$.
(B) $r\left(1-\cos\frac{d}{r}\right)$.
(C) $r\left(1-\text{tg}\frac{d}{r}\right)$.
(D) $r\,\text{sen}\left(\frac{r}{d}\right)$.
(E) $r\cos\left(\frac{r}{d}\right)$.

Figura 56: Questão 174, gabarito "B".
Fonte: ENEM (2009)

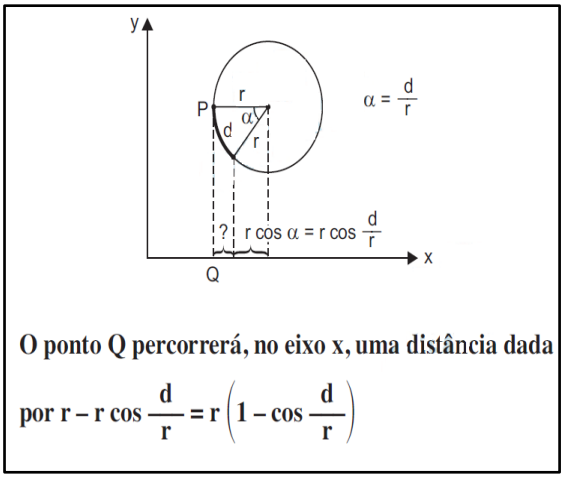


Figura 57: Resolução da Questão 174.
Fonte: O autor (2015).

Em respostas aos questionamentos iniciais dessa análise, tem-se:

AMM1: *MOBILIZÁVEL.*

AMM2: *T_{6LDEM2}: Determinar o cosseno (seno) dado um deles e um intervalo do arco (ângulo) correspondente.*

AMM3: *Os possíveis tipos de Tarefas associados à **questão 174** estão não estão previstos nos Programas Oficiais de Ensino e em nenhum dos volumes dos Livros Didáticos examinados para o Ensino Médio.*

Nessas condições, pode-se elencar os sinais:

- S_{MAvEM}-06: Observou-se que as orientações descritas na tarefa pode ser desenvolvida naturalmente pelo estudante que, inclusive pode, valer-se dos ostensivos gráficos (figura) e escriturais (as alternativas de resposta da questão), para evocar os não ostensivos mais adequados ao desenvolvimento da mesma. Nesse sentido, a técnica τ_{4LDEM} *(aplicar a propriedade de seno, cosseno ou tangente de um número real)* representa a única alternativa que pode auxiliar a resolução que foi acionada apenas uma vez pela questão 3b do capítulo 3, do Livro Didático analisado, conforme Quadro 51 (Cf. p. 274).
- S_{MAvEM}-07: Verificou-se que evocar o não ostensivo protegido pela tecnologia θ_{3LDEM2} *(Definição de seno, cosseno e tangente de um número real)*, especificamente, o cosseno, não seria suficiente para resolver a

tarefa, pois além dele, faz-se necessário ter disponível a seguinte hierarquia de conhecimentos prévios (CP_{Q174}):

CP_{Q174} (1): Evocar as propriedades da circunferência trigonométrica: centro na origem do sistema de eixos cartesianos; raio *r = 1*; arcos medidos em radianos com orientação obedecem ao sentido horário (ou anti-horário), inclusive.

CP_{Q174} (2): Definição de projeção ortogonal.

CP_{Q174} (3): Comparar essas propriedades com o não ostensivo, gráfico do problema dado e perceber algumas diferenças e analogias que podem ser aproveitadas em busca da solução, tais como: (***diferenças*** → translação do centro da circunferência para o 1º quadrante do plano XOY; raio r ≠ 1; extremidade do arco no sentido anti-horário) e (***analogias*** → representação algébrica de P e de todas as projeções ortogonais dos pontos em movimento que determinarão juntamente com o centro da circunferência um arco em função do ângulo central gerado). Tal procedimento, por sua vez, exigirá um grau significativo de flexibilidade cognitiva do estudante para aproveitar elementos favoráveis à questão.

CP_{Q174} (4): Cálculo da distância por meio da variação entre duas medidas de comprimento (segmentos). Assim, essa questão revela todos esses não ostensivos que deixaram de ser mobilizados, principalmente, nos Livros Didáticos mencionados:

Considerando o desenvolvimento abaixo, tem-se:

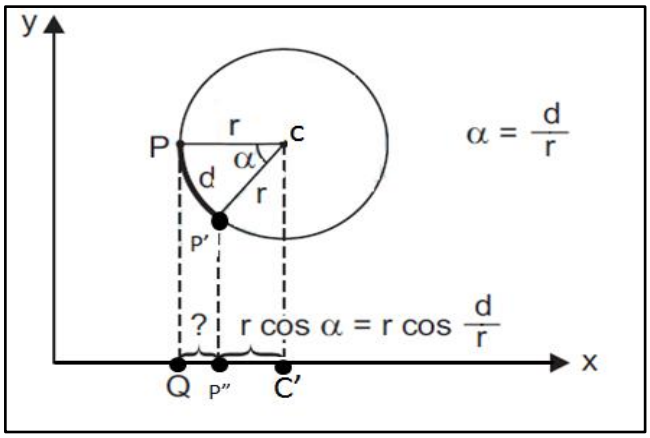


Figura 58: Detalhamento da resolução da Questão 174.
Fonte: O autor (2015).

Passo 1: Deslocar P sobre a circunferência de centro C no sentido anti-horário e determinar o ponto P' (orientação dada pela questão);

Passo 2: Projetar ortogonalmente P' em OX, determinando P" e a distância d (hipótese da questão) → **CP_{Q174} (2)**;

Passo 3: Projetar ortogonalmente C em OX, determinando C' → **CP_{Q174} (2)** (***técnica introduzida*** $\tau_{1\text{- }Q174}$);

Passo 4: Mobilizar **CP_{Q174} (1)** e **CP_{Q174} (3)**. Isso permite escrever que P''C' = $r.cos\ \alpha$ (***técnica introduzida*** $\tau_{2\text{- }Q174}$);

Passo 5: Mobilizar **CP_{Q174} (4)**. Isso permite escrever que QC' = PC = r. Logo, QP" = QC' – P"C' = r – $r.cos\ \alpha$ = r (1 – $cos\ \alpha$) e como α = d/r, resulta que: QP" = r (1 – *cos* d/r) (***técnica introduzida*** $\tau_{3\text{- }Q174}$);

- S_{MAvEM}-08: Constatou-se o quanto é insuficiente o elenco de técnicas disponibilizadas pelos Livros Didáticos, para a resolução de tarefas desse tipo quando se considera as técnicas $\tau_{1\text{- }Q174}$, $\tau_{2\text{- }Q174}$ e $\tau_{3\text{- }Q174}$;
- S_{MAvEM}-09: Averiguou-se a incompatibilidade institucional entre o suposto conhecimento esperado, para o estudante e o conhecimento efetivamente, existente nas macroavaliações brasileiras.

5.1.3.2 – ENEM 2010: Função Trigonométrica

Com 2,2% de representação a questão de número 160 foi a única para examinar o desempenho e os conhecimentos prévios disponíveis dos estudantes do Ensino Médio sobre as noções de Funções Trigonométricas. Considerando-se as expectativas institucionais esperadas pela **Matriz de Referências de Matemática e suas Tecnologias (MRMT)**, para os estudantes dessa etapa escolar, tem-se que:

> **Questão 160 – MRMT**: Levando-se em consideração as competências supostas adquiridas no Ensino Médio, é esperado dos estudantes que os mesmos sejam capazes de atender a "*Competência de área 4 - Construir noções de variação de grandezas para a compreensão da realidade e a solução de problemas do cotidiano".* (BRASIL, 2009).

Constam nesse documento, as seguintes habilidades (H) associadas às competências dessa área:

Quadro 59

Habilidades 15 a 18.

H15 - Identificar a relação de dependência entre grandezas.
H16 - Resolver situação-problema envolvendo a variação de grandezas, direta ou inversamente proporcionais.
H17 - Analisar informações envolvendo a variação de grandezas como recurso para a construção de argumentação.
H18 - Avaliar propostas de intervenção na realidade envolvendo variação de grandezas.

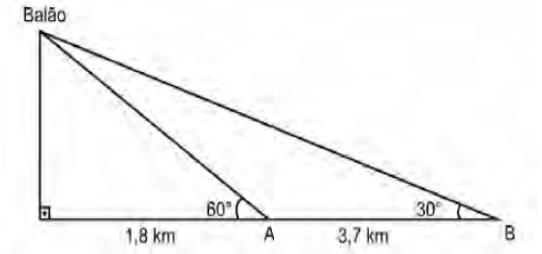
Fonte: BRASIL (2009).

Buscando-se uma lente para analisar a questão 160 a partir da **MRMT**, identificou-se na competência de área 4, por meio das habilidades matemáticas relacionadas, ostensivos de representação gráfica (a figura) que auxilia na visualização para evocação dos não ostensivos associados as noções de tangente de um ângulo agudo de um triângulo retângulo e, ostensivos de representação discursivas, que mencionam os detalhamentos na redação do problema reforçando a evocação do cálculo direto da tangente de 60°. Tais discriminações, além de auxiliarem a identificação das habilidades em jogo, também permitiram verificar o NFC e avaliar a distância que essa tarefa se encontra do Ensino Médio brasileiro.

TAREFA:

Um balão atmosférico, lançado em Bauru (343 quilômetros a Noroeste de São Paulo), na noite do último domingo, caiu nesta segunda-feira em Cuiabá Paulista, na região de Presidente Prudente, assustando agricultores da região. O artefato faz parte do programa Projeto Hibiscus, desenvolvido por Brasil, França, Argentina, Inglaterra e Itália, para a medição do comportamento da camada de ozônio, e sua descida se deu após o cumprimento do tempo previsto de medição.

Disponível em: http://www.correiodobrasil.com.br. Acesso em: 02 maio 2010.



Na data do acontecido, duas pessoas avistaram o balão. Uma estava a 1,8 km da posição vertical do balão e o avistou sob um ângulo de 60°; a outra estava a 5,5 km da posição vertical do balão, alinhada com a primeira, e no mesmo sentido, conforme se vê na figura, e o avistou sob um ângulo de 30°.

Qual a altura aproximada em que se encontrava o balão?

(A) 1,8 km
(B) 1,9 km
(C) 3,1 km
(D) 3,7 km
(E) 5,5 km

Figura 59: Questão 160, gabarito "C".
Fonte: ENEM (2010).

Sendo h a altura em que se encontrava o balão, temos:

$$\operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3} = \frac{h}{1{,}8} \Leftrightarrow h \cong 3{,}11$$

Figura 60: Resolução da Questão 160.
Fonte: O autor (2015).

Em respostas aos questionamentos iniciais dessa análise, tem-se:

AMM1: *TÉCNICO.*

AMM2: *T_{4LDEF9} (T_{3LDEM1}): Escolher a relação trigonométrica adequada para um cálculo dado; $T_{2.3LDEM1}$: Calcular o comprimento do lado oposto a um ângulo agudo;*

AMM3: *Os tipos de Tarefas associados à **questão 160** estão previstos apenas nos Livros Didáticos, tanto no volume 9 para o Ensino Fundamental como no volume 1 para o Ensino Médio.*

Nessas condições, podem-se elencar os sinais:

- S_{MAvEM}-10: Muitas informações são desnecessária para construção da tarefa em tela e isso pode atrapalhar o estudante dado o caráter extenso da prova.
- S_{MAvEM}-11: O ostensivo gráfico (a figura), pouco contribuiu para a evocação dos não ostensivos associados, visto que o detalhamento (ostensivos discursivos) da questão permite o esboço para que as noções em jogo sejam mobilizadas.
- S_{MAvEM}-12: Essa tarefa não requisita a formação do Ensino Médio para ser respondida, reduzindo o caráter do exame ao nível do Ensino Fundamental. Com isso, verifica-se mais um ponto de incompatibilidade, entre as expectativas institucionais esperadas para os estudantes do Ensino Médio e as expectativas institucionais existentes nas macroavaliações nacionais do Brasil.

5.1.3.3 – ENEM 2011: Função Trigonométrica

Com 2,2% de representação a questão de número 158 foi a única para examinar o desempenho e os conhecimentos prévios disponíveis dos estudantes do Ensino Médio sobre as noções de Funções Trigonométricas. Considerando-se as expectativas institucionais esperadas pela **Matriz de Referências de Matemática e suas Tecnologias (MRMT)** para os estudantes dessa etapa escolar, tem-se que:

> **Questão 158 – MRMT**: Levando-se em consideração as competências supostas adquiridas no Ensino Médio, é esperado dos estudantes que os mesmos sejam capazes de atender a "*Competência de área 4 - Construir noções de variação de grandezas para a compreensão da realidade e a solução de problemas do cotidiano".* (BRASIL, 2009).

Constam nesse documento, as seguintes habilidades (H) associadas às competências dessa área:

Quadro 60

Habilidades 15 a 18.

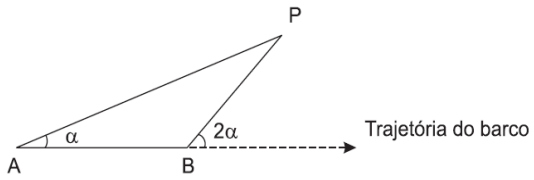
H15 - Identificar a relação de dependência entre grandezas.
H16 - Resolver situação-problema envolvendo a variação de grandezas, direta ou inversamente proporcionais.
H17 - Analisar informações envolvendo a variação de grandezas como recurso para a construção de argumentação.
H18 - Avaliar propostas de intervenção na realidade envolvendo variação de grandezas.

Fonte: BRASIL (2009).

A identificação dessas habilidades com a questão 158 pinçadas da **MRMT** foi verificada quando comparou-se as representações de grandezas por meio dos ostensivos de representações discursivas, escritas e gráficas (a figura) para resolver as variações de grandezas que necessitavam evocar não ostensivos associados as noções de tangente de um ângulo agudo de um triângulo retângulo e sistemas lineares ou, simplesmente, a noção de cosseno de um ângulo agudo de um triângulo retângulo, posteriormente os não ostensivos relativos às propriedades de semelhança de triângulos. Consequentemente, essas observações permitiram classificar o NFC da questão, bem como o esperado do estudante que, por outro lado, serviu como justificativa para demonstrar que há necessidade de alguns discursos tecnológicos, que não são articulados nos documentos oficiais anteriormente analisados, principalmente, os Livros Didáticos destacados.

TAREFA:

Para determinar a distância de um barco até a praia, um navegante utilizou o seguinte procedimento: a partir de um ponto A, mediu o ângulo visual α fazendo mira em um ponto fixo P da praia. Mantendo o barco no mesmo sentido, ele seguiu até um ponto B de modo que fosse possível ver o mesmo ponto P da praia, no entanto sob um ângulo visual 2α. A figura ilustra essa situação:



Suponha que o navegante tenha medido o ângulo $\alpha = 30°$ e, ao chegar ao ponto B, verificou que o barco havia percorrido a distância AB = 2 000 m. Com base nesses dados e mantendo a mesma trajetória, a menor distância do barco até o ponto fixo P será

A) 1 000 m.
B) $1\,000\sqrt{3}$ m.
C) $2\,000\frac{\sqrt{3}}{3}$ m.
D) 2 000 m.
E) $2\,000\sqrt{3}$ m.

Figura 61: Questão 158, gabarito "B".
Fonte: ENEM (2011).

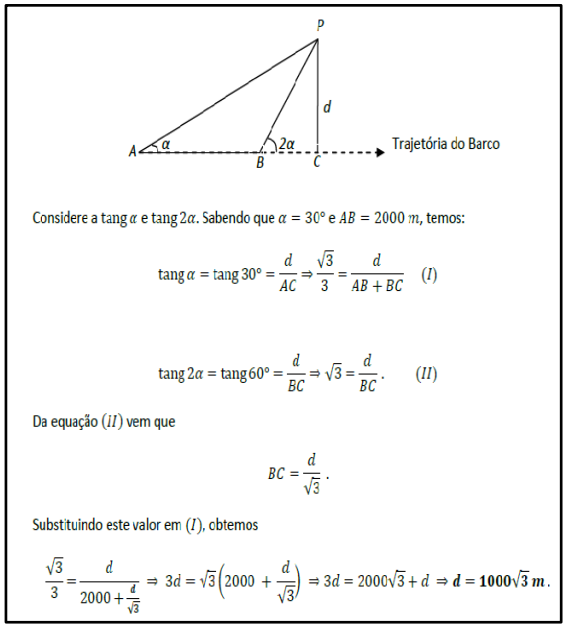


Figura 62: Resolução (R_1) da Questão 158.
Fonte: O autor (2015).

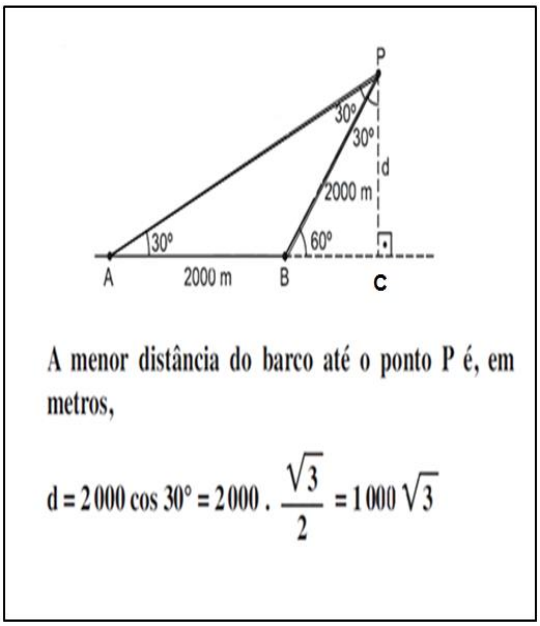


Figura 63: Resolução (R_2) da Questão 158.
Fonte: O autor (2015).

Em respostas aos questionamentos iniciais dessa análise, tem-se:

AMM1: *MOBILIZÁVEL.*

AMM2: *T_{4LDEF9} (T_{3LDEM1}): Escolher a relação trigonométrica adequada para um cálculo dado; $T_{2.2LDEM1}$: Calcular o comprimento do lado adjacente a um ângulo agudo ; $T_{2.3LDEM1}$: Calcular o comprimento do lado oposto a um ângulo agudo;*

AMM3: *Os tipos de Tarefas associados à **questão 158** não estão previstos, em sua totalidade, nos volumes 1 e 2 dos Livros Didáticos para o Ensino Médio.*

Nessas condições, pode-se elencar os sinais:

- S_{MAvEM}-13: Os ostensivos discursivos, escriturais e gráficos (a figura), permite o estudante perceber a evocação de noções trigonométricas, principalmente, identificando que a menor distância *d* está na perpendicular a reta $\overline{AB}$ e, ao mesmo tempo, será o cateto oposto ao ângulo α = 30°. Para tanto, os não ostensivos que deverão ser evocados em $\mathbf{R_1}$ representará duas técnicas não prevista nos Livros Didáticos examinados: $\tau_{1R1\text{-}\ Q158}$: *aplicar a propriedade geométrica que defini a menor distância entre dois pontos em um reta perpendicular a uma outra reta que os contém* (domínio da geometria); $\tau_{2R1\text{-}\ Q158}$: *aplicar a resolução de sistemas lineares* (domínio da álgebra). Por outro lado, em $\mathbf{R_2}$ devem ser evocados os não ostensivos: $\tau_{1R2\text{-}\ Q158} = \tau_{1R1\text{-}\ Q158}$ e $\tau_{2R2\text{-}\ Q158}$: *aplicar a definição de triângulo retângulo em C e concluir que o* Δ ABP é isósceles, logo: $\hat{A} = \hat{P}$ = 30° e $\overline{AB} = \overline{BP}$= 2000m. Tanto em $\mathbf{R_1}$ como em $\mathbf{R_2}$, esses não ostensivos permitiram a manipulação dos ostensivos, noções de tangente juntamente com as noções de sistemas lineares como também as noções de cosseno, respectivamente.
- S_{MAvEM}-14: A tarefa dessa questão 158 fica comprometida pela ausência da manipulação, em problemas do tipo, dos ostensivos estabelecidos pelas técnicas $\tau_{1R1\text{-}\ Q158}$, $\tau_{2R1\text{-}\ Q158}$ e $\tau_{2R2\text{-}\ Q158}$ que, por sua vez, se estabelecem em diferentes domínios matemáticos.

5.1.3.4 – ENEM 2012: Função Trigonométrica

Conforme os dados do Quadro 53 (Cf. p. 284), o percentual de 0% revela que não foi encontrado questões relacionadas às noções de Funções Trigonométricas entre as questões da prova de Matemática do referido exame.

5.1.3.5 – ENEM 2013: Função Trigonométrica

Com 2,2% de representação à questão de número 156 foi a única para examinar o desempenho e os conhecimentos prévios disponíveis dos estudantes do Ensino Médio, sobre as noções de Funções Trigonométricas. Considerando-se as expectativas institucionais esperadas pela **Matriz de Referências de Matemática e suas Tecnologias (MRMT)**, para os estudantes dessa etapa escolar, tem-se que:

> **Questão 156 – MRMT**: Levando-se em consideração às competências supostas adquiridas no Ensino Médio, é esperado dos estudantes que os mesmos sejam capazes de atender a "*Competência de área 4 - Construir noções de variação de grandezas para a compreensão da realidade e a solução de problemas do cotidiano".* (BRASIL, 2009).

Constam nesse documento, as seguintes habilidades (H) associadas às competências dessa área:

Quadro 61

Habilidades 15 a 18.

H15 - Identificar a relação de dependência entre grandezas.
H16 - Resolver situação-problema envolvendo a variação de grandezas, direta ou inversamente proporcionais.
H17 - Analisar informações envolvendo a variação de grandezas como recurso para a construção de argumentação.
H18 - Avaliar propostas de intervenção na realidade envolvendo variação de grandezas.

Fonte: BRASIL (2009).

Nessa última análise, observou-se que as habilidades elencadas acima buscaram relacionar a questão 156 à **MRMT**, quando os ostensivos de representações discursivas, escritas e gráficas (a figura) vinculam-se a relação de

dependências entre grandezas de comprimento e de área, por meio do cálculo da tangente do ângulo de 15° para determinação desse comprimento, que auxilia na resolução de um problema do cotidiano. Verificou-se que os não ostensivos associados são supostamente evocados, recorrendo-se as noções de tangente de um ângulo agudo de um triângulo retângulo e ao cálculo de área do quadrado. Nesses termos, os ostensivos identificados justificam o NFC da tarefa proposta para avaliar, o desempenho e conhecimento prévio disponível dos estudantes do Ensino Médio, para a entrada nas universidades públicas federais que, sob as lentes da presente investigação, reflete o mesmo nível, visto que os não ostensivos, que precisam ser evocados residem nas bases matemáticas do Ensino Fundamental.

TAREFA:

As torres Puerta de Europa são duas torres inclinadas uma contra a outra, construídas numa avenida de Madri, na Espanha. A inclinação das torres é de 15° com a vertical e elas têm, cada uma, uma altura de 114 m (a altura é indicada na figura como o segmento AB). Estas torres são um bom exemplo de um prisma oblíquo de base quadrada e uma delas pode ser observada na imagem.

Disponível em: www.flickr.com. Acesso em: 27 mar. 2012.

Utilizando 0,26 como valor aproximado para a tangente de 15° e duas casas decimais nas operações, descobre-se que a área da base desse prédio ocupa na avenida um espaço

A) menor que 100 m².
B) entre 100 m² e 300 m².
C) entre 300 m² e 500 m².
D) entre 500 m² e 700 m².
E) maior que 700 m².

Figura 64: Questão 156, gabarito "E".
Fonte: ENEM (2012).

Admitindo-se que o ponto B seja um dos vértices do quadrado (BCDE) da base, no triângulo ABC, retângulo em B, temos:

$$\text{tg } 15° = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{BC}}{144} \simeq 0{,}26 \Leftrightarrow \overline{BC} \simeq 29{,}64$$

Assim, a área S do quadrado BCDE, em metros quadrados, é tal que $S = \overline{BC}^2 = (29{,}64)^2 = 878{,}53$.

Figura 65: Resolução da Questão 156**.**
Fonte: O autor (2015).

Em respostas aos questionamentos iniciais dessa análise, tem-se:

AMM1: *TÉCNICO.*

AMM2: *$T_{3.3LDEF9}$: Calcular o comprimento do lado oposto a um ângulo agudo ; $T_{2.3LDEM1}$: Calcular o comprimento do lado oposto a um ângulo agudo;*

AMM3: *Os tipos de Tarefas associados à **questão 158** estão previstos, tanto no volume 9 do Livro Didático para o Ensino Fundamental, como no volume 1 do Livro Didático para o Ensino Médio.*

Nessas condições, pode-se elencar os sinais:

- S_{MAvEM}-15: O apelo aos ostensivos discursivos, escriturais e gráficos (a figura), muito pouco contribuiu para evocação dos não ostensivos associados, visto que já é dito que se utilize da aplicação da definição de tangente de um ângulo agudo de um triângulo retângulo, bem como que seja calculada a área de um quadrado.
- S_{MAvEM}-16: Considerando as técnicas associadas aos tipos de Tarefas $T_{3.3LDEF9}$ e $T_{2.3LDEM1}$, verificou-se que não se faz necessário cursar o Ensino Médio para resolver essa questão, evocando-se, dessa forma os discursos tecnológicos pertencentes ao domínio da geometria encontrados no volume 9 do Livro Didático do Ensino Fundamental.

Concluída essa empreitada, distribuiu-se no quadro abaixo, o conjunto dos sinais reconhecidos na análise desenvolvida em algumas versões das Macroavaliações brasileira (ENEM) para o Ensino Médio.

Quadro 62

Mapeamento de Sinais encontrados nas Macroavaliações (ENEM) para o Ensino Médio no Brasil.

Referência	**Mapeamento de Sinais nas Macroavaliações para o Ensino Médio** (MS_{MAvEM})
S_{MAvEM}-01	Supõe-se que, talvez, outras noções matemáticas foram privilegiadas em detrimento das noções das Funções Trigonométricas, residindo nessa possibilidade, uma contradição quando se leva em consideração as orientações nos PCNEM, PCN+, OCEM e, também na coleção de Livros Didáticos analisados para o Ensino Médio, visto que essas noções ocupam a mesma quantidade de unidades didáticas no volume 2 (U1: cap. 1, 2, 3 e 4) e a metade da quantidade da unidade no volume 1 (U4: cap. 8), conforme indicado no Quadro 42 (Cf. p. 225).
S_{MAvEM}-02	Os dados informados no problema são facilmente identificados por conta dos ostensivos discursivos, escriturais e gráficos (a figura), permitindo-se, dessa forma, perceber a incógnita que se deseja descobrir (a medida do cateto oposto ao ângulo de 30º no Δ ADE). Por sua vez, evoca-se os não ostensivos, representados pelas técnicas τ_{6}LDEF9 ou τ_{3}LDEM1, verificadas nos tipos de Tarefas relacionados para resolver a questão proposta. A técnica utilizada para a finalização do problema – razão entre duas medidas de superfície – está imersa nos diferentes tipos de problemas

	relacionados a geometria e, também, a *função* de uma maneira geral.
S_{MAvEM}-03	Observou-se a necessidade de evocar, respectivamente, os seguintes conhecimentos prévios: noção de ângulo, divisão de ângulos, noção de fração, noção de triângulo retângulo, noção da razão trigonométrica tangente → para manipular a definição de tangente de um ângulo agudo no ∆ ADE; noção de área do triângulo, divisão proporcional, noção de porcentagem → para manipular o cálculo da área solicitada e transformar o resultado de acordo com as alternativas dadas. Caso, essa lista de conhecimentos prévios não estiver disponível, provavelmente, o estudante não resolverá a questão.
S_{MAvEM}-04	Cabe ainda destacar que o contexto pensado para essa questão estimula a evocação das noções de trigonometria e mostra quanto se faz necessário articular outros conhecimentos para modelar o raciocínio matemático (geométrico-algébrico) e dar cabo da resposta.
S_{MAvEM}-05	Talvez, a maior dificuldade encontrada pelo estudante para finalizar essa tarefa resida no tempo gasto com os cálculos aritméticos, a exemplo da divisão das duas áreas, pois existe a pressão psicológica quando se leva em consideração a quantidade total de questões e, ainda mais, a condição de não utilização do uso da calculadora.
S_{MAvEM}-06	Observou-se que as orientações descritas na tarefa pode ser desenvolvida naturalmente pelo estudante que, inclusive pode, também, valer-se dos ostensivos gráficos (figura) e escriturais (as alternativas de resposta da questão), para evocar os não ostensivos mais adequados ao desenvolvimento da mesma. Nesse sentido, a técnica τ_{4}LDEM *(aplicar a propriedade de seno, cosseno ou tangente de um número real)* representa a única alternativa que pode auxiliar a resolução que foi acionada apenas uma vez pela questão 3b do capítulo 3 do Livro Didático analisado, conforme Quadro 54.
S_{MAvEM}-07	Verificou-se que evocar o não ostensivo protegido pela tecnologia θ_{3}LDEM2 *(Definição de seno, cosseno e tangente de um número real)*, especificamente, o cosseno, não seria suficiente para resolver a tarefa, pois além dele, faz-se necessário ter disponível a seguinte hierarquia de conhecimentos prévios (CP_{Q174})
S_{MAvEM}-08	Constatou-se o quanto é insuficiente o elenco de técnicas disponibilizadas pelos Livros Didáticos para a resolução de tarefas desse tipo quando se considera as técnicas $\tau_{1\text{-}Q174}$, $\tau_{2\text{-}Q174}$ e $\tau_{3\text{-}Q174}$;
S_{MAvEM}-09	Averiguou-se a incompatibilidade institucional entre o suposto conhecimento esperado para o estudante e o conhecimento efetivamente existente nas macroavaliações brasileiras.
S_{MAvEM}-10	Muitas informações são desnecessária para construção da tarefa em tela e isso pode atrapalhar o estudante dado o caráter extenso da prova.
S_{MAvEM}-11	O ostensivo gráfico (a figura), pouco contribuiu para a evocação dos não ostensivos associados, visto que o detalhamento (ostensivos discursivos) da questão permite o esboço para que as noções em jogo sejam mobilizadas.
S_{MAvEM}-12	Essa tarefa não requisita a formação do Ensino Médio para ser respondida, reduzindo o caráter do exame ao nível do Ensino Fundamental. Com isso, verifica-se mais um ponto de incompatibilidade entre as expectativas institucionais esperadas para os estudantes do Ensino Médio e as expectativas institucionais

	existentes nas macroavaliações nacionais do Brasil.
S_{MAvEM}-13	Os ostensivos discursivos, escriturais e gráficos (a figura), permite o estudante perceber a evocação de noções trigonométricas, principalmente, identificando que a menor distância *d* está na perpendicular a reta $\overline{AB}$ e, ao mesmo tempo, será o cateto oposto ao ângulo α = 30°. Para tanto, os não ostensivos que deverão ser evocados em **R_1** representará duas técnicas não prevista nos Livros Didáticos examinados: $\tau_{1R1-\ Q158}$: *aplicar a propriedade geométrica que defini a menor distância entre dois pontos em um reta perpendicular a uma outra reta que os contém* (domínio da geometria); $\tau_{2R1-\ Q158}$: *aplicar a resolução de sistemas lineares* (domínio da álgebra). Por outro lado, em **R_2** devem ser evocados os não ostensivos: $\tau_{1R2-\ Q158} = \tau_{1R1-\ Q158}$ e $\tau_{2R2-\ Q158}$: *aplicar a definição de triângulo retângulo em C e concluir que o* Δ ABP é isósceles, logo: $\hat{A} = \hat{P}$ = 30° e $\overline{AB} = \overline{BP}$= 2000m. Tanto em **$R_1$** como em **$R_2$**, esses não ostensivos permitiram a manipulação dos ostensivos noções de tangente juntamente com as noções de sistemas lineares como também as noções de cosseno, respectivamente.
S_{MAvEM}-14	A tarefa dessa questão 158 fica comprometida pela ausência da manipulação, em problemas do tipo, dos ostensivos estabelecidos pelas técnicas $\tau_{1R1-\ Q158}$, $\tau_{2R1-\ Q158}$ e $\tau_{2R2-\ Q158}$ que, por sua vez, se estabelecem em diferentes domínios matemáticos.
S_{MAvEM}-15	O apelo aos ostensivos discursivos, escriturais e gráficos (a figura), muito pouco contribuiu para evocação dos não ostensivos associados, visto que já é dito que se utilize da aplicação da definição de tangente de um ângulo agudo de um triângulo retângulo, bem como que seja calculada a área de um quadrado.
S_{MAvEM}-16	Considerando as técnicas associadas aos tipos de Tarefas $T_{3.3LDEF9}$ e $T_{2.3LDEM1}$, verificou-se que não se faz necessário cursar o Ensino Médio para resolver essa questão, evocando-se, dessa forma os discursos tecnológicos pertencentes ao domínio da geometria encontrados no volume 9 do Livro Didático do Ensino Fundamental.

Fonte: O autor (2015).

Ao final desse levantamento, de sinais de tarefas, relacionadas às noções de Funções Trigonométricas encontradas nas macroavaliações institucionais analisadas, preparadas, especificamente, pelos órgãos governamentais do Brasil, observou-se que foi mais privilegiada situações contextualizadas, considerando-se os cotidianos mais próximos possíveis das noções matemáticas em jogo, tais como: divisão de terras, distâncias inacessíveis e medições de áreas; com exceção, especificamente, da questão 174 que priorizou o diálogo intramatemático quando procurou articular noções de translação e ortogonalidade às noções de cosseno de um número real.

Em relação ao NFC das tarefas pinçadas dos ENEMs, verificou-se que 60%, não ultrapassam o nível técnico evocando não ostensivos nucleares das

noções de trigonometria do triângulo retângulo, tal como a tangente de um ângulo agudo, conforme os sinais S_{MAvEM}-03, S_{MAvEM}-12 e S_{MAvEM}-15.

Desse modo e, considerando o Livro Didático aprovado pelo PNLD, para o Ensino Fundamental, observou-se que, apesar dos investimentos didáticos para construir a apresentação das Funções Trigonométricas no Ensino Médio, menos de 40% é aproveitado para avaliar o desempenho e conhecimento prévio disponível dos estudantes dessa etapa escolar, pois quando isso acontece, caso das tarefas desveladas pelas questões 174 (ENEM-2009) e 158 (ENEM-2011), existe a possibilidade do resultado ser infrutífero dado à necessidade de utilização de um discurso tecnológico, via aplicação das técnicas $\tau_{1\text{- Q174}}$, $\tau_{2\text{- Q174}}$ e $\tau_{3\text{- Q174}}$ (ENEM-2009) e $\tau_{1R1\text{- Q158}}$, $\tau_{2R1\text{- Q158}}$ e $\tau_{2R2\text{- Q158}}$ (ENEM-2011) que ativaram o nível mobilizável, segundo Robert (1997,1998).

A análise das provas desses ENEMs, possibilitou inferir que as possíveis dificuldades dos estudantes, para resolver tarefas que envolvam conhecimentos do Campo Trigonométrico pode está associado à articulação das situações contextualizadas, a interpretação do discurso por meio da língua materna, ao tempo disponibilizado para ler, interpretar, evocar não ostensivos e manipular ostensivos associados e, principalmente, pela ausência do discurso tecnológico associado as noções em jogo.

Elencadas, essas constatações conduziram à conclusão que tais macroavaliações, não refletem as expectativas esperadas para o Ensino Médio e, dessa forma, autentica, mesmo sem a validação desse conhecimento, o ingresso dos estudantes para o Ensino Superior. Com isso, o ENEM não funciona como um filtro de estudantes, em função das expectativas institucionais, estabelecidas pelos programas oficiais de ensino e Livros Didáticos, nem como uma ferramenta de controle de qualidade desses mesmos agentes institucionais.

Cumprindo-se essa fase da investigação, deu-se continuidade analisando-se o segundo lado da transição EM-ES, onde foram reunidos para esse fim, a mesma sequência documental utilizada até o momento.

5.2 – Ensino Superior

5.2.1 – Análise dos Documentos Oficiais (Planos de Ensino de Cálculo[61])

No Brasil, o contato inicial com o Ensino Superior está submetido à aprovação em um processo seletivo obrigatório, denominado vestibular para os concludentes do Ensino Médio ou seleção, no caso de adesão, de algumas universidades brasileiras, por meio do ENEM, conforme análise desenvolvida no item anterior.

Nos cursos relacionados às ciências exatas como, Matemática e Engenharias, a entrada para a universidade, em geral, marcada pelo contato inicial, inclusive, com a disciplina que fundamenta às noções de cálculo diferencial e integral que, nesse caso, refere-se à disciplina Cálculo I. Nesse sentido, o objetivo primeiro foi analisar os planos oficiais de ensino dessa disciplina em um Curso de Licenciatura em Matemática de uma universidade pública brasileira. Para tanto, foram consideradas as seguintes questões: Quais os tipos de Tarefas podem ser consideradas para abordar as noções de Funções Trigonométricas? Caso existam, as técnicas utilizadas no EM são evocadas, para a resolução de problemas com essas mesmas noções? O discurso tecnológico em torno das noções de Funções Trigonométricas foi ampliado?

Objetivando encontrar respostas, escolheu-se a Universidade de São Paulo – USP pela representação e reconhecimento internacional entre as universidades do Brasil, bem como por estar localizada na cidade onde a presente pesquisa foi desenvolvida, priorizando-se, para tal intento, o curso de Licenciatura em Matemática.

A investigação foi desenvolvida, inicialmente, por meio da grade curricular onde é possível confirmar a posição da disciplina em tela, nas modalidades oferecidas pela instituição (diurna e noturna). Nessa ocasião, verificou-se a opção dessa universidade para denominar oficialmente a disciplina como *"Cálculo para funções de uma variável real I"*, conforme o quadro abaixo:

[61] Os **sinais** dos programas serão representados por $S_{pESuB.}$

Quadro 63

Excerto da grade curricular do curso de Licenciatura em Matemática (IME[62]) da USP.

LICENCIATURA EM MATEMÁTICA DIURNO		LICENCIATURA EM MATEMÁTICA NOTURNO	
Código 45024-1		Código 45024-4	
1° semestre		1° semestre	
MAT0105	Geometria Analítica (4)	MAT0105	Geometria Analítica (4)
MAT1351	Cálculo p/funções de 1variável real I (6)	MAT1351	Cálculo p/funções de 1variável real I (6)
MAE1511	Estatistica para Licenciatura I (4)	MAT1513	Laboratório de Matemática (4)
MAT1513	Laboratório de Matemática (4)	4300160	Ótica (2)
4300160	Ótica (2)		

Fonte: USP (2014).

Esse achado impulsionou ao levantamento de dados supostamente disponíveis no plano de ensino da disciplina.

Quadro 64

Excerto do plano de ensino da disciplina Cálculo para funções de uma variável real I.

MAT1351 CÁLCULO PARA FUNÇÕES DE UMA VARIÁVEL REAL I
OBJETIVOS: Estudo da variação de uma grandeza em relação à variação de outra grandeza: a idéia de função. O conceito de taxa de variação média e instantânea: a derivada de uma funções. Técnicas do Cálculo; estudo das aplicações clássicas do Teorema do Valor Médio. Desenvolver atividades de Prática como Componente Curricular.
CONTEÚDO: Equações e inequações; definição de função e gráficos; funções polinomiais de primeiro e segundo graus; funções modulares; funções inversíveis; funções exponenciais e logarítmicas; funções trigonométricas e suas inversas.Taxa de variação, velocidade, coeficiente angular da reta tangente; o conceito de derivada em um ponto; a função derivada; aproximações e linearidade local; conceitos intuitivo e definições de limite, de continuidade e de diferenciabilidade; regras de derivação. O Teorema do Valor Médio e suas aplicações. O comportamento de uma função: um estudo qualitativo; o gráfico de uma funções, comportamento no infinito, regras de L'Hospital. Problemas de otimização. Aproximação de funções: fórmula de Taylor com resto de Lagrange.
CARGA HORÁRIA SEMANAL E NÚMERO DE CRÉDITOS: 6 horas-aula, 6 créditos-aula; 2 horas-trabalho, 1 crédito-trabalho.
BIBLIOGRAFIA BÁSICA: D. Hughes-Hallett et alii, Cálculo, volume I, Editora Edgard Blücher Ltda, São Paulo, 1999; G.F. Simmons, Cálculo com Geometria Analítica, volume 1, MacGraw-Hill, São Paulo, 1987; L. Leithold, O Cálculo com Geometria Analítica, volume 1, Harbra, São Paulo, 1977; J. Stewart. Cálculo, volume I, Editora Pioneira - Thomson Learning, São Paulo, 2001. P. Boulos, Introdução ao Cálculo, volume I.

Fonte: USP (2014).

[62] IME – Instituto de Matemática e Estatística.

O rastreio nas disciplinas arroladas no Quadro 63 (Cf. p. 316), confirmou as suspeitas, pelas experiências acadêmicas anteriores, que reside na disciplina *Cálculo para funções de uma variável real I* (*MAT1351*), o *tema* "Funções Trigonométricas e suas inversas", embora não tenha sido verificado a existência de tipos de Tarefas associados ao mesmo.

Observou-se, dessa forma, que não existe uma ferramenta nesse nível documental que permita compreender as praxeologias existentes, que se encarreguem do desenvolvimento da Organização Matemática das noções em jogo.

Conclui-se, levando em consideração a disposição dos conteúdos no Quadro 64 (Cf. p. 316), como sinal S_{pESuB}-01: as noções de Funções Trigonométricas desenvolvidas no *Cálculo para funções de uma variável real I* (*MAT1351*) do Ensino Superior brasileiro, servem de conhecimento prévio para o estudo das noções de derivada em um ponto, função derivada, entre outros, bem como para a compreensão intuitiva e definições de limite, de continuidade e de diferenciabilidade, principalmente.

5.2.2 – Análise dos Livros Didáticos de Cálculo[63].

Para analisar as praxeologia existentes e direcionadas ao *tema* "Funções Trigonométricas e suas inversas" nos Livros Didáticos do Ensino Superior, priorizou-se uma obra indicada na bibliografia básica do plano de ensino do Quadro 49 (Cf. p. 267), cuja cópia também circula livremente na internet. Essa obra apresenta as seguintes características, a saber:

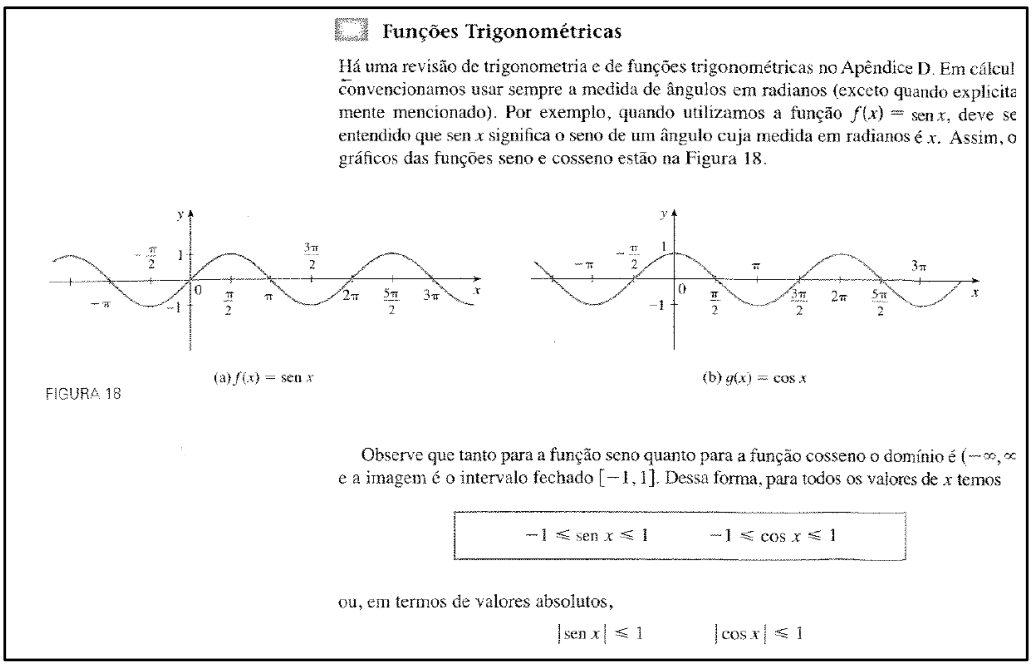
Título: *"Cálculo, volume 1"*
Autores: James STEWART
Editora: THOMSON LEARNING
Ano de publicação: *2011*

Essa obra está organizada sob a apresentação de oito capítulos, a saber: **cap. 1** – *Funções e Modelos*; **cap. 2** – *Limites e Derivadas*; **cap. 3** – *Regras de Diferenciação*; **cap. 4** – *Aplicação da Diferenciação*; **cap. 5** – I*ntegrais*; **cap. 6** – *Aplicações de Integração*; **cap. 7** – *Técnicas de Integração*; **cap. 8** – *Mais Aplicações de Integração*. Dentre eles, verificou-se, por meio dos seus subtópicos, a

[63] Os **sinais** dos programas serão representados por S_{LDESuB}.

necessidade de evocação de não ostensivos relacionados às noções de Funções Trigonométricas, tais como: **cap. 1**: (1.2 – Modelos Matemáticos: uma Relação de Funções Essenciais); **cap. 3**: (3.4 – Derivadas de Funções Trigonométricas); **cap. 7**: (7.2 – Integrais Trigonométricas e 7.3 – Substituição Trigonométrica). Dessa forma, observou-se que, nesses dois últimos capítulos, os estudantes precisam ter disponíveis as noções de Funções Trigonométricas, para servir como conhecimento prévio consolidado aos problemas de derivação e integração.

Talvez e, dada a tal necessidade, foi oferecido aos leitores desse livro uma releitura mais formal, das funções essenciais, estando, dentre elas, as Funções Trigonométricas, conforme figura abaixo:



Funções Trigonométricas

Há uma revisão de trigonometria e de funções trigonométricas no Apêndice D. Em cálcul convencionamos usar sempre a medida de ângulos em radianos (exceto quando explicita mente mencionado). Por exemplo, quando utilizamos a função $f(x) = \operatorname{sen} x$, deve se entendido que sen x significa o seno de um ângulo cuja medida em radianos é x. Assim, o gráficos das funções seno e cosseno estão na Figura 18.

(a) $f(x) = \operatorname{sen} x$ (b) $g(x) = \cos x$

FIGURA 18

Observe que tanto para a função seno quanto para a função cosseno o domínio é $(-\infty, \infty$ e a imagem é o intervalo fechado $[-1, 1]$. Dessa forma, para todos os valores de x temos

$$-1 \leqslant \operatorname{sen} x \leqslant 1 \qquad -1 \leqslant \cos x \leqslant 1$$

ou, em termos de valores absolutos,

$$|\operatorname{sen} x| \leqslant 1 \qquad |\cos x| \leqslant 1$$

Figura 66: Funções Trigonométricas como uma das funções essenciais para o Cálculo. Fonte: Stewart (2011, p. 33).

O recuo aos ostensivos gráficos, às funções seno e cosseno, auxiliam os estudantes aos modelos matemáticos que melhor compreendem fenômenos periódicos, cuja principal propriedade, a repetição, foi modelada e contextualizada, de acordo com a figura seguinte:

Uma propriedade importante das funções seno e cosseno é que elas são periódicas com um período 2π. Isso significa que, para todos os valores de x,

$$\operatorname{sen}(x + 2\pi) = \operatorname{sen} x \qquad \cos(x + 2\pi) = \cos x$$

A natureza periódica dessas funções torna-as adequadas à modelagem de fenômenos repetitivos, tais como marés, cordas vibrantes e ondas sonoras. Por exemplo, no Exemplo 4 da Seção 1.3 veremos que o modelo razoável para o número de horas com a luz solar na Filadélfia t dias após 1º de janeiro é dado pela função

$$L(t) = 12 + 2.8 \operatorname{sen}\left[\frac{2\pi}{365}(t - 80)\right]$$

Figura 67: Natureza periódica das Funções Trigonométricas.
Fonte: Stewart (2011, p. 34).

Além desses exemplos para mostrar o quanto se faz necessário ter disponível os conhecimentos prévios das noções de Funções Trigonométricas, verificou-se, também, ao longo da obra em tela, outras referências a essas funções, tais como: classificação dessas funções, como Funções Transcendentais; transformação dessas funções por meio de translação, esticamento ou reflexão, como, por exemplo:

A Figura 3 ilustra essas transformações de esticamento quando aplicadas à função cosseno com $c = 2$. Por exemplo, para obter o gráfico $y = 2\cos x$, multiplicamos as coordenadas y de cada ponto do gráfico de $y = \cos x$ por 2. Isso significa que o gráfico de $y = \cos x$ fica esticado verticalmente por um fator de 2.

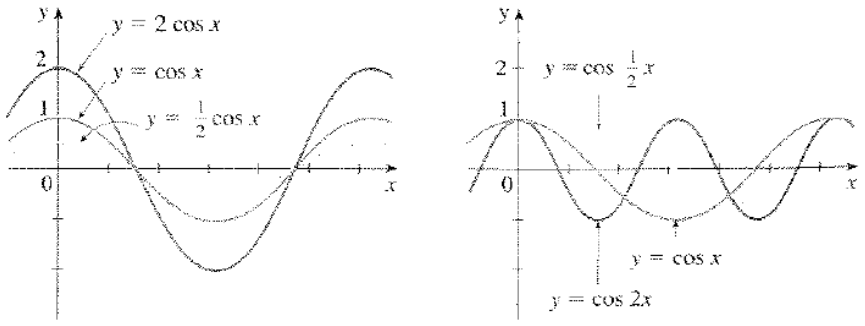


Figura 68: Transformação de Funções Trigonométricas por esticamento.
Fonte: Stewart (2011, p. 39).

Deformadas ou preservadas, as Funções Trigonométricas como Funções Transcendentais serão, futuramente, definidas como soma de séries infinitas, descritas inicialmente por Isaac Newton, conforme foi mostrado no capítulo IV desta

pesquisa, ou seja: *"*$sen\ x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} \ldots \ e\ cos\ x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} \ldots$*"* (KENNEDY,1992, p. 27)

Essa sucessão de encadeamentos, demonstra a importância dos estudantes disporem dos conhecimentos prévios, nesse caso, relativo às Funções Trigonométricas para desenvolverem os conhecimentos do cálculo diferencial e integral e aplicarem em problemas de otimização nas áreas de Física, Engenharia, Biologia e Economia, conforme salienta Stewart (2011).

Mesmo desvelando todos esses achados, não foi observado tipos de Tarefas que permitiriam o desenvolvimento de uma análise praxeológica em torno das noções das Funções Trigonométricas (S_{LDESuB}-02). De todo modo, identificou-se um número pequeno de tipos de Tarefas que faziam referência às propriedades de transformação (translação, esticamento ou reflexão), articulada à definição de transcendência, cujos objetivos distanciam-se das noções matemáticas da presente inquirição.

5.2.3 – Análise das Macroavaliações de Matemática (Exames)[64]

No Brasil, a avaliação em larga escala utilizada para compreender o desempenho dos alunos dos cursos superiores, considerando os conteúdos programáticos previstos nas diretrizes curriculares e implementados pelos planos de ensino das várias disciplinas, dos respectivos cursos de graduação, denomina-se ENADE - Exame Nacional de Desempenho de Estudantes.

Esse exame é constituído de uma prova escrita, sendo obrigatório para os estudantes concludentes selecionados e, ao mesmo tempo, requisito indispensável para a emissão do histórico escolar de graduação.

Com o objetivo de compreender as possíveis praxeologias existentes e o Nível de Funcionamento do Conhecimento (NFC) proposto para investigar o desempenho dos estudantes sobre as noções de Funções Trigonométricas solicitados nas cinco últimas edições do ENADE (2013, 2012, 2011, 2010 e 2009) para os estudantes do curso de Licenciatura em Matemática, buscou-se seguir os mesmos questionamentos aplicados na análise do ENEM.

[64] Os **sinais** dos programas serão representados por S_{MAESuB}.

Nessas edições, encontrou-se apenas no ano de 2011 o exame para os cursos de Matemática, cuja distribuição de questões está descrita no quadro abaixo:

Quadro 65

Distribuição das Questões na Prova de Matemática do ENADE 2011.

<table>
<tr><th>Partes</th><th>Número das questões</th><th>Peso das questões</th><th>Peso dos componentes</th></tr>
<tr><td>Formação Geral/Objetivas</td><td>1 a 8</td><td>60%</td><td rowspan="2">25%</td></tr>
<tr><td>Formação Geral/Discursivas</td><td>Discursiva 1 e Discursiva 2</td><td>40%</td></tr>
<tr><td>Componente Específico Comum/Objetivas</td><td>9 a 25</td><td rowspan="4">Objetivas 85%

Discursivas 15%</td><td rowspan="4">75%</td></tr>
<tr><td>Componente Específico Comum/Discursivas</td><td>Discursiva 3 a Discursiva 5</td></tr>
<tr><td>Componente Específico – Licenciatura/Objetivas</td><td>26 a 35</td></tr>
<tr><td>Componente Específico – Bacharelado/Objetivas</td><td>36 a 45</td></tr>
<tr><td>Questionário de percepção da Prova</td><td>1 a 9</td><td>-</td><td>-</td></tr>
</table>

Fonte: O autor (2015).

Isto posto e, verificando-se as questões 26 a 35 destinadas aos conteúdos específicos ao curso de Licenciatura em Matemática, observou-se que não existem tarefas que mobilizem conhecimentos relativos as noções de Funções Trigonométricas.

Tal informação, mesmo entrevendo uma lacuna no que diz respeito ao desenvolvimento da análise pretendida, permitiu a descrição do sinal S_{MAESuB}-03, definindo como inexistentes, possíveis praxeologias e NFC para auxiliar na compreensão das relações pessoais esperadas, para o ensino e aprendizagem das noções das Funções Trigonométricas no Ensino Superior brasileiro.

Ao final das análises nos documentos disponíveis, na amostra selecionada para o Ensino Superior francês, reuniu-se no quadro seguinte, os sinais encontrados nos programa de ensino, apostila (manual) e macroavaliações que possibilitaram mapear e compreender como são tratadas as noções relativas às Funções Trigonométricas:

Quadro 66

Mapeamento de Sinais encontrados nos Documentos Oficiais de Ensino de Matemática (Ensino Superior) no Brasil.

Referência	**Mapeamento de Sinais nos Documentos Oficiais do Ensino Superior brasileiro a partir do IME (USP):** $MS_{DOESuB.}$
S_{pESuB}-01	Não foi encontrado praxeologias relativos as noções de Funções Trigonométricas. No entanto, verificou-se que tais noções desenvolvidas no *Cálculo para funções de uma variável real I* (*MAT1351*) do Ensino Superior brasileiro servem de conhecimento prévio para o estudo das noções de derivada em um ponto, função derivada, entre outros, bem como para a compreensão intuitiva e definições de limite, de continuidade e de diferenciabilidade, principalmente.
S_{LDESuB}-02	Não foi observado tipos de Tarefas que permitiriam o desenvolvimento de uma análise praxeológica em torno das noções das Funções Trigonométricas no Livro de Cálculo I analisado.
S_{MAESuB}-03	São inexistentes possíveis praxeologias e NFC nos ENADEs para auxiliar na compreensão das relações pessoais esperadas para o ensino e aprendizagem das noções das Funções Trigonométricas no Ensino Superior brasileiro.

Fonte: O autor (2015)..

Por fim, concluiu-se a análise institucional no Brasil que procurou compreender como se desenvolve a transição do ensino das Funções Trigonométricas EM-ES. Esse processo de transição foi concebido como vertical, cuja análise comparativa entre o Ensino Médio e Ensino Superior será descrita no item seguinte.

5.3 – Transição do Ensino das Funções Trigonométricas Ensino Secundário-Ensino Superior no Brasil.

Essa etapa da análise, foi denominada de vertical e, nesse sentido, fez-se necessário resgatar das redações anteriores algumas informações. Primeiramente, o esboço do esquema do trabalho desenvolvido:

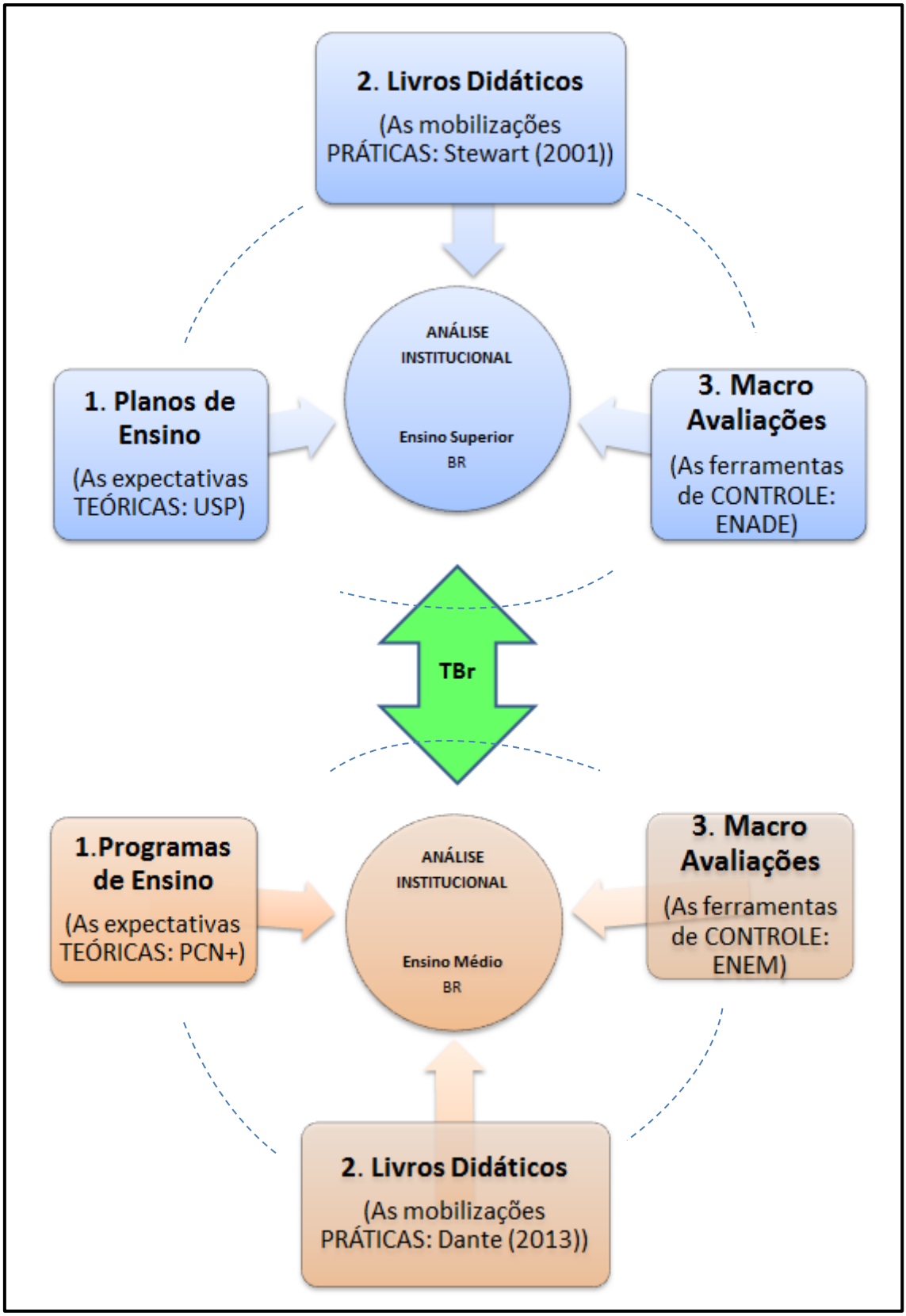


Figura 69: Esquema da Transição Vertical no Brasil (TBr)
Fonte: O autor (2015).

Além dessa figura, o próximo quadro mostrará quais documentos oficiais e níveis de ensino foram encontrados e analisados no Brasil:

Quadro 67

Levantamento dos Documentos Oficiais de Ensino de Matemática no sistema brasileiro de educação.

Documentos Oficiais	Educação Básica		Ensino SUPERIOR
	Ensino Fundamental II	Ensino Médio	
Programas de Ensino	P	P	P
Livros Didáticos	P	P	P
Macroavaliações	∄	P	P

Fonte: O autor (2015)..
Legenda: P = possível; ∄ = Não Existe.

Observou-se por meio do extrato desse levantamento que a comparação entre o Ensino Médio e Ensino Superior só foi permitida a partir dos Programas de Ensino e dos Livros Didáticos. Dessa forma, tal comparação foi desenvolvida através do cruzamento[65] dos dados obtidos no Quadro 41 (Cf. p. 223) e no Quadro 42 (Cf. p. 225), referentes aos programas de ensino brasileiro, indicando-se a prevalência da mudança entre os domínios matemáticos geometria e função para abordar as noções trigonométricas iniciais, seno e cosseno, quando eram articuladas as noções de ângulos e a noção de número real, respectivamente.

Apesar de não constituir uma das etapas da transição em tela, os Livros Didáticos do Ensino Fundamental II, da coleção examinada, mesmo sem o respaldo dos órgãos oficiais (S_{LDEF}-04), confirmam a ruptura epistemológica, evidenciada pelo sinal S_{LDEF9}-05, demonstrando a mudança entre os domínios da geometria e da função, sendo esse último abrigado pela teoria apresentada, apenas no Ensino Médio (EM). Por sua vez, evidências pinçadas dos Livros Didáticos do EM, sinais S_{LDEM1}-04 e S_{LDEM1}-05, especificamente, confirmam a prosseguimento da ruptura analisada, amalgamando lentamente essa lacuna para o Ensino Superior.

Esse contexto fica, ainda mais prejudicado, quando são considerados os sinais S_{MAvEM}-07, S_{MAvEM}-08, S_{MAvEM}-09, S_{MAvEM}-13 e S_{MAvEM}-14, cujas revelações ratificam o descompasso entre as políticas educacionais existentes, autenticando-se a falta de comunicação institucional, entre os órgãos governamentais que elaboram os Programas de Ensino, os autores e programas de Livros Didáticos, que publicam

[65] Vale ressaltar que, conforme definição de Chevallard e Grenier (1997), é a partir do cruzamento dos dados que se torna possível alcançar os objetivos de uma pesquisa documental.

os mesmos e, por último, as macroavaliações nacionais que formulam tarefas que se distanciam da realidade educacional dos estudantes.

Entretanto, mesmo com a prevalência desse desencontro, o sinal S_{pESuB}-01, insinua a importância dos conhecimentos prévios para o estudo das noções de Funções Trigonométricas quando os considera necessários para mobilizar conceitos de limite, de continuidade e de diferenciabilidade no Ensino Superior.

Não obstante, vale ressaltar que, conforme apresentado no capítulo I, as relações $\mathbf{R_{DM6}}$, $\mathbf{R_{DM7}}$, $\mathbf{R_{DM10}}$, $\mathbf{R_{DM15}}$ e $\mathbf{R_{DM17}}$, servem também de fundamentação para demonstrar que lacunas na transposição didática dos conteúdos que não superem as rupturas epistemológicas das Funções Trigonométricas, quando precisam articular os domínios da geometria e da função, favorecem e obstruem a compreensão de modelos matemáticos, segundo exemplo de Stewart (2011) mostrado na Figura 67 (Cf. p. 318).

Ao que tudo indica e, considerando-se os pressupostos de Artigue (2004), a ausência do diálogo entre os três segmentos analisados pode encontrar justificativa no amálgama dos diferentes níveis culturais (formal, informal e técnico), pois segundo essa pesquisadora esses segmentos são os representantes das fontes primordiais dos níveis da cultura Matemática, neles embutida.

Nesse sentido, Gueudet (2008a) observou que, mesmo considerando diferentes as abordagens matemáticas – conteúdo e forma – encontradas no EM ampliadas pelo ES, seria coerente que novos conhecimentos e novas flexibilidades fossem ponderadas pelas novas instituições de ES, após a transição do EM, pois se verificou, por meio das analogias entre o estudo desenvolvido pela autora sobre as noções de Álgebra Linear e as de Funções Trigonométricas analisadas nessa pesquisa, que prevalecem as dificuldades dos estudantes apresentadas no Quadro 21 (Cf. p. 88), primordialmente, aquelas que se frutificaram a partir das rupturas epistemológicas ainda não superadas pelas tentativas, de suas respectivas transposições didáticas, propostas nos documentos oficiais.

Ainda cabe destaque o caráter abstrato das noções das Funções Trigonométricas esperado pelo ES, requisitado pelas macroavaliações dos ENEMs

2009 (**Questão 174**) e 2011 (**Questão 158**), não viabilizados pelos Livros Didáticos, conforme os marcadores S_{MAvEM}-07, S_{MAvEM}-08, S_{MAvEM}-13 e S_{MAvEM}-14 sendo esse, um traço importante destacado por Gueudet (2008a) quando justificou a origem das rupturas epistemológicas pelas vias da abordagem axiomática que, quando apresentadas didaticamente, desconsideram as possibilidades de articulações naturais com a geometria.

Com efeito, observou-se que reside sobre a abordagem axiomática – interesse particular do ES – a sutileza de considerar novas formas de flexibilidade – didática e cognitiva – por exemplo, para minimizar os prejuízos acadêmicos na formação do futuro professor de Matemática, permitindo a esse, a aprendizagem dessa ferramenta matemática, fundamental para compreender e validar as conjecturas apanhadas da história e reapresentadas, nesse caso, das Funções Trigonométricas. Por essa obliquidade, Gueudet (2008a) defende que, não é demais revisitar a História da Matemática, buscando-se por meio das lentes epistemológicas, construir um novo esboço do desenvolvimento de uma dada noção, sobretudo, considerando os entraves percebidos, durante o processo de aprendizagem dos alunos que, nesse caso, foram identificados pelos marcadores *DAMFT* do capítulo I.

Na sequência dessa redação, será constituída, considerando o itinerário desenvolvido nesse capítulo sobre as noções de Funções Trigonométricas, uma análise institucional no campo da educação francesa, cujo traço demarcado pela cultura poderá contribuir para a identificação de peculiaridades, não existentes no território brasileiro.

CAPÍTULO VI

Análise Institucional na França: pela compreensão vertical da transição do Ensino das Funções Trigonométricas EM-ES.

Considerações Iniciais

O principal objetivo desse capítulo foi proceder a uma análise institucional das noções das Funções Trigonométricas via documentos oficiais da educação francesa. Tal intenção foi mobilizada pelas pesquisas desenvolvidas por Chevallard (1998) que demonstrou por meio da Teoria Antropológica do Didático (TAD) a possibilidade de modelar e organizar o conhecimento dessas noções, por exemplo, por meio de uma organização praxeológica ou praxeologia.

Sustentando-se nessa perspectiva científica, bem como no ponto de vista de Dias (1998), Artigue (2004) e Gueudet (2008a), que defendem e se utilizam dos documentos oficiais para aplicar os pressupostos teóricos da análise praxeológica, buscou-se reunir tais fontes – programas oficiais e os manuais (livros didáticos), para compreender as relações esperadas e, – as macroavaliações para a análise das relações pessoais existentes, cujo intuito é responder a questão de pesquisa Q1 no território francês.

Sendo assim, foram levantados os Programas de Ensino de Matemática no nível do *Collège* e do Lycée, que constituem as duas principais etapas do Ensino Secundário francês[66], Manuais de Matemática desses mesmos níveis de ensino e a Macroavaliação denominada BAC que será esclarecida, posteriormente. Para o Ensino Superior foram pinçados os Programas de Ensino da disciplina Matemáticas e Apostila didática (manual ou livro didático equivalente), apenas. Ambos originados do INSA – Instituto Nacional de Ciências Aplicadas da Universidade Claude Bernard Lyon I (UCBL I). Não foram localizados exames de macroavaliações, para o Ensino Superior francês.

[66] Na França, o Ensino Secundário está dividido em duas etapas denominadas, respectivamente, Collège e Lycée. No Brasil, essas mesmas etapas são equivalentes ao Ensino Fundamental II e ao Ensino Médio, respectivamente. Juntas compõem, parcialmente, o Ensino Básico brasileiro.

Isto posto, para evitar a perda de foco nessa etapa da investigação, serviu-se, ao longo do texto, dos seguintes questionamentos: Como estão estruturados os Programas de Ensino de Matemática na França? Como são introduzidas técnicas relativas ao ensino das Funções Trigonométricas nos manuais franceses? Como essas técnicas estão sendo usadas na resolução dos tipos de Tarefas dispostas nesses manuais? Quais tipos de Tarefas são privilegiados nas macrosavaliações francesas, para avaliarem, segundo Robert (1997, 1998), o Nível de Funcionamento do Conhecimento (NFC) dos estudantes acerca das noções das Funções Trigonométricas? Esses tipos de Tarefas estão previstos nos programas oficiais de ensino de matemática na França? Nessas avaliações, tanto os tipos de Tarefas, como as técnicas associadas foram desenvolvidas nos manuais do Lycée?

Dessa forma, entendeu-se essa análise como vertical, pois existe uma subida do Ensino Secundário para o Ensino Superior, considerando para ambos os lados à estrutura abaixo:

Ensino Secundário: Análise dos Documentos Oficiais (Programas de Ensino); Análise dos Livros Didáticos (Manuais); Análise das Macroavaliações (Bac).

Ensino Superior: Análise dos Documentos Oficiais (Planos de Ensino); Análise dos Livros Didáticos (Manuais); Análise das Macroavaliações (Exames).

E, finalmente, a **Transição do Ensino das Funções Trigonométricas Ensino Secundário-Ensino Superior**.

Ao longo do texto apresentaram-se vários quadros que, objetivaram dar parciais dos resultados dos subitens, dos níveis de ensino analisados. Concluiu-se o trabalho por meio do cruzamento dos dados verificados nos quadros, que destacam os sinais identificados como resultados das diversas análises.

6.1 – Ensino Secundário

6.1.1 – Análise dos Documentos Oficiais (Programas de Ensino de Matemática)

Essa análise foi alicerçada nos programas oficiais de ensino da França 2008, ainda em vigor, que se referem ao ensino das Funções Trigonométricas.

Durante o levantamento documental, foram encontrados nos Programas Oficiais de Ensino de Matemática, em cinco níveis escolares diferentes, *domínios* matemáticos, cujos *temas* estão relacionados diretamente com o ensino das Funções Trigonométricas. Por esse motivo, foram recolhidos para essa análise, a fim de compreender o formato da praxeologia existente em cada um deles, mesmo sendo o Collège[67], uma fase escolar não prevista inicialmente, para essa pesquisa.

6.1.1.1 – Programas de Ensino de Matemática (*Classe 4ème – Collège*)

Em termos de *domínios* matemáticos, esse documento está estruturado em quatro tipos:

1. Organização e gestão de dados, funções.
2. Números e cálculos.
3. Geometria.
4. Grandezas e medidas.

No *domínio* da geometria, no *setor* "figuras planas" foi localizado a primeira referência relacionada ao ensino das funções trigonométricas, o *tema*: "triângulo retângulo: cosseno de um ângulo". O fato de esse tema funcionar como um subconjunto da geometria está respaldado na análise epistemológica, apresentada no capítulo anterior, embora cause estranheza por destoar das raízes do Campo Trigonométrico em que o *seno de um ângulo* aparece como noção trigonométrica inicial. Nesse sentido, apesar de não ter sido justificada, essa opção didática segue pela contramão da história das Funções Trigonométricas. Esses dados conduziram à investigação de possíveis tipos de tarefas T, a partir da análise dos itens, dispostos nesse documento: conhecimento, capacidades e os comentários apresentados no quadro, a seguir:

[67] ***"Collège"****:* equivalente, no Brasil, ao 8º ano do Ensino Fundamental.

Quadro 68

Estruturação parcial do setor "figuras planas".

Conhecimento	Capacidades	Comentários
Triângulo retângulo: cosseno de um ângulo.	- Utilizar em um triângulo retângulo a relação entre o cosseno de um ângulo agudo e as medidas dos lados adjacentes. - Utilizar a calculadora para determinar um valor aproximado: do cosseno de um ângulo agudo dado; de um ângulo agudo cujo cosseno é dado.	Não há.

Fonte: FRANCE (2013a)

Tomando como ponto de partida as informações contidas no quadro acima, buscou-se identificar e reescrever, sob a óptica de Chevallard (1992), os elementos basais de uma organização praxeológica concebida por ele mesmo, ou seja, [T/τ/θ/Θ]; todos, dispostos no quadro abaixo:

Quadro 69

Praxeologia existente no setor "figuras planas".

Bloco do Saber-Fazer: [T/τ]		**Bloco do Saber:** [θ/Θ]	
Tipo de tarefa, T	**Técnica utilizada, τ**	**Tecnologia existente, θ**	**Teoria base, Θ**
T_1f_{IC4}: Determinar um valor, aproximado, de cosseno de um ângulo agudo dado.	**τ_{1C4}:** utilizar à calculadora [*para o cálculo em relação ao comprimento*[68]]	**θ_{1C4}:** relação entre cosseno de um ângulo agudo e o comprimento de dois lados adjacentes.	**Θ_{1C4}**: Relações trigonométricas nos triângulos retângulos.
T_2f_{IC4}: Determinar um valor, aproximado, de um ângulo agudo, de um cosseno dado.	**τ_{2C4}:** utilizar à calculadora [*para calcular a medida do ângulo agudo relacionado ao cosseno dado*[2]].		

Fonte: O autor (2015).

Alicerçada na teoria **Θ_{1C4},** relações trigonométricas nos triângulos retângulos, a tecnologia θ_{1C4} cumpre o seu papel de justificar as técnicas τ_{1C4} e τ_{2C4} para a execução de **T_1f_{IC4}** e **T_2f_{IC4}**. No entanto, observou-se na forma que tais técnicas são anunciadas, não encontram na tecnologia θ_{1C4} sustentação para ser

[68]Esses detalhamentos de τ_{1C4} e τ_{2C4} não estão explicitadas no documento em tela. Contudo, verificou-se a necessidade de completá-las dado a insuficiência de elementos para auxiliar na resolução dos tipos de tarefas relacionados, bem como a compreensão da operação inversa nas relações trigonométricas dos triângulos retângulos.

percebido a operação de inversão implícita na resolução de $\mathbf{T_1}\boldsymbol{f}_{\mathbf{IC4}}$ e $\mathbf{T_2}\boldsymbol{f}_{\mathbf{IC4}}$. Assim, como **sinal**[69] **01** (S_{pESe}-01): constatou-se que as relações trigonométricas são verificadas, mas a compreensão da operação inversa entre elas está comprometida pela ausência de clareza das técnicas τ_{1C4} e τ_{2C4}.

6.1.1.2 – Programas de Ensino de Matemática (Classe 3ème – Collège)

Em termos de domínios matemáticos, esse documento está estruturado a partir dos mesmos quatro tipos que o programa anterior.

De modo similar, preservou-se o domínio – a geometria – e, o setor – "figuras planas", ampliando-se o tema para: "triângulo retângulo: relações trigonométricas". Dessa forma, adotando-se o mesmo procedimento anterior, verificou-se a necessidade de conhecer os possíveis tipos de tarefas T, considerando-se a análise dos itens: conhecimento, capacidades e os comentários apresentados no quadro, a seguir:

Quadro 70

Estruturação parcial do setor "figuras planas".

Conhecimento	Capacidades	Comentários
Triângulo retângulo: relações trigonométricas.	- Conhecer e utilizar as relações entre o cosseno, o seno e a tangente de um ângulo agudo formados pelos dois lados adjacentes de um triângulo retângulo. - Determinar, com a ajuda da calculadora, os valores aproximados: do seno, do cosseno e da tangente de um ângulo agudo dado; de um ângulo agudo, dado o cosseno, seno ou a tangente.	- A definição de cosseno foi vista na classe 4ème. O seno e a tangente de um ângulo agudo são introduzidos como relações de comprimentos. As fórmulas seguintes são à demonstrar: $\cos^2 \hat{A} + \text{sen}^2 \hat{A} = 1$ e $\text{tg } \hat{A} = \text{sen } \hat{A}/\cos \hat{A}$. A única unidade usada é o grau decimal.

Fonte: FRANCE (2013a)

Essas informações permitiram a elaboração do próximo quadro para conduzir a continuidade da análise praxeológica, que se pretende:

[69] Os **sinais** dos programas serão representados por S_p.

Quadro 71

Praxeologia existente no setor "figuras planas".

PRAXEOLOGIA EXISTENTE			
Bloco do Saber-Fazer: [T/τ]		**Bloco do Saber:** [θ/Θ]	
Tipo de tarefa, T	**Técnica utilizada, τ**	**Tecnologia existente, θ**	**Teoria base, Θ**
T_1f_{IC3}: Determinar os valores se aproximados do seno, cosseno e tangente de um ângulo agudo dado.	**τ_{1C3}:** utilizar à calculadora [*para calcular as relações de comprimento, a partir da divisão*[70]].	**θ_{1C3}:** definição de seno, cosseno e tangente de um ângulo agudo de um triângulo retângulo a partir da divisão entre os lados desse triângulo.	**Θ_{1C3}**: Relações trigonométricas nos triângulos retângulos.
T_2f_{IC3}: Determinar, os valores aproximados de um ângulo agudo, dados o seno, o cosseno ou a tangente.	**τ_{2C3}:** utilizar à calculadora [*para calcular a medida do ângulo a partir de seu seno, cosseno ou tangente usando as funções inversas de seno, cosseno e tangente*[4]].	Não há.	

Fonte: O autor (2015).

Desvelada a partir dos postulados de Chevallard (1998), verificou-se que esta praxeologia amplia as noções trigonométricas, introduzindo-se o seno e a tangente de um ângulo agudo de um triângulo retângulo. Além dessa constatação, averiguou-se a conservação da natureza dos tipos de tarefas de **T_1f_{IC3}** e **T_2f_{IC3}** que requisitam a mesma base teórica **Θ_{1C3}** – relações trigonométricas nos triângulos retângulos, a mesma tecnologia **θ_{1C3}** que cumpre, parcialmente, o seu papel de justificar as técnicas **τ_{1C3}** e **τ_{2C3}** para a execução de **T_1f_{IC3}** e **T_2f_{IC3}**, pois da forma como são ditas, permanecem sem sustentação na tecnologia **θ_{1C3}** que, de forma implícita, evoca a operação de inversão. Dessa análise, resulta o **sinal 02** (S_{pESe}-02): ampliou-se a noção de cosseno introduzindo-se as noções de seno e tangente, contudo não foram descritas claramente as técnicas **τ_{1C3}** e **τ_{2C3}** para que a compreensão da operação inversa entre as razões trigonométricas destacadas e, os respectivos ângulos agudos dos triângulos retângulos associados, pudessem ser percebidas.

[70] Preservam-se as mesmas observações da nota anterior.

6.1.1.3 – Programas de Ensino de Matemática (Classe Seconde G – Lycée)

Nesse documento, os domínios matemáticos, são estruturados em três tipos distintos:

1. Função.
2. Geometria.
3. Estatística e Probabilidade.

Ao contrário das análises anteriores, elementos de trigonometria não foram encontrados no domínio da geometria, mas sim das funções. Esse fato, também tem abrigo nas rupturas epistemológicas identificadas no capítulo anterior que demarcaram a independência do Campo Trigonométrico do Campo Geométrico. Assim, nesse novo domínio, não se localizou o *setor*, mas, tão somente, o *tema* "trigonometria", conforme um extrato parcial no quadro, abaixo:

Quadro 72

Estruturação parcial do tema "trigonometria".

Conteúdo	Capacidades atendidas	Comentários
Trigonometria: definição de senso e cosseno de um número real no círculo trigonométrico.	- Fazer a ligação dos valores de seno e cosseno de 0º, 30º, 45º, 60º e 90º.	- Fazer a ligação com a trigonometria do triângulo retângulo vista no colégio. - A noção de radiano não é exigida.

Fonte: FRANCE (2013b)

Inicialmente, observou-se nessa etapa da análise, um dado que despertou curiosidade e atenção: uma transição intramatemática[71] no que se refere aos domínios destacados nos programas oficiais franceses que relacionam o tema trigonometria: da Geometria para a Função.

De modo geral, nessa parte do programa – das Funções – prioriza-se resolução de equações do tipo f(x) = k, sendo f(x) dada por meio de uma curva, tabela ou fórmula, bem como a partir de outros aspectos que permitam uma associação autônoma. Enfatizou-se também, a resolução de problemas de otimização ou problemas da forma f(x) > k. Tais situações poderão derivar-se dos

[71] A opção por essa denominação foi inspirada no trabalho de Hillel et Sierpinska (1994).

campos da Matemática, Biologia, Economia, Física, Notícias, etc., sendo suas resoluções auxiliadas, por todos os possíveis softwares disponíveis. Nesse sentido, afirma-se que além do exposto, objetiva-se também melhorar a compreensão algébrica e aprofundar o estudo dos diferentes tipos de números.

Para tanto, são selecionados oito conteúdos que na escala dos níveis de co-determinação de Chevallard (2007a) são denominados de *temas*, cujo intento é apresentar as noções de Função. Nessa sequência, o *tema* trigonometria ocupa o último lugar, sendo mencionadas apenas algumas pistas, conforme se destacou na Tabela 05 (Cf. p. 106).

Sobretudo, da análise em tela resulta o **sinal 03** (S_{pESe}-03): não são encontrados tipos de Tarefas T, nem de técnicas τ, nem de tecnologias θ, nem de teorias Θ para a visualização de uma praxeologia e, por isso, não se observou como é mobilizada a Atividade Matemática podendo ser esse um fato que serve como fundamento para justificar os problemas causados pela introdução da unidade de medida radiano para notificar a magnitude de ângulos quando esses estão nos limites do círculo trigonométrico. Desse modo, os elementos da Tabela 05 (Cf. p. 106) não favorecem a constituição de uma Organização Matemática capaz de erguer uma estrutura para conduzir o alcance da Aprendizagem Matemática dos estudantes.

6.1.1.4 – Programas de Ensino de Matemática (Classe 1ème S – Lycée)

Nesse documento, os domínios matemáticos, são estruturados em três tipos distintos:

1. Análise[72].
2. Geometria.
3. Estatística e Probabilidade.

Como se observa, a geometria assinala o retorno ao domínio matemático que fundamentará a apresentação de elementos trigonométricos que, nesse caso, foram encontrados no nível de co-determinação *tema*: “trigonometria: círculo

[72] No Brasil, equivale ao estudo do Cálculo.

trigonométrico; produto escalar no plano: fórmulas de adição e duplicação de cosseno e seno", conduzindo-se a investigar com as lentes de Chevallard (1998) o próximo quadro:

Quadro 73

Estruturação parcial do tema "trigonometria: círculo trigonométrico".

Conteúdo	Capacidades atendidas	Comentários
Trigonometria: círculo trigonométrico.	- Utilizar o círculo trigonométrico, especialmente para: determinar os cossenos e senos de ângulos associados; resolver, em IR, equações na incógnita x: cos *x* = cos *a* e sen *x* = sen *a*.	- O estudo das funções cosseno e seno não é esperado pelo programa.

Fonte: FRANCE (2013b)

Mais uma vez, submeteu-se o quadro acima, a um extrato da praxeologia em que se objetiva compreender e que se encontra refletida no quadro seguinte:

Quadro 74

Praxeologia existente no tema "trigonometria: círculo trigonométrico".

PRAXEOLOGIA EXISTENTE			
Bloco do Saber-Fazer: [T/τ]		**Bloco do Saber:** [θ/Θ]	
Tipo de tarefa, T	**Técnica utilizada, τ**	**Tecnologia existente, θ**	**Teoria base, Θ**
T_1f_{IS1}: Determinar o cosseno e o seno de ângulos associados.	**τ_{1S1}:** utilizar o círculo trigonométrico.	**θ_{1S1}:** círculo trigonométrico.	Não há.
T_2f_{IS1}: Resolver, em IR, as equações do tipo cos *x* = cos *a* e sen *x* = sen *a*.			

Fonte: O autor (2015).

Observou-se que os tipos de tarefas percebidos, no quadro acima estão de acordo com as expectativas esperadas pelo tema. No entanto, a única técnica τ_{1S1} não permite resolver T_1f_{IS1} com precisão, discriminando o número real associado. O mesmo ocorre com T_2f_{IS1}, pois resolver uma equação significa discriminar o valor da incógnita relacionada, no caso x. Salienta-se também que τ_{1S1}, no mínimo, auxilia a percepção geométrica dos valores a calcular, sendo necessário, ao menos mais uma técnica τ_{2S1}, para a resolução das tarefas mencionadas. Apesar dessa lacuna, a

tecnologia θ_{1S1}, justifica e explica τ_{1S1}, muito embora não se tenha notado em qual teoria está fundamentada, para permitir o discurso anunciado. Dessa reflexão, decorre o **sinal 04** (S_{pESe}-04): há insuficiência de técnicas e ausência de fundamentação teórica para a efetivação das $\mathbf{T_1}f_{1S1}$ e $\mathbf{T_2}f_{1S1}$.

Outra parte da análise repousa sobre o tema "produto escalar no plano", conforme o quadro abaixo:

Quadro 75

Estruturação parcial do tema "produto escalar no plano".

Conteúdo	Capacidades atendidas	Comentários
Produto escalar no plano: fórmulas de adição e duplicação de cosseno e seno.	Demonstrar que cos (a – b) = cos a cos b + sen a sen b.	- A relação para ângulos orientados é permitida.

Fonte: FRANCE (2013b)

Apesar do tema não caracterizar elementos de trigonometria, as operações de produto, tanto entre cossenos, como seno de ângulos diferentes mobilizaram a análise praxeológica a partir do quadro abaixo:

Quadro 76

Praxeologia existente no tema "produto escalar no plano".

PRAXEOLOGIA EXISTENTE			
Bloco do Saber-Fazer: [T/τ]		**Bloco do Saber:** [θ/Θ]	
Tipo de tarefa, T	**Técnica utilizada, τ**	**Tecnologia existente, θ**	**Teoria base, Θ**
$\mathbf{T_1}f_{1S2}$**:** Demonstrar que cos (a – b) = cos a cos b + sen a sen b.	τ_{1S2}**:** aplicar o produto escalar.	θ_{1S2}**:** não existe explicitamente.	Θ_{1S2}**:** Geometria vetorial.

Fonte: O autor (2015)..

Está evidente que a geometria vetorial servirá de fundamentação teórica (Θ_{1S2}) para a constituição do discurso matemático (θ_{1S2}) que irá justificar e interpretar o bloco do saber-fazer. Porém, a parte das técnicas não está posta de forma clara, o que ocasiona em dois problemas: primeiro, torna τ_{1S2} pouco justificável e compreensível; segundo, desarticulada da trigonometria. Nesse sentido, o **sinal 05** (S_{pESe}-05) aponta: ausência de características mais precisas para as técnicas, bem como de suas tecnologias, para a implementação de $\mathbf{T_1}f_{1S2}$.

6.1.1.5 – Programas de Ensino de Matemática (Classe Terminale S – Lycée)

Seguindo o modelo do programa anterior, nesse documento, os domínios matemáticos, são estruturados em três tipos distintos:

1. Análise[73].
2. Números Complexos e Geometria Espacial.
3. Estatística e Probabilidade.

O programa em tela é dirigido para o último nível de ensino, antes da entrada para a universidade. De maneira geral, segue o modelo dos objetivos anteriores, que se baseiam em termos de capacidade esperadas dos estudantes, sobretudo, as capacidades argumentativas, de redação de uma demonstração e de lógica, que se constituem como requisitos para a finalização dessa etapa de estudos.

Dentro do *domínio* Análise, são elencados os seguintes *temas*: noção de limites, limite de uma função, continuidade, cálculo de derivadas, expansão das funções exponenciais, logaritmos, senos e cossenos e, finalmente, o conceito de integração, cujo objetivo é estudar o maior número de fenômenos discretos ou contínuos. Por ter-se rastreado elementos de trigonometria, constituiu-se o quadro, exibido abaixo, que representa um recorte do *domínio* em tela.

Quadro 77

Estruturação parcial do tema "funções seno e cosseno".

Conteúdo	Capacidades atendidas	Comentários
Funções seno e cosseno.	- Conhecer a derivada das funções seno e cosseno; - Conhecer algumas propriedades dessas funções como a paridade e a periodicidade; - Conhecer representações gráficas dessas funções.	- Fazer a ligação entre a derivada da função seno em 0 e no $\lim_{x \to 0} (\text{sen } x)/x$; - Além dos exemplos estudados, nenhum desenvolvimento é esperado sobre as noções de paridade e de periodicidade; - Fazer as ligações entre os resultados obtidos entre o círculo trigonométrico e as representações gráficas das funções seno e cosseno. - [SPC] ondas progressivas senoidais e oscilador mecânico.

Fonte: FRANCE (2013b)

[73] No Brasil, equivale ao estudo do Cálculo.

Mesmo sendo, um dos temas do referido domínio, a busca pela apresentação de tipos de tarefas T foi infrutífera. Verificou-se, dessa forma, a impossibilidade de se esboçar uma praxeologia capaz de mobilizar a Atividade Matemática, objetivada no documento, pois não há indícios de técnicas, tecnologias ou teorias associadas a, pelo menos, um tipo de tarefa T, permitindo, dessa forma, discriminar o **sinal 06** (S_{pESe}-06): completa ausência de praxeologias.

Sendo assim, ao concluir a etapa de análise dos programas franceses de ensino de matemática para o Ensino Secundário, reuniu-se no quadro seguinte, os seis primeiros sinais obtidos para efeito de mapeamento e posteriores considerações:

Quadro 78

Mapeamento de Sinais encontrados nos Programas Oficiais de Ensino de Matemática (Ensino Secundário) na França.

Referência	**Mapeamento de Sinais nos Programas** (MS_{pESe})
S_{pESe}-01	Constatou-se que as relações trigonométricas são verificadas, mas a compreensão da operação inversa entre elas está comprometida pela ausência de clareza das técnicas τ_{1C4} e τ_{2C4}.
S_{pESe}-02	Ampliou-se a noção de cosseno introduzindo-se as noções de seno e tangente, contudo não foram descritas claramente as técnicas τ_{1C3} e τ_{2C3} para que a compreensão da operação inversa entre as razões trigonométricas destacadas e, os respectivos ângulos agudos dos triângulos retângulos associados, pudessem ser percebidos.
S_{pESe}-03	Não são encontrados tipos de tarefas T, nem de técnicas τ, nem de tecnologias θ, nem de teorias Θ para a visualização de uma praxeologia.
S_{pESe}-04	Há insuficiência de técnicas e ausência de fundamentação teórica para a efetivação das $\mathbf{T_1}f_{IS1}$ e $\mathbf{T_2}f_{IS1}$.
S_{pESe}-05	Ausência de características mais precisas para as técnicas, bem como de suas tecnologias para a implementação de $\mathbf{T_1}f_{IS2}$.
S_{pESe}-06	Completa ausência de praxeologias.

Fonte: O autor (2015).

Com efeito, além desses sinais, também foi percebido ao longo da análise desenvolvida que, a constante mudança entre os domínios da geometria e função que, ora abordava as noções trigonométricas iniciais, seno e cosseno, a partir de um ângulo e, ora a partir de um número real. No quadro a seguir, esse movimento pode ser melhor visualizado:

Quadro 79

Mudanças entre os Domínios Matemáticos.

Nível de Ensino	Domínio Matemático	Definição	Noção
Collège	Geometria	Relação entre os comprimentos dos lados de um triângulo retângulo.	Seno, cosseno e tangente de um ângulo.
Lycée – Seconde	Função	A partir de um círculo trigonométrico.	Seno, cosseno e tangente de um número real.
Lycée – Première S	Geometria	A partir de um círculo trigonométrico.	Seno, cosseno e tangente de um número real.
Lycée Terminale S	Função	Definição das funções seno e cosseno.	Funções seno e cosseno.

Fonte: O autor (2015)..

Os dados, desses dois últimos quadros mobilizaram o interesse e curiosidade científica em busca de questões, tais como: Como são introduzidas técnicas relativas ao ensino das Funções Trigonométricas nos manuais franceses? Como essas técnicas são usadas na resolução dos tipos de Tarefas dispostas nesses manuais? Esses manuais conseguem superar as lacunas verificadas nos programas oficiais?

No próximo item, foi iniciada a análise praxeológica, dos manuais franceses destinados ao Ensino Secundário, cujo objetivo é tentar dar algumas respostas às questões acima anunciadas.

6.1.2 – Análise dos Manuais:

6.1.2.1 – Manuais de Matemática para o Collège:

Nessa etapa da pesquisa, objetiva-se analisar as praxeologias existentes relacionadas ao *tema* "Funções Trigonométricas", considerando os manuais (livros didáticos) franceses destinados ao Ensino Fundamental II, sendo que na França esse nível escolar é denominado de Collège, cujos manuais estão disponíveis gratuitamente *"on line"* [74]. A opção de examinar esse tipo de material justifica-se, a partir da característica democrática de seu acesso pelas vias das novas tecnologias,

[74] Embora também exista a mesma coleção no formato impresso.

que estão amplamente disponíveis nas escolas públicas da sociedade francesa. Assim, avaliou-se que o formato desse recurso didático atinge o maior número de alunos, professores, pesquisadores e demais interessados no modelo escolarizado do ensino de matemática, sendo este, o principal critério para a determinação da escolha dos mesmos.

Para alcançar tal intento, elaborou-se uma metodologia de análise, descrita a seguir, que funcionará como fio condutor para mapear e compreender as praxeologias, existentes nos manuais franceses selecionados. Esse processo constituiu-se de:

- Identificação do manual;
- Caracterização do manual: linhas gerais;
- Caracterização do capítulo relacionado ao tema: estrutura e objetivos;
- Identificação, classificação e localização dos tipos de tarefas T;
- Análise praxeológica de T;
- Mapeamento de Sinais nos Manuais do Collège (MS_{mC}).

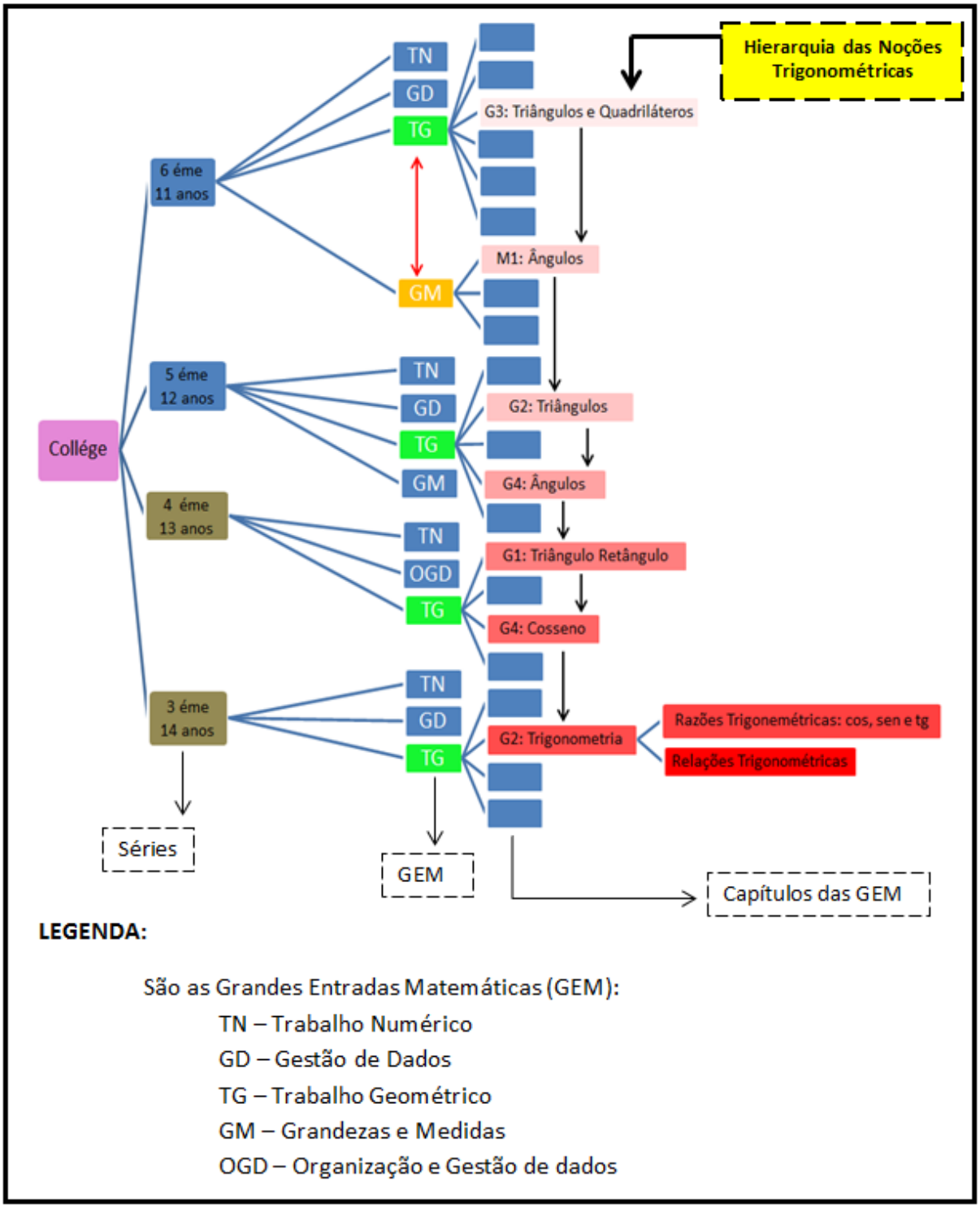
Iniciando-se o processo pela identificação, seguem alguns dados para contribuir com a caracterização do objeto:

Título: *"Le Manuel SÉSAMATH" on line (http://manuel.sesamath.net/)*
Autores: BOUGON et al.
Editora: *Génération*
Ano de publicação: *2008*

Na sequência, segue um esquema inicial, das Grandes Entradas Matemáticas, cujo objetivo foi guiar a análise que se segue nesses manuais:

Quadro 80

Esquema dos **"DADOS TRIGONOMÉTRICOS DE ENTRADAS"** por meio dos Manuais da coleção *SÉSAMATH"* do Collége na França – 2014.



Fonte: O autor (2015).

Conforme se observou no quadro acima, as primeiras sementes do Campo Trigonométrico puderam ser encontradas no terceiro capítulo da GEM, denominada de "Trabalho Geométrico", com a apresentação do tema triângulos,

embora o *tema* “funções trigonométricas” tenha suas raízes fincadas em todas as etapas do Ensino Secundário na França, englobado pelas quatro séries, respectivamente, 6ª, 5ª, 4ª e 3ª[75].

Dada tal constatação, vislumbrou-se a necessidade de um rápido exame, em todos os sumários, de cada um dos respectivos manuais associados a essas séries, cujo objetivo foi reconhecer a estrutura geral dessa organização para então, proceder à análise praxeológica referente ao *tema*. Assim, constatou-se no quadro a seguinte disposição:

Quadro 81

Estruturação da Organização Matemática nos manuais da coleção Sésamath[76].

Manuais	Blocos (GEM)	Nº de capítulos	Totais
6ª série	Trabalho numérico	06	08 (p_{6a1})
	Gestão de dados	02	
	Trabalho geométrico	**07**	**10** (p_{6a2})
	Grandezas e medidas	03	
5ª série	Trabalho numérico	04	06 (p_{5a1})
	Gestão de dados	02	
	Trabalho geométrico	**05**	**07** (p_{5a2})
	Grandezas e medidas	02	
4ª série	Trabalho numérico	05	07 (p_{4a1})
	Organização e Gestão de dados	02	
	Trabalho geométrico	**05**	**05** (p_{4a2})
3ª série	Trabalho numérico	06	09 (p_{3a1})
	Organização e Gestão de dados	03	
	Trabalho geométrico	**04**	**04** (p_{3a2})

Fonte: O autor (2015).

Esse mapeamento permitiu demonstrar que:

● Os blocos do trabalho numérico **TN** (organização e gestão de dados), antecedem em todas as séries os blocos do trabalho geométrico **TG** (grandezas e medidas);

[75] Originalmente, são escritas pelos franceses como: 6ème, 5ème, 4ème e 3ème. São, respectivamente, equivalentes ao modelo brasileiro: 6º, 7º, 8º e 9º anos do Ensino Fundamental II.
[76] Sésamath , associações de professores. Disponível em: <http://www.sesamath.net/blog/index.php>

● O número de capítulos (nc), resulta que: (nc)TN = (p_{6a1}) + (p_{5a1}) + (p_{4a1}) + (p_{3a1}) = 30 e (nc)TG = (p_{6a2}) + (p_{5a2}) + (p_{4a2}) + (p_{3a2}) = 26. Logo, (nc)TN > (nc) TG.

A partir desses dois fatos, descrevem-se os primeiros **sinais** (S_{mC}[77])**:**

S_{mC}-01: A geometria sucede a aritmética (em maior escala, a álgebra), sendo posicionada na última parte dos manuais;

S_{mC}-02: a dose de atividades – medida por meio de (nc) – destinadas a geometria é menor que na aritmética (em maior escala, a álgebra).

Além dessas constatações, salienta-se que o interior de cada um dos capítulos está organizado da seguinte forma: Atividades de Descoberta (AD_m); Curso e Métodos (CD_m); Exercícios corrigidos por animação; Exercícios de Treinamento (ET_m); Exercícios Aprofundamento (EA_m); Trabalho em Grupo (TG_m); Questões mais Frequentes (QF_m); Teste (questionário de múltipla escolha/QCM_m); Para mais (PM_m); Recreação Matemática (RM_m).

Esta disposição possibilitou inferir no que se objetiva: estimular à curiosidade dos estudantes, auxiliar à compreensão dos temas por meio de uma sistematização, assistir a correção dos exercícios, dispor de uma variedade de tipos de tarefas, na forma de exercícios, promover a interação social, preparar para os exames, instigar a curiosidade.

Com efeito, e, levando em consideração os estudos epistemológicos, desenvolvidos pinçados de Boyer (1974) e Kennedy (1992) e os apresentados em Fonseca (2011, 2012b) para a compreensão da trigonometria e das funções trigonométricas, verificou-se que o desenvolvimento desse campo está baseado no cálculo de distâncias inacessíveis, sobre os tamanhos e distâncias da Terra, do sol e da lua. Conforme esses autores, para que esse intento fosse alcançado fez-se necessário, analisar as relações métricas em triângulos – base inicial das inquirições – desde os antigos mesopotâmicos, egípcios e babilônios, até a Matemática grega, marcada pelo trabalho de Hiparco que conforme Boyer (1974) compilou a primeira tabela trigonométrica.

[77] Os **sinais** dos manuais serão representados por S_m.

6.1.2.1.1 – Os Manuais de Matemática para a 4ª série (4ème)

Evocar essa constatação permitiu demarcar e decidir pelo o início do processo de identificação, classificação e localização dos tipos de tarefas T, a partir do manual para a 4ª série (4ème), pois nele foram encontradas, no *domínio* da geometria, as primeiras noções relativas às Funções Trigonométricas: *as relações trigonométricas nos triângulos retângulos*. Para tanto, recorreu-se aos postulados de Chevallard (1994) que, além de possibilitar descrever a praxeologia existente nos manuais, também permite salientar que reside no entendimento de que os tipos de tarefas T, identificados auxiliam na hierarquização natural de uma Organização Matemática.

Dessa forma, os tipos de Tarefas T encontrados foram:

T_{1LD4} – Identificar a hipotenusa de um triângulo retângulo.

T_{2LD4} – Identificar o cateto adjacente de um triângulo retângulo.

T_{3LD4} – Escrever a fórmula do cosseno de um ângulo agudo de um triângulo retângulo.

T_{4LD4} – Calcular o comprimento do lado adjacente a um ângulo agudo de um triângulo retângulo.

T_{5LD4} – Calcular o comprimento da hipotenusa de um triângulo retângulo.

T_{6LD4} – Calcular a medida de um ângulo agudo de um triângulo retângulo dado o cosseno correspondente.

T_{7LD4} – Dar um valor aproximado do cosseno do ângulo dado.

Associados a esses tipos de Tarefas T, foram identificados os outros elementos que complementam a praxeologia existente:

Quadro 82

Praxeologia existente nos tipos de Tarefas T do Livro Didático (manual) para 4ª série.

Bloco do Saber-Fazer: [T/τ]		**Bloco do Saber:** [θ/Θ]	
Tipo de tarefa, T	**Técnica utilizada, τ**	**Tecnologia existente, θ**	**Teoria base, Θ**
T_{1LD4}	τ_{1LD4}:aplicar a definição de hipotenusa de um triângulo retângulo	θ_{1LD4}:Definição de hipotenusa.	Θ_{1LD4}: Geometria Plana
T_{2LD4}	τ_{21LD4}:aplicar a definição de cateto adjacente de um triângulo retângulo	θ_{2LD4}:Definição de cateto adjacente de um ângulo em um triângulo retângulo	
T_{3LD4}	τ_{31LD4}:aplicar a definição de cosseno	θ_{3LD4}:Definição de cosseno de um ângulo agudo em um triângulo retângulo	
T_{4LD4}	τ_{41LD4}: a partir da fórmula para o cosseno do ângulo agudo (τ_3), expressar o comprimento do lado adjacente (aplicando a regra de produtos cruzados) e calcular	θ_{3LD4} θ_{4LD4}: regra de produtos cruzados	
T_{5LD4}	τ_{51LD4}: a partir da fórmula para o cosseno do ângulo agudo (τ_3), expressar o comprimento da hipotenusa (aplicando a regra de produtos cruzados) e calcular	θ_{3LD4} θ_{4LD4}	
T_{6LD4}	τ_{61LD4}: calcular $\cos^{-1}$ do valor de cosseno dado.	θ_{5LD4}: Propriedade que a composição de uma função com o seu inverso dá a função de identidade.	Θ_{2LD4}: Função
T_{7LD4}	τ_{71LD4}: utilizar a função cosseno da calculadora e depois arredondar o resultado obtido de acordo com o que foi pedido.	θ_{5LD4}	

Fonte: O autor (2015).

Para ilustrar, segue alguns recortes dos tipos de Tarefas T encontrados:

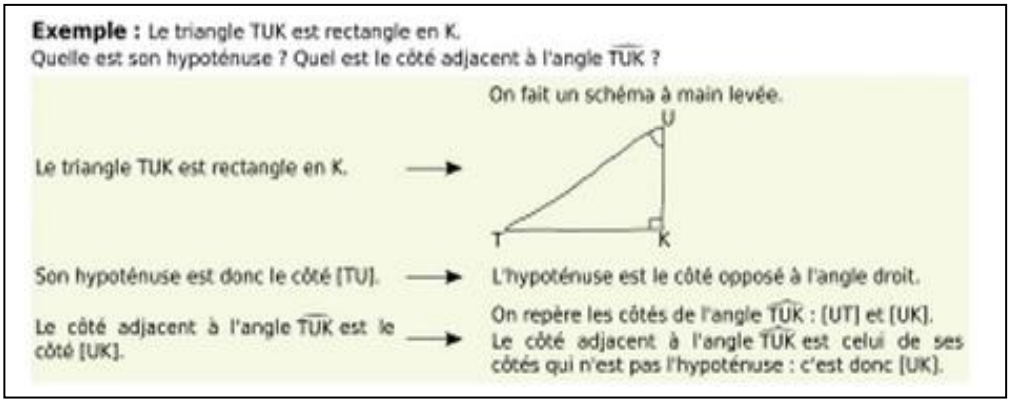


Figura 70: T_{1LD4} e $T_{2\ LD4}$.
Fonte: Manual Sésamath/4ème (2011, p. 190).

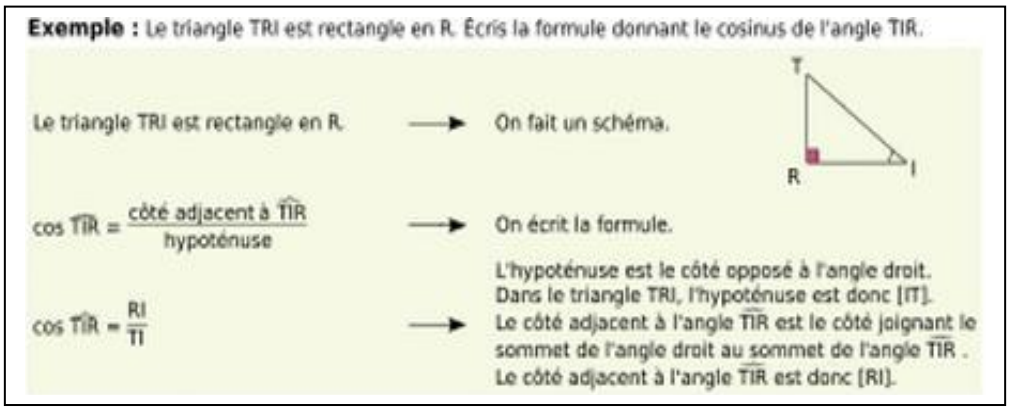


Figura 71: $T_{3\ LD4}$.
Fonte: Manual Sésamath/4ème (2011, p. 190).

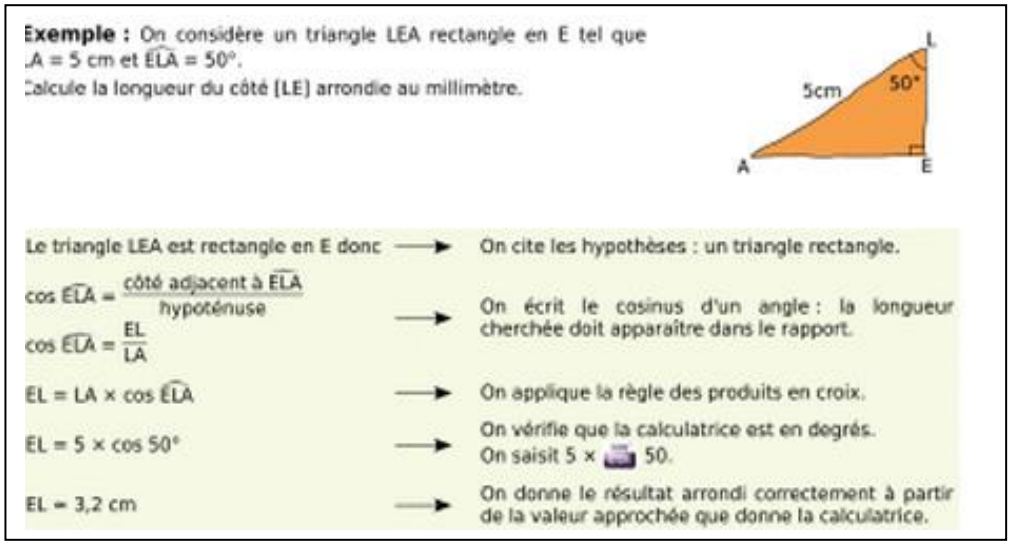


Figura 72: $T_{4\ LD4}$.
Fonte: Manual Sésamath/4ème (2011, p. 191).

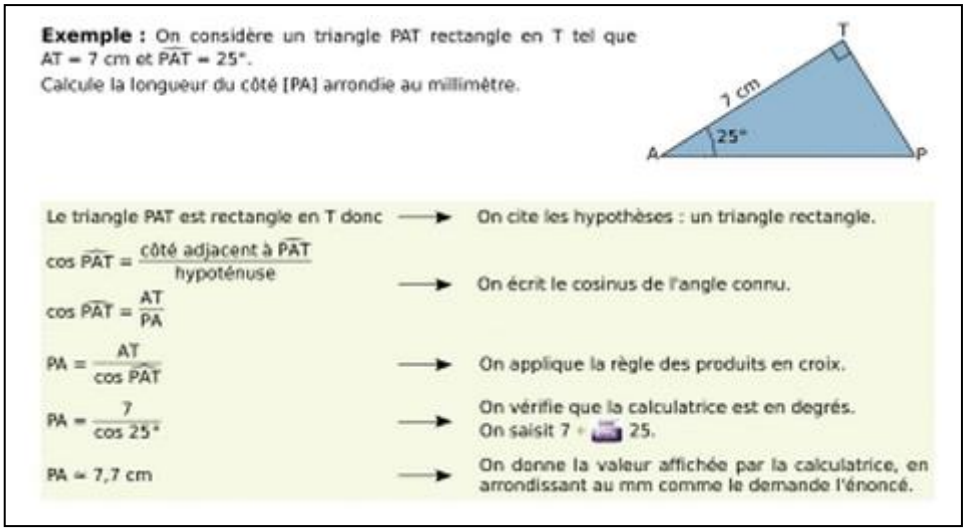


Figura 73: $T_{5\ LD4}$.
Fonte: Manual Sésamath/4ème (2011, p. 191).

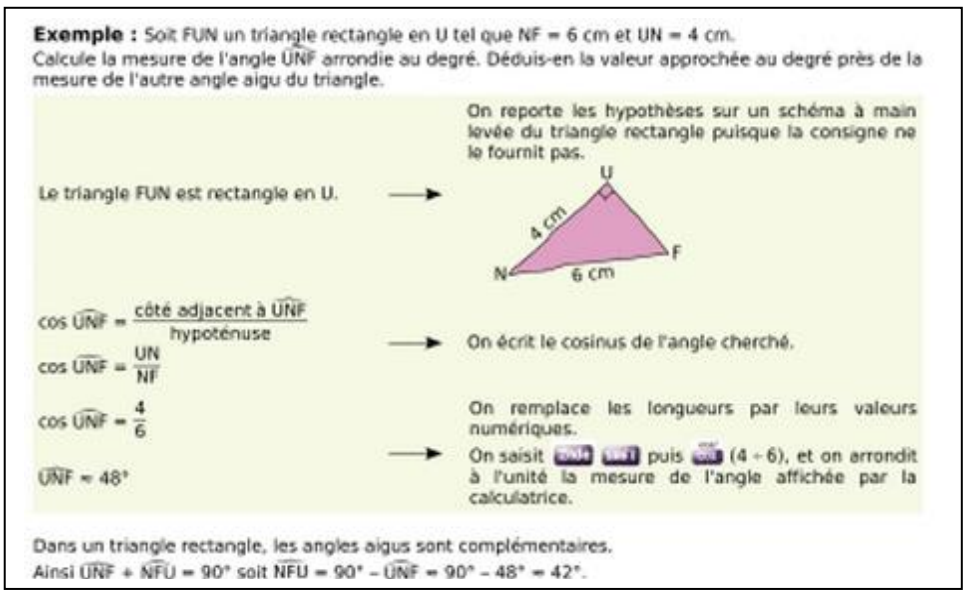


Figura 74: $T_{6\ LD4}$.
Fonte: Manual Sésamath/4ème (2011, p. 192).

Contabilizou-se um quantitativo de 74 tarefas que privilegiam os tipos acima mencionados, na parte do capítulo denominada de Curso e Métodos (CD_m), responsável pela apresentação teórica do tema.

De posse dessa lente, buscou-se analisar, nos tópicos seguintes (ET_m, EA_m, TG_m, QF_m, QCM_m, PM_m, RM_m), ampliando o levantamento estatístico, respostas para as seguintes questões: quais tipos de Tarefas T permanecem nos exercícios e/ou atividades desse capítulo? Existem tipos de Tarefas T não previstos

no tópico da teoria? O bloco do saber justifica as técnicas associadas aos tipos de tarefas T encontrados?

Com o intuito de compreender como esses tipos de tarefas T foram dispostos nesse manual, fez-se necessário levantar o número de vezes que aparecem nos sete blocos de exercícios e/ou atividades propostas:

Quadro 83

Estatística dos tipos de Tarefas T *encontradas no manual para 4ª série.*

T	Sete blocos de Questões com exercícios e/ou atividades							$Total_1$
	ET_m	EA_m	TG_m	QF_m	QCM_m	PM_m	RM_m	
	Rastreamento e localização das questões enumeradas de 1 a 38							
T_{1LD4}	1			-				**1**
T_{2LD4}	1,2			-				2
T_{3LD4}	2,3,4,6,8,9,10, 11,15			-	2,5,6,10	X		14
T_{4LD4}	9,10,11,12,13, 14,15,18,19, 20,21,22,23	25,27,28, 34,37,38	2	-	1,3,7			**23**
T_{5LD4}	24	25,26,27, 32, 33,34, 36	1,2	-	4			11
T_{6LD4}	5,7,8,16,17, 18,19,20, 22	26,28,29,30, 31,32,33, 34,35,38	2	-	8,9		X	**23**
T_{7LD4}	1	-		-	-		-	**1**
$Total_2$	36	23	4	-	10	1	1	
Total de Questões								38

Fonte: O autor (2015).

Considerando-se os números do quadro acima, constatou-se que:

● Os T_{4LD4} e T_{6LD4} são os tipos mais privilegiados por aparecerem 23 vezes cada um;

● Os T_{1LD4} e T_{7LD4} são os menos privilegiados por aparecerem apenas uma vez;

● O bloco ET_m, com 36 questões, agrega a maior quantidade de variedade relativa a todos os tipos de tarefas T, enquanto no RM_m existe apenas uma questão, cujo subtipo é o mais complexo, T_{6LD4}.

● Todos os tipos de tarefas T encontradas nos sete blocos estão previstos no bloco CD_m.

No entanto, a análise da praxeologia descrita no Qaudro 79 permitiu verificar no bloco do Saber, [θ/Θ], que as mudanças nas tecnologias relacionadas à teoria Θ_{1LD4} foram decorrentes e estão justificadas pela mudança dos domínios entre

Θ_{1LD4} e Θ_{2LD4}, fato esse que demonstra uma das origens das dificuldades dos estudantes em articular domínios diferenciados para resolver tarefas especificamente relacionadas e fundamentadas no domínio da geometria.

Além disso, decidiu-se compreender, se o conjunto de técnicas encontradas nesse último domínio – mais recorrente entre os que são mencionados, são suficientes para a resolução dos exercícios mapeados no Quadro 46 (Cf. p. 257).

Em termos de distribuição dos tipos de tarefas para apropriação das técnicas, verificou-se que no bloco ET_m o tipo T_{5LD4} considera apenas a questão 24. Por conta desse dado, resolveu-se comparar a resolução entre essa, do bloco ET_m e, a questão 36, do bloco EA_m:

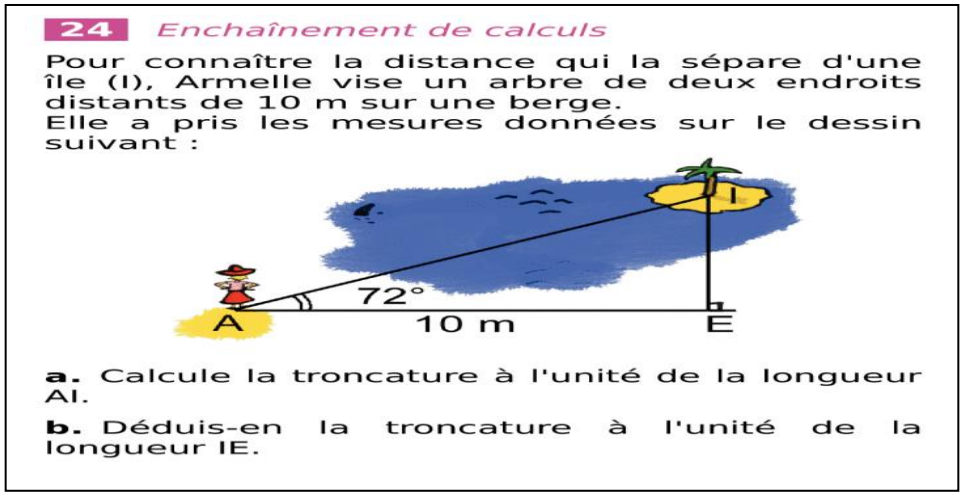


Figura 75: T_{5LD4} do bloco ET_m.
Fonte: Manual Sésamath/4ème (2011, p. 196).

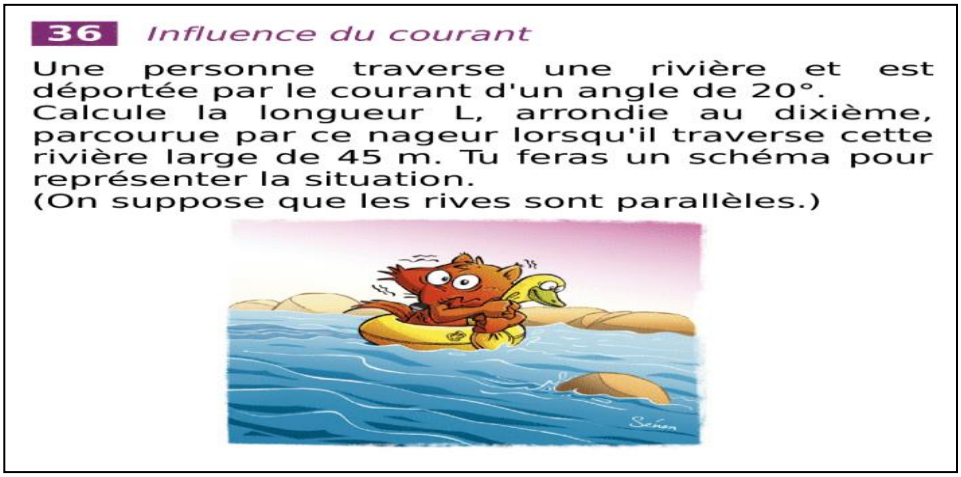


Figura 76: T_{5LD4} do bloco EA_m.
Fonte: Manual Sésamath/4ème (2011, p. 196).

Analisando as Figuras 75 e 76, tem-se:

Para resolver a T_{5LD4} da questão 24, não é suficiente aplicar apenas a τ_{3LD4}, mas também a técnica (implícita) referente ao teorema de Pitágoras (τ_{3aLD4}), justificado pela tecnologia θ_{1LD4}. No entanto, para resolver o mesmo tipo de tarefa na questão 36, além de τ_{3LD4} e τ_{3aLD4} seria preciso esboçar a "geometria" associada à situação-problema, "influência da corrente[78]", configurando-se dessa forma a técnica τ_{3bLD4}. Disso, decorre o **sinal** S_{mC}-03: considera-se insuficiente uma única questão (24) para a apropriação da técnica associada τ_{3LD4} e eficiência na continuidade do bloco EA_m.

Outra marca que despertou atenção refere-se ao fato do tipo T_{6LD4}, ser ativado, com exceção do bloco PM_m, em todos os outros. Examinando todas as questões relativas a esse tipo de Tarefa, verificou-se que τ_{61LD4} cumpre seu objetivo, apesar de necessitar da tecnologia θ_{5LD4}, que recorre ao domínio teórico das funções (Θ_{2LD4}).

Assim, responde-se ao último questionamento com **sinal** S_{mC}-04: o bloco do saber, cujos *domínios* são a geometria plana (Θ_{1LD4}) e a função (Θ_{2LD4}), justificam, fundamentam e explicam as suas respectivas técnicas associadas aos tipos de Tarefas encontrados, embora constituam-se em campos epistemológicos distintos e que, nessa análise não foi encontrado um diálogo entre os mesmos, ocasionando, dessa forma, uma ruptura epistemológica imersa e não sensível no processo de ensino e aprendizagem, das noções primeiras das Funções Trigonométricas.

6.1.2.1.2 – Os Manuais de Matemática para a 3ª série (3ème)

De modo análogo ao manual da série anterior, observou-se que no *domínio* da geometria, as primeiras noções relativas às funções trigonométricas foram construídas e alicerçadas sobre as *razões e relações trigonométricas, no triângulo retângulo*.

[78] Traduzido do original *"Influence du courant".*

Com efeito, por ser um tema mais incisivo e rumo às construções mais abstratas acerca do Campo Trigonométrico, verificou-se que uma ampliação significativa, nos tipos de Tarefas por meio de subtipos que buscaram, sob a óptica dessa análise, resgatar as noções iniciais anteriores, ampliar o campo em tela com novas noções, mostrar modos de flexibilizar o cálculo da medida do lado ou ângulo de um triângulo retângulo e, por fim, mobilizar a percepção das relações inversas no cálculo de ângulos ou lados de um triângulo retângulo.

Dessas impressões iniciais, foram identificadas no capítulo 02, da entrada TG (Trabalho Geométrico) do manual em tela os tipos e subtipos de Tarefas, conforme a sequência abaixo:

T_{1LD3}: Identificar um lado em um triângulo retângulo dado.
- $T_{1.1LD3}$: Identificar a hipotenusa em um triângulo retângulo.
- $T_{1.2LD3}$: Identificar o lado adjacente a um ângulo em um triângulo retângulo.
- $T_{1.3LD3}$: Identificar o lado oposto a um ângulo em um triângulo retângulo.

T_{2LD3}: Escrever a relação tigonométrica dado um triângulo retângulo.
- $T_{2.1LD3}$: Escrever a relação dado o seno de um ângulo agudo em um triângulo retângulo.
- $T_{2.2LD3}$: Escrever a fórmula dado o cosseno de um ângulo agudo em um triângulo retângulo.
- $T_{2.3LD3}$: Escrever a fórmula dado a tangente de um ângulo agudo em um triângulo retângulo

T_{3LD3}: Dar o valor do seno, cosseno e tangente de um ângulo dado.
- $T_{3.1LD3}$: Dar o valor do seno de um ângulo dado.
- $T_{3.2LD3}$: Dar o valor do cosseno de um ângulo dado.
- $T_{3.3LD3}$: Dar o valor da tangente de um ângulo dado .

T_{4LD3}: Calcular o comprimento (exato ou aproximado) do lado em um triângulo retângulo.
- $T_{4.1LD3}$: Clacular o comprimento da hipotenusa.
- $T_{4.2LD3}$: Clacular o comprimento do lado adjacente a um ângulo agudo.
- $T_{4.3LD3}$: Clacular o comprimento do lado oposto a um ângulo agudo.

T_{5LD3}: Escolher a relação trigonométrica adequada para um cálculo dado.

T_{6LD3}: Dar o valor (exato ou aproximado) de um ângulo.
- $T_{6.1LD3}$: Dar o valor de um ângulo agudo em um triângulo retângulo conhecendo os comprimentos de alguns dos seus lados.
- $T_{6.2LD3}$: Dar o valor de um ângulo conhecendo o valor do seno, cosseno ou tangente.

T_{7LD3}: Calcular o valor do seno (cosseno) de um ângulo agudo conhecendo seu cosseno (seno).

T_{8LD3}: Calcular a tangente de um ângulo conhecendo seus seno e cosseno.

A seguir, tanto os tipos de Tarefas T como os seus subtipos, foram dispostos no quadro a seguir a fim de tornar possível conhecer a praxeologia existente nessa obra.

Quadro 84

Praxeologia existente nos tipos e subtipos de Tarefas T do Livro Didático (manual) para 3ª série.

<table>
<tr><th colspan="3">Bloco do Saber-Fazer: [T/τ]</th><th colspan="2">Bloco do Saber: [θ/Θ]</th></tr>
<tr><th colspan="2">Tipo de tarefa, T</th><th>Técnica utilizada, τ</th><th>Tecnologia existente, θ</th><th>Teoria base, Θ</th></tr>
<tr><td rowspan="3">T_{1LD3}</td><td>$T_{1.1LD3}$</td><td>τ_{1LD3}: aplicar a definição de hipotenusa em um triângulo retângulo.</td><td rowspan="3">θ_{1LD3}: Propriedades (definições) geométricas do triângulo retângulo.</td><td rowspan="15">Θ_{1LD3}: Geometria Plana</td></tr>
<tr><td>$T_{1.2LD3}$</td><td>τ_{2LD3}: aplicar a definição de lado adjacente em um triângulo retângulo.</td></tr>
<tr><td>$T_{1.3LD3}$</td><td>τ_{3LD3}: aplicar a definição de lado oposto em um triângulo retângulo.</td></tr>
<tr><td rowspan="3">T_{2LD3}</td><td>$T_{2.1LD3}$</td><td>τ_{4LD3}: aplicar a definição de seno em um triângulo retângulo.</td><td rowspan="11">θ_{2LD3}: Propriedades (definições) trigonométricas do triângulo retângulo.</td></tr>
<tr><td>$T_{2.2LD3}$</td><td>τ_{5LD3}: aplicar a definição de cosseno em um triângulo retângulo.</td></tr>
<tr><td>$T_{2.3LD3}$</td><td>τ_{6LD3}: aplicar a definição de tangente em um triângulo retângulo.</td></tr>
<tr><td rowspan="3">T_{3LD3}</td><td>$T_{3.1LD3}$</td><td rowspan="3">τ_{7LD3}: utilizar à calculadora</td></tr>
<tr><td>$T_{3.2LD3}$</td></tr>
<tr><td>$T_{3.3LD3}$</td></tr>
<tr><td rowspan="3">T_{4LD3}</td><td>$T_{4.1LD3}$</td><td>τ_{4LD3} ou τ_{5LD3}</td></tr>
<tr><td>$T_{4.2LD3}$</td><td>τ_{5LD3}</td></tr>
<tr><td>$T_{4.3LD3}$</td><td>τ_{4LD3}</td></tr>
<tr><td colspan="2">T_{5LD3}</td><td>τ_{4LD3} ou τ_{5LD3} ou τ_{6LD3}</td></tr>
<tr><td rowspan="2">T_{6LD3}</td><td>$T_{6.1LD3}$</td><td>τ_{8LD3}: escolher a relação trigonométrica adequada, escrevendo-a e utilizando a regra dos produtos cruzados para encontrar o valor procurado.</td></tr>
<tr><td>$T_{6.2LD3}$</td><td>τ_{9LD3}: utilizar a função inversa seno, cosseno ou tangente da calculadora.</td><td>θ_{3LD3}: Propriedade que a composição de uma função com o seu inverso dá a função de identidade.</td><td>Θ_{2LD3}: Função</td></tr>
<tr><td colspan="2">T_{7LD3}</td><td>τ_{10LD3}: aplicar a relação trigonométrica fundamental</td><td rowspan="2">θ_{4LD3}: Propriedades (relações) trigonométricas do triângulo retângulo.</td><td rowspan="2">Θ_{1LD3}</td></tr>
<tr><td colspan="2">T_{8LD3}</td><td>τ_{11LD3}: aplicar a relação trigonométrica tg x = sen x/cos x</td></tr>
</table>

Fonte: O autor (2015).

Na sequência, seguem algumas ilustrações apanhadas do CD_m, para esboçar exemplos dos contextos desvelados:

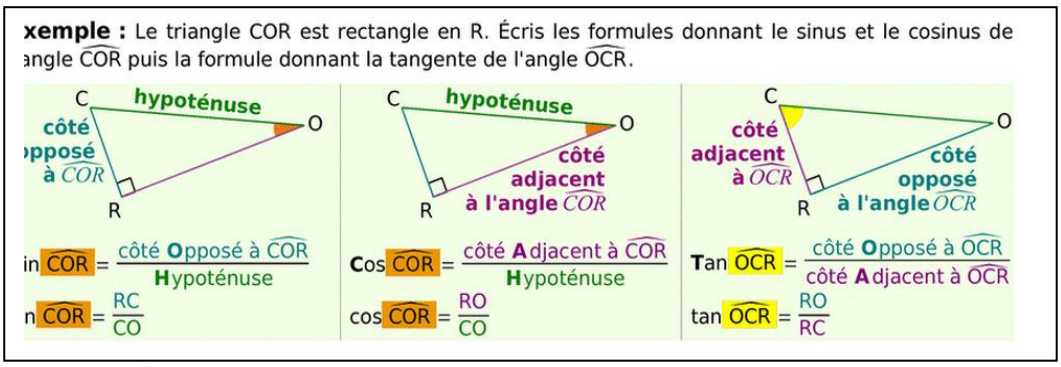


Figura 77: T_{2LD3} e seus respectivos subtipos.
Fonte: Manual Sésamath/3ème (2012, p. 206).

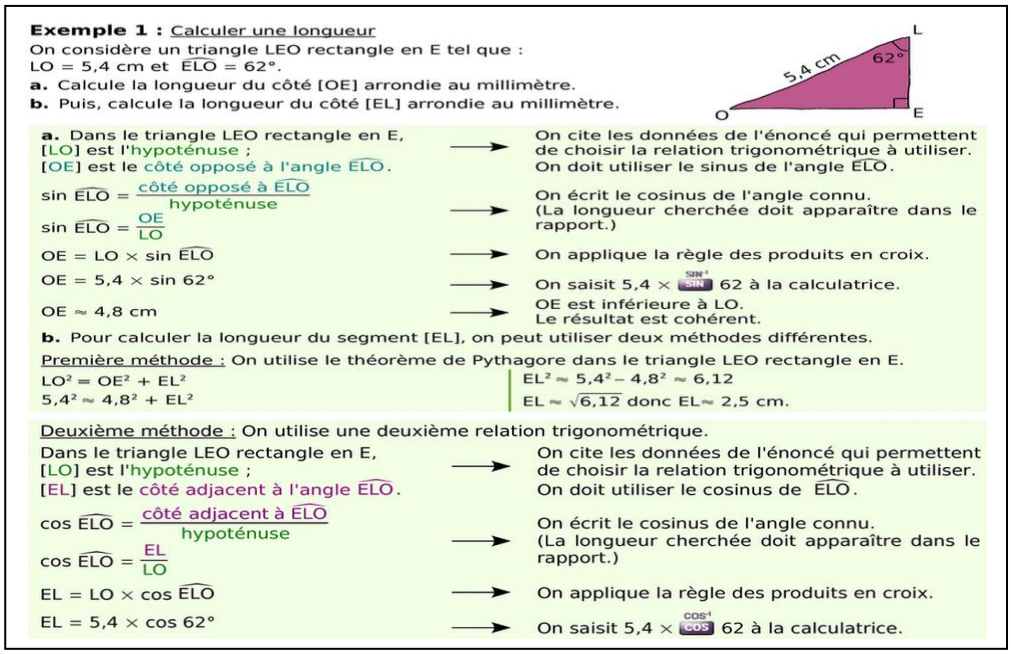


Figura 78: T_{4LD3} e seus respectivos subtipos.
Fonte: Manual Sésamath/3ème (2012, p. 206-207).

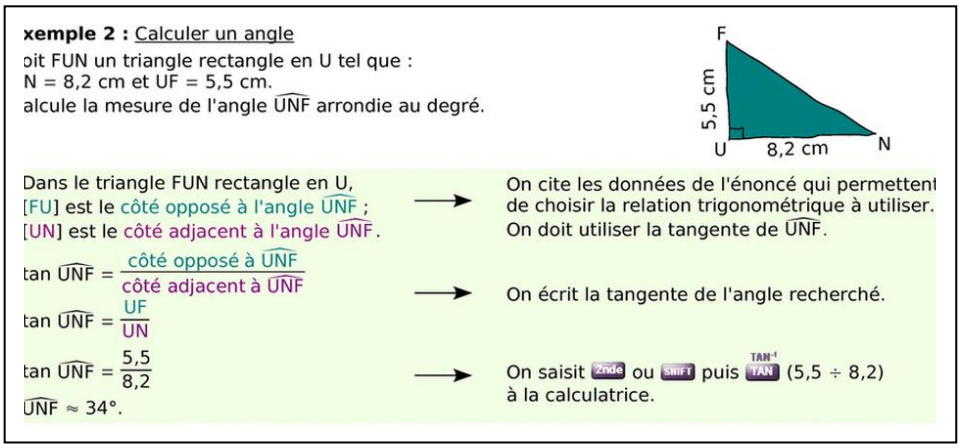
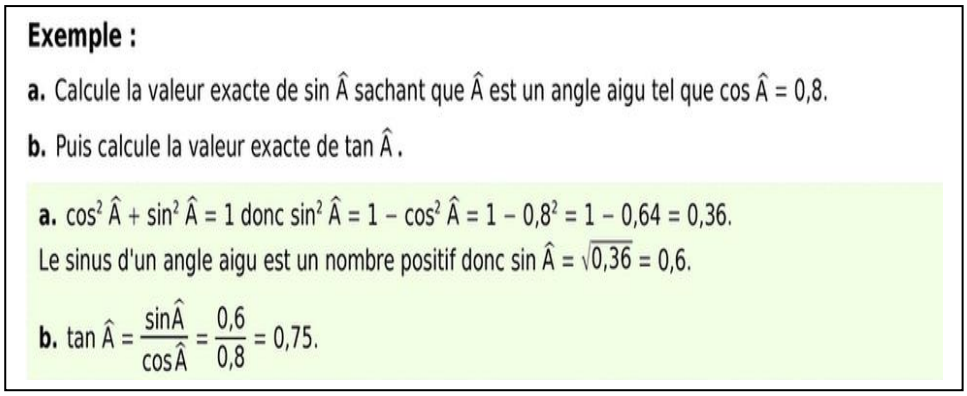


Figura 79: T_{6LD3} e seus respectivos subtipos.
Fonte: Manual Sésamath/3ème (2012, p. 207).



Exemple :

a. Calcule la valeur exacte de sin $\hat{A}$ sachant que $\hat{A}$ est un angle aigu tel que cos $\hat{A} = 0{,}8$.

b. Puis calcule la valeur exacte de tan $\hat{A}$.

a. $\cos^2 \hat{A} + \sin^2 \hat{A} = 1$ donc $\sin^2 \hat{A} = 1 - \cos^2 \hat{A} = 1 - 0{,}8^2 = 1 - 0{,}64 = 0{,}36$.
Le sinus d'un angle aigu est un nombre positif donc $\sin \hat{A} = \sqrt{0{,}36} = 0{,}6$.

b. $\tan \hat{A} = \dfrac{\sin \hat{A}}{\cos \hat{A}} = \dfrac{0{,}6}{0{,}8} = 0{,}75$.

Figura 80: T_{7LD3} e/ou T_{8LD3}.
Fonte: Manual Sésamath/3ème (2012, p. 207).

Ao longo do corpo da obra, buscou-se desenvolver um levantamento quantitativo, em torno dos tópicos estruturantes desse capítulo (ET_m, EA_m, TG_m, QCM_m, RM_m), que resultou em 79 tarefas, dispostas conforme o quadro abaixo:

Quadro 85

Estatística dos tipos de Tarefas T *encontradas no manual para 3ª série.*

T	Cinco blocos de Questões com exercícios e/ou atividades					$Total_1$
	ET_m	EA_m	TG_m	QCM_m	RM_m	
	Rastreamento e localização das questões enumeradas de 1 a 64					
T_{1LD4}	1, 2, 3			1, 2		**5**
T_{2LD4}	1, 3, 4, 5, 6, 7, 8			-		7
T_{3LD4}	1, 2, 3, 9			7, 8, 9		7
T_{4LD4}	14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23			4		**11**
T_{5LD4}	-	38, 39, 40, 41, 42, 46, 57, 58, 62, 63	1 e 2	3, 5, 6, 10		16
T_{6LD4}	10, 11, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 31, 32, 33, 37	-		-		**12**
T_{7LD4}	-	43, 48, 49, 59, 60, 61, 62		-		**7**
T_{8LD4}	-	44, 45, 47, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 64	2	-	X	**13**
$Total_2$	36	28	3	10	1	
Total de Questões						64

Fonte: O autor (2015).

Para construir a análise sobre os dados do quadro acima, evocou-se o mesmo rol de questionamentos aplicados na análise do manual anterior: quais tipos de Tarefas T permanecem nos exercícios e/ou atividades desse capítulo? Existem tipos de Tarefas T, não previstos no tópico da teoria? O bloco do saber justifica as técnicas associadas aos tipos de tarefas T encontrados?

Dessa forma, verificou-se que:

● O T_{5LD4} é o tipo mais privilegiado por aparecer 16 vezes, contemplando a maioria dos blocos de questões;

● O T_{1LD4} é o tipo menos privilegiado por aparecer apenas 05 vezes, notadamente, em um pequeno número de blocos, talvez porque seja considerada pelos autores um conhecimento básico e disponível nos estudantes;

● O bloco ET_m, com 36 questões, agrega a maior quantidade de variedade relativa a todos os tipos de tarefas T, enquanto no RM_m existe apenas uma questão, cujo subtipos anteriores devem estar disponíveis para ajudar na construção da resposta;

● Não foi verificado nos cinco blocos examinados, tipos de tarefas T não previstas no bloco CD_m, atendendo-se, nesse sentido, os objetivos para auxiliar no desenvolvimento da aprendizagem nessas noções.

Com efeito, observou-se que, da mesma forma que na análise do manual anterior, a praxeologia apresentada no Quadro 84 (Cf. p. 353) ressalta no bloco do Saber, [θ/Θ], mudanças complexas e significativas, entre tecnologias relacionadas às teorias $\mathbf{\Theta_{1LD3}}$ e $\mathbf{\Theta_{2LD3}}$ detectada duas vezes, especificamente, entre os tipos de Tarefas $\mathbf{T_{6.1}}_{LD3}$ e $\mathbf{T_{6.2}}_{LD3}$ ($\mathbf{\Theta_{1LD3}} \rightarrow \mathbf{\Theta_{2LD3}}$) e $\mathbf{T_{6.2}}_{LD3}$ e $\mathbf{T_{7}}_{LD3}$ ($\mathbf{\Theta_{2LD3}} \rightarrow \mathbf{\Theta_{1LD3}}$) que visivelmente, espera do estudante o conhecimento prévio e disponível de função inversa associada às noções trigonométricas mencionadas. Mais uma vez, constata-se que a ruptura epistemológica, entre os domínios da geometria e das funções seja o fato para justificar a origem matemática da etiologia das dificuldades de aprendizagem dos estudantes, sempre que se encontrarem em situação de aprendizagem das noções referentes ao Campo Trigonométrico.

Isto posto, tomou-se como um forte indicador para compreender a transição das Funções Trigonométricas EM-ES o processo de transição

intramatemática, cujo resultado destacado foi suficiente para demarcar o **sinal** S_{mC}-05: a duplicidade de mudança entre os *domínios* da geometria plana (Θ_{1LD3}) e a função (Θ_{2LD3}), constituintes do bloco do saber, mesmo cumprindo os papéis de justificar, fundamentar e explicar as suas respectivas tecnologias e técnicas associadas aos tipos de Tarefas relacionados, potencializam o problema da ruptura epistemológica, entre tais campos dificultando a aquisição das informações direcionadas, por meio das noções iniciais das Funções Trigonométricas.

Assim, para tornar possível uma visualização de todos os sinais, encontrados na análise desenvolvida, nesses manuais franceses, reuniu-se no quadro abaixo as principais os principais traços desse mapeamento:

Quadro 86

Mapeamento de Sinais encontrados nos Manuais de Ensino de Matemática (Ensino Secundário) na França.

Referência	**Mapeamento de Sinais nos Manuais do Collège** (MS_{mC}).
S_{mC}-01	A geometria sucede à aritmética (em maior escala, a álgebra), sendo posicionada na última parte dos manuais.
S_{mC}-02	A dose de atividades – medida por meio de (nc) – destinadas a geometria é menor que na aritmética (em maior escala, a álgebra).
S_{mC}-03	Considera-se insuficiente uma única questão (24) para a apropriação da técnica associada τ_{3LD4} e eficiência na continuidade do bloco EA_m.
S_{mC}-04	O bloco do saber, cujos *domínios* são a geometria plana (Θ_{1LD4}) e a função (Θ_{2LD4}), justificam, fundamentam e explicam as suas respectivas técnicas associadas aos tipos de Tarefas encontrados, embora constituam-se em campos epistemológicos distintos e que, nessa análise não foi encontrado um diálogo entre os mesmos, ocasionando, dessa forma, uma ruptura epistemológica imersa e não sensível no processo de ensino e aprendizagem das noções primeiras das Funções Trigonométricas.
S_{mC}-05	A duplicidade de mudança entre os *domínios* da geometria plana (Θ_{1LD3}) e a função (Θ_{2LD3}), constituintes do bloco do saber, mesmo cumprindo os papéis de justificar, fundamentar e explicar as suas respectivas tecnologias e técnicas associadas aos tipos de Tarefas relacionados, potencializam o problema da ruptura epistemológica entre tais campos dificultando a aquisição das informações direcionadas por meio das noções iniciais das Funções Trigonométricas.

Fonte: O autor (2015)..

A apreciação dos dados, do quadro acima permitiu concluir que a geometria é um campo pouco explorado, se comparado à aritmética e a álgebra,

tendo ainda que subsidiar uma transição intramatemática, para superar a ausência do domínio da função, para que as noções de inversão sejam utilizadas em técnicas, cujas tarefas solicitam o cálculo do ângulo. Essas, então, foram consideradas as características das provas documentais para justificar o insucesso da transição EM-ES, já que o EM tem como alicerce o Ensino Fundamental. Nesse sentido, destinaram-se esforços para responder as seguintes questões: Será que no EM, essas características serão preservadas? Como as técnicas relativas ao ensino das Funções Trigonométricas são introduzidas nos manuais franceses desse nível? Como são usadas na resolução dos tipos de Tarefas? Esses manuais conseguem superar as lacunas verificadas nos manuais do Collège?

Na sequência, será apresentada a análise praxeológica, dos manuais franceses, destinados ao Ensino Secundário – o Lycée, cujo objetivo é tentar dar algumas respostas às questões, acima anunciadas a partir do estudo praxeológico.

6.1.2.2 – Manuais de Matemática para o Lycée:

A investigação sobre as praxeologias existentes e relativas, ao *tema* "Funções Trigonométricas", passou a ser aplicada no exame dos livros didáticos (manuais franceses) que estão voltados para o nível intermediário entre o Collège e o Ensino Superior: o Lycée. No Brasil, esse nível de ensino equivale ao Ensino Médio.

Para dar cabo dessa nova tarefa, escolheram-se manuais impressos, pelo fato de não existir, ainda disponível, os equivalentes impressos instituídos pela editora que organizou a coleção *Sésamath.* Assim, escolheu-se o livro impresso considerando que o mesmo estava de acordo com os programas de ensino vigentes na França.

A metodologia para alcançar os objetivos dessa etapa – desenvolver uma análise praxeológica nos manuais do Lycée – foi idêntica a aplicada aos manuais do Collège, sendo privilegiadas, as seguintes características abaixo:

- Identificação do manual;
- Caracterização do manual: linhas gerais;
- Caracterização do capítulo relacionado ao tema: estrutura e objetivos;

- Identificação, classificação e localização dos tipos de tarefas T;
- Análise praxeológica de T;
- Mapeamento de Sinais nos Manuais do Lycée (MS_{mL}).

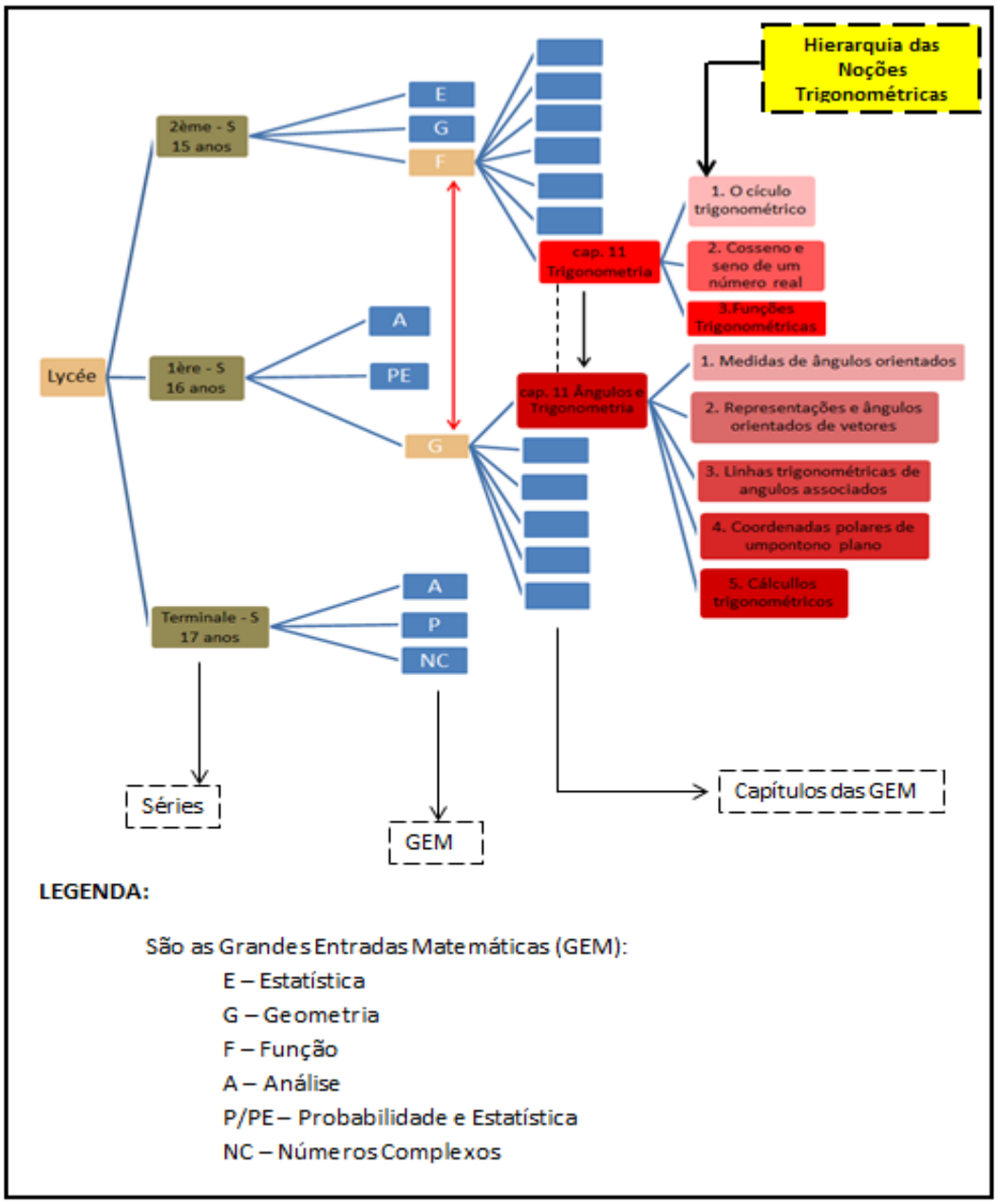
Iniciando-se o processo pela identificação, seguem alguns dados para contribuir com a caracterização do objeto:

Título: *"Déclic Maths"*
Autores: MISSET, L. *et al.*
Editora: *Hachette Éducation*
Ano de publicação: *2011*

Na sequência, segue um esquema inicial das Grandes Entradas Matemáticas, cujo objetivo foi guiar a análise que se segue nesses manuais:

Quadro 87

Esquema dos **"DADOS TRIGONOMÉTRICOS DE ENTRADAS"** por meio dos Manuais do Lycée na França – 2014.



Fonte: O autor (2015).

O quadro acima possibilitou verificar os "genes" iniciais do Campo Trigonométrico, identificando seus domínios matemáticos, bem como uma ideia de sua implementação cronológica, na sala de aula. De pronto, observou-se uma mudança epistemológica entre os domínios iniciais, função e geometria, desenvolvidos nas séries 2ème-S e 1ère-S, respectivamente. No Brasil, tais séries correspondem, reciprocamente, a 1ª e 2ª série do Ensino Médio.

Nesse caso, as GEM – Estatística, Geometria, Função, Análise, Probabilidade e Números Complexos, apresentam suas especificidades bem definidas, embora o *tema* “Funções Trigonométricas” repousem suas técnicas e tecnologias, em teorias bem diferentes.

Essa comprovação, foi suficiente, nesse caso, para não proceder à apreciação de um exame nos sumários, de cada um dos respectivos manuais, associados às essas séries em tela, permitindo apenas, o quão foi resumido a apresentação das noções relativas ao Campo Trigonométrico.

Por conseguinte, entendeu-se como os primeiros sinais:

S_{mL}-01: é mínimo o investimento acerca das noções trigonométricas na circunferência.

S_{mL}-02: as noções da trigonometria na circunferência são alocadas nos blocos finais das GEM.

No entanto, foi necessário aprofundar essas constatações e verificar o quanto de impacto elas teriam após o desenvolvimento das análises praxeológicas, nos manuais *2deS* (para 2ème-S) e *1reS* (para 1ère-S).

6.1.2.2.1 – O Manual de Matemática para a *2deS*.

Todos os manuais de Matemática do Lycée têm anexado após o sumário, o programa oficial de ensino para essa área. Avaliou-se como positiva essa opção por dar, tanto aos professores como aos alunos, a possibilidade de examinar se os conteúdos dos manuais estão de acordo com as expectativas institucionais oficiais. Particularmente, as noções referidas ao Campo Trigonométrico satisfazem essa condição.

No manual em análise, a trigonometria é situada no capítulo 11, sendo apresentada, pela seguinte estrutura:

- Sessão de **TESTES**: 08 tipos de Tarefas que objetivam revisitar e evocar as noções preliminares, de semelhança de triângulos, teorema de

Pitágoras, teorema de Tales, razões trigonométricas (seno, cosseno e tangente), relações entre o triângulo retângulo inscrito num círculo;

- Sessão de **ATIVIDADES**: 02 atividades que agrupam 05 tipos de Tarefas que objetivam introduzir as noções preliminares de círculo trigonométrico. Para tanto, propõe articulação com noções de geometria plana (coordenadas cartesianas de triângulos inscritos em um dado círculo, evocando noções de semelhança de triângulos, teorema de Pitágoras que auxiliará a introdução da propriedade de um círculo de raio unitário); na próxima atividade, vai introduzindo a "retificação" do futuro círculo trigonométrico, noções de distância sobre os pontos desse círculo;

- Sessão de **CURSOS**: refere-se ao momento da exposição matemática do conteúdo. Esses cursos estão divididos em três etapas e são um a um, atrelados à outra sessão denominada de MÉTODO;

- Sessão de **MÉTODOS**: reúnem um conjunto de três a quatro tipos de Tarefas, onde suas respectivas resoluções mostram o passo a passo para explicar os procedimentos envolvidos nas noções da etapa anterior.

De posse dessa dimensão da obra, aplicaram-se as lentes de Chevallard (1998) para identificar e analisar, os tipos de Tarefas listados abaixo que foram, em seguida, organizados no quadro a seguir, a fim de tornar possível a associação de suas respectivas técnicas, tecnologias e teorias.

T_1 : Localizar sobre o círculo trigonométrico os pontos associados aos números reais dados

T_2 : Determinar diferentes medidas de um arco orientado (positivo ou negativo)

T_3 : Efetuar a conversão entre graus e radianos

T_4: Determinar o valor exato cosseno (seno) de um número real

T_5: Encontrar relações entre cossenos e senos correspondentes a partir de um arco orientado (positivo ou negativo)

T_6: Calcular o valor do cosseno (seno, tangente) utilizando a relação trigonométrica fundamental.

T_7: Determinar, aproximadamente, o ângulo ou arco correspondente ao cosseno (seno) dados utilizando uma calculadora.

T_8: Traçar o gráfico de uma senóide (função seno ou cosseno)

$T_{8.1}$: Determinar o sinal dessas funções

$T_{8.2}$: Determinar a amplitude dessas funções

$T_{8.3}$: Determinar valores máximos e mínimos

$T_{8.4}$: Calcular o período dessas funções

$T_{8.5}$: Ordenar e localizar cossenos (senos) de números reais dados

Quadro 88

Praxeologia existente nos tipos de Tarefas T do manual para 2deS.

Bloco do Saber-Fazer: [T/τ]			**Bloco do Saber:** [θ/Θ]	
Tipo de tarefa, T		**Técnica utilizada, τ**	**Tecnologia existente, θ**	**Teoria base, Θ**
T_1		τ_1: demarcar sobre o círculo trigonométrico todos os arcos notáveis (múltiplos de 30° ou de 45°). τ_2: transformar radiano em grau e representando-os por seus nomes correspondentes.	θ_1: Propriedade que associa um ponto do círculo trigonométrico a um par de números reais. θ_2: Relação de equivalência entre radiano e grau.	Função
T_2		τ_3: utilizar o círculo trigonométrico para identificar arcos de mesma origem e mesma extremidade.	θ_3: Definição do círculo trigonométrico sobre o sistema ortogonal. θ_4: Definição de arcos côngruos.	
T_3		τ_4: utilizar a propriedade para converter grau-radiano.	θ_2	
T_4		τ_5: utilizar a propriedade de redução ao primeiro quadrante	θ_4	
T_5		τ_6: utilizar a propriedade de redução ao primeiro quadrante e comparar os resultados.	θ_4	
T_6		τ_7: utilizar a relação trigonométrica fundamental.	θ_5: O teorema de Pitágoras aplicado ao triângulo retângulo inscrito no círculo trigonométrico.	
T_7		τ_8: utilizar a função inversa seno, cosseno ou tangente da calculadora.	θ_6: Propriedade que a composição de uma função com o seu inverso dá a função de identidade.	
T_8	$T_{8.1}$	τ_9: calcular os valores dos ângulos notáveis e observar os sinais da função. τ_{10}: esboçar o gráfico e observar a variação dos sinais.	θ_7: Propriedades das Funções Trigonométricas.	
	$T_{8.2}$	τ_{11}: identificar, por meio das operações de multiplicação ou soma, incrementos de constantes na forma canônica da função. τ_{12}: esboçar o gráfico e observar a variação no eixo das ordenadas.		
	$T_{8.3}$	τ_{11} e τ_{12}		
	$T_{8.4}$	τ_{13}: utilizar a fórmula do período. τ_{14}: esboçar o gráfico e observar o comprimento constante da amplitude horizontal.		
	$T_{8.5}$	τ_{15}: localizar os números reais dados, calcular o cosseno (seno), comparar os resultados e ordená-los.		

Fonte: O autor (2015).

Ao comparar os tipos de Tarefas identificados no quadro acima com as sessões de testes e atividades descritas anteriormente, observaram-se os seguintes sinais:

S_{mL}-03: as noções de semelhança de triângulos e teorema de Tales não serviram de base para que as noções trigonométricas fosse construídas nos manuais do Collège e, apesar disso, também não servem de alicerce para a implementação dos tipos de Tarefas T_1 a T_8 listados acima. Observa-se aqui a ausência de articulação entre os fundamentos da geometria com os da função.

S_{mL}-04: que o bloco do saber é construído sobre um único domínio teórico, as funções, inibindo, dessa forma, a possibilidade de uma ruptura epistemológica.

S_{mL}-05: apesar de ser prevista na tarefa T_3, a relação entre as medidadas de ângulos, grau e radiano, não dispôs de técnicas suficientes para estabelecer com clareza, uma relação funcional entre eles.

Na sequência, foi examinado o manual da série seguinte, o *1re S.*

6.1.2.2.2 – O Manual de Matemática para a 1re S.

Esta obra segue a mesma estrutura que o manual anterior. Dentre os seus 17 capítulos foi identificado o capítulo 14 – Ângulos e Trigonometria, sendo essas noções alocadas no domínio da geometria, especificamente, a geometria vetorial. Nessa, precisa-se escrever um vetor a partir de ângulos orientados que, por sua vez, necessitam da articulação entre medidas lineares e angulares. Dessa forma, recorre-se a trigonometria para descrevê-los. Assim, por exemplo, pode-se entender o ponto P($\sqrt{3}/2$; ½) como sendo P (cos 30°; sen 30°). Nesse sentido, espera-se do estudante a compreensão de que tanto $x_p = \sqrt{3}/2$ como $x_p =$ cos 30° são ambos, representações de números reais.

Tal abordagem vetorial permite o avanço e aprofundamento das Funções Trigonométricas, principalmente, para desenvolver o estudo das equações trigonométricas, bem como da adição e duplicação de arcos (cálculos trigonométricos). Vale ressaltar que os objetivos da geometria vetorial só seriam

alcançados, caso os estudantes tivessem como base os conhecimentos das Funções Trigonométricas disponíveis, estudados na série anterior. Ao longo desse capítulo foram identificados os seguintes tipos de Tarefas:

T_1 : Localizar sobre o círclo trigonométrico um número real a partir de um ângulo orientado.

T_2 : Determinar a medida principal de um ângulo orientado.

T_3 : Determinar a medida principal de um ângulo orientado a aprtir da relação de Chasles.

T_4: Determinar um conjunto de pontos definidos por medidas de ângulos orientados.

T_5: Calcular o cosseno (seno) dado um deles.

T_6: Determinar as coordenadas polares de um ponto sobre o plano.

T_7: Determinar o valor de x em equações trigonométricas do tipo cos x = a ou (sen x = b).

T_8: Determinar a imagem de um ponto por meio de uma rotação.

T_9: Determinar medidas trigonométricas exatas (cosseno ou seno) a partir das fórmulas de adição e duplicação.

A partir desses tipos identificados, procedeu-se a análise praxeólogica a fim, de verificar se o domínio apresentado nos programas oficiais de ensino e, também alocado nesse manual, estaria justificando as tecnologias e técnicas para o desenvolvimento dessas tarefas:

Quadro 89

Praxeologia existente nos tipos de Tarefas T do manual para $1^{re}S$.

Bloco do Saber-Fazer: [T/τ]		**Bloco do Saber:** [θ/Θ]	
Tipo de tarefa, T	**Técnica utilizada, τ**	**Tecnologia existente, θ**	**Teoria base, Θ**
T_1	τ_1: aplicar a definição de medida de ângulos orientados.	θ_1: Definição da localização de um ponto sobre o círclo trigonométrico.	Geometria (vetorial)
T_2	τ_2: aplicar a definição de medida principal de ângulos orientados.	θ_2: Definição e teorema da medida principal.	
T_3	τ_3: utilizar a propriedade vetorial.	θ_3: Relação de Chasles.	
T_4	τ_3		
T_5	τ_4: utilizar a propriedade de cossenos e senos de ângulos associados.		
T_6	τ_5: utilizar a propriedades de coordenadas polares.	θ_4: Definição e propriedade de coordenadas polares	
T_7	τ_4	θ_3	
T_8	τ_5 τ_6: utilizar a propriedade de adição de arcos	θ_5: Propriedade da ligação entre as coordenadas polares e cartesianas. θ_6: Definição de adição de arcos.	
T_9	τ_6 τ_7: utilizar a propriedade de duplicação de arcos	θ_4 θ_7: Definição de duplicação de arcos.	

Fonte: O autor (2015).

Considerando as orientações de Chevallard (1998) por meio da TAD, verificou-se que a Organização Matemática Pontual, em torno das tarefas acima que vislumbram articular as noções das Funções Trigonométricas, às noções vetoriais, percebeu-se que existem poucas variações de técnicas, para o desenvolvimento das tarefas (S_{mL}-06). Isso, de alguma forma, além de limitar o "como ensinar" essa articulação pretendida, também pode, consequentemente, inibir a compreensão do estudante que é orientado a seguir um único caminho.

Além disso, observou-se que as técnicas, bem como as tecnologias sofreram modificações se comparadas às técnicas da praxeologia anterior. Isso ocorreu dado à mudança no domínio para a geometria (vetorial), sendo esse o principal sinal, o S_{mL}-07, verificado nessa etapa da análise.

Em seguida, será apresentada a análise do manual da última série do Lycée, a *Terminale S.*

6.1.2.2.3 – O Manual de Matemática para a *Terminale S*.

Bem como as anteriores, essa obra segue estrutura similar. Ao longo dos seus 16 capítulos não foram identificados tipos de Tarefas que permitam a estruturação de uma Organização Matemática. Essa lacuna está de pronto, confirmada no Quadro 87 (Cf. p. 360).

Outro fato que chamou a atenção foi o descompasso (ou o não cumprimento) do que está previsto no programa oficial de ensino para essa etapa do Lycée que, apesar de não apontar tipos de Tarefas, menciona no Quadro 77 (Cf. p. 337) o conteúdo “Funções seno e cosseno”, consentindo, dessa forma, classificá-lo como pertencente ao domínio das funções (análise).

Tais fatos, além de encurtar essa análise, foi incisivo para a demarcação do sinal S_{mL}-08: ausência de praxeologia referente às noções das Funções Trigonométricas, no manual para a série *Terminale S.*

Com efeito, no quadro seguinte organizou-se um panorama dos sinais, desvelados na análise desenvolvida nos manuais franceses do Lycée:

Quadro 90

Mapeamento de Sinais encontrados nos Manuais de Ensino de Matemática (Ensino Secundário) na França.

Referência	**Mapeamento de Sinais nos Manuais do Lycée** (MS_{mL}).
S_{mL}-01	É mínimo o investimento acerca das noções trigonométricas na circunferência.
S_{mL}-02	As noções da trigonometria na circunferência são alocadas nos blocos finais das GEM.
S_{mL}-03	As noções de semelhança de triângulos e teorema de Tales não serviram de base para que as noções trigonométricas fosse construídas nos manuais do Collège e, apesar disso, também não servem de alicerce para a implementação dos tipos de Tarefas T_1 a T_8 listados acima. Observa-se aqui a ausência de articulação entre os fundamentos da geometria com os da função.
S_{mL}-04	Que o bloco do saber é construído sobre um único domínio teórico, as funções, inibindo, dessa forma, a possibilidade de uma ruptura epistemológica.
S_{mL}-05	Apesar de ser prevista na tarefa T_3 a relação entre as medidadas de ângulos, grau e radiano, não dispôs de técnicas suficientes para estabelecer com clareza, uma relação funcional entre eles.
S_{mL}-06	Considerando-se as orientações de Chevallard (1998) por meio da TAD, verificou-se que a Organização Matemática Pontual, em torno das tarefas acima que vislumbram articular as noções das Funções Trigonométricas às noções vetoriais, percebeu-se que existem poucas variações de técnicas para o desenvolvimento das tarefas.
S_{mL}-07	Observou-se que as técnicas, bem como as tecnologias sofreram modificações se comparadas às técnicas da praxeologia anterior. Isso ocorreu dado à mudança no domínio para a geometria (vetorial).
S_{mL}-08	Ausência de praxeologia referente às noções das Funções Trigonométricas no manual para a série *Terminale S.*

Fonte: O autor (2015).

Ao refletir sobre os 08 sinais destacados acima, verificou-se como positivo apenas o S_{mL}-05. Por outro lado, observa-se sob as lentes de Chevallard (1998) que é por meio do bloco saber-fazer que se estabelece as conexões entre o saber (sábio). E, quando as técnicas ativadas, para os tipos de Tarefas, não são amplamente variadas, torna-se pouco provável que a compreensão das diversas camadas da Organização Matemática relativas as noções das Funções Trigonométricas, se estabeleça a contento, por meio da aprendizagem matemática dos estudantes.

Além disso, os outros 07 sinais não contribuem para fundamentar o mergulho, por meio das noções vetoriais, para aprofundar os conhecimentos

relativos à adição e duplicação de arcos, cujas articulações carecem de conhecimentos, no nível disponível das noções em tela.

Desta forma, conclui-se que, uma das causas para que o processo de transição EM-ES, por meio desses manuais, se dá por meio das rupturas percebidas e destacadas no conjunto dos sinais do quadro acima, ocasionando, dessa maneira, o prejuízo na aprendizagem dos estudantes, que ingressam na universidade para cursar a disciplina Cálculo I.

Ainda assim, decidiu-se investigar em outras fontes documentais – as macroavaliações – alguns aspectos para amalgamar as provas que foram encontradas até essa etapa da pesquisa.

Isto posto, utilizou-se as seguintes questões para conduzir a análise nesse novo tipo de documento: Qual o Nível de Funcionamento do Conhecimento (NFC), segundo Robert (1997, 1998), encontrado nas macroavaliações institucionais francesas? Quais são os tipos de Tarefas associada(s) às noções de Funções Trigonométricas? Esses tipos de Tarefas estão previstos nos: (a) Programas Oficiais de Ensino de Matemática da França? (b) Manuais do Lycée?

No próximo item, será desenvolvida a praxeologia nas macroavaliações francesas, destinadas ao ingresso no Ensino Superior, objetivando responder as provocações elucidadas acima.

6.1.3 – Análise das Macroavaliações de Matemática

Na França, o sistema de macroavaliações que servem para validar os conhecimentos dos estudantes do Lycée, para a entrada na universidade é denominado de BAC – BACCALAURÉAT, cuja tradução e significado remetem ao antigo vestibular brasileiro, substituído em muitas universidades do Brasil pelo atual ENEM – Exame Nacional do Ensino Médio. Dessa forma, ambos os exames apresentam características semelhantes, principalmente, por representarem um avaliação nacional. Outra característica importante do BAC está representada pelo diploma nacional, que certifica a conclusão dos estudos secundários.

O BAC, baseado nas modalidades do ensino francês, é direcionado conforme a área de conhecimento escolhidas pelos estudantes. Estão disponíveis três tipos desse exame: geral, tecnológico e profissional. Nesse sentido, atendem as seguintes expectativas:

- BAC geral: voltados para os estudantes que pretendem ingressar na vida universitária. É composto por questões que buscam investigar o nível cultural estabelecido no Lycée, sendo essas reclassificadas por três partes: BAC econômico e social, BAC literário e BAC científico.
- BAC tecnológico: direcionado para os alunos que pretendem continuar os estudos no nível superior ou para ingressar no mundo do trabalho. Está subdividido em oito campos: ciências e tecnologia da saúde e do social, ciências e tecnologia da indústria e do desenvolvimento, ciências e tecnologias de laboratório, ciências e tecnologias de agronomia e vida, hotelaria, técnicas da música e da dança, ciências e tecnologias do designer e das artes aplicadas.
- BAC profissional: para todos os concludentes do Lycée que objetivam ingressar rapidamente no mercado de trabalho, sendo dessa forma, conduzidos para um ensino técnico.

Neste rastreamento, aplicou-se como conduta metodológica o recrutamento e análise das questões descritas, ao final do item anterior, para auxiliar no levantamento dos últimos BACs, disponíveis à época da realização dessa atividade científica. Assim, investigaram-se os exames dos anos 2009, 2010, 2011, 2012 e 2013[79].

Como resultado desse levantamento, acusa-se a ausência de tipos de Tarefas, que estejam relacionadas às noções das Funções Trigonométricas. Tal resultado impossibilitou uma análise que identificasse o NFC, que está presente no exame, sendo esse, também, elemento de indicadores para selecionar os estudantes do nível secundário.

[79] Esses exames se encontram disponíveis em: <http://www.bankexam.fr/etablissement/4-Bac-S/1159-Mathematiques>

Além dessas implicações, vale a pena destacar que a ausência das noções das Funções Trigonométricas, em cinco anos consecutivos do exame, demonstra o quão pouco significativo estas parecem ser, para a entrada na universidade. Dessa forma, esse aspecto constitui-se, por exemplo, como uma diferença significativa, no estudo comparativo entre o Brasil e a França para analisar a transição EM-ES.

Dado como concluída essa etapa, passou-se para a análise institucional, via os documentos oficiais, do Ensino Superior francês, que constitui o segundo lado da transição do Ensino das Funções Trigonométricas EM-ES, aqui compreendida como uma transição vertical.

6. 2 – Ensino Superior

6.2.1 – Análise dos Documentos Oficiais (Programas de Ensino)

Na França, a entrada para o Ensino Superior está inicialmente alicerçada no BAC e seus subtipos. Nesse sentido, o objetivo inicial era analisar os programas oficiais de ensino, da disciplina Cálculo I de um Curso de Licenciatura em matemática de uma universidade pública. No entanto, durante os primeiros contatos para a compreensão do sistema universitário francês, verificou-se que não existe essa disciplina nos currículos investigados e disponíveis na internet. Além disso, as licenciaturas direcionadas para as ciências exatas (Licenciatura em Ciências, Tecnologias, Saúde e Matemática) estão organizadas, de forma que os três primeiros anos são comuns, a todas essas áreas. Dessa forma, os alunos específicos da Licenciatura em Matemática só seriam encontrados no 6º semestre, cujo primeiro contato com a disciplina, que mobiliza os conhecimentos iniciais do cálculo diferencial e integral estariam disponíveis.

No entanto, esses estudantes já estariam mais adaptados, se comparados aos do primeiro semestre, com a vida na universidade, podendo dessa forma, influenciar nos resultados desejados.

Por esses motivos, decidiu-se eleger outros critérios para desenvolver essa etapa da investigação, sendo eles: primeiro, que as noções referentes ao cálculo diferencial e integral sejam apresentados por alguma disciplina, do primeiro

semestre, pois é nele que se estabelece o contato inicial da transição EM-ES; segundo, a participação – caso houvesse necessidade para refinar os dados iniciais – de pessoas voluntárias, tanto professores como alunos, para aplicação de entrevistas e resolução de exercícios relativos às noções em análise.

De posse dessas duas condições, foi selecionado os Cursos de Engenharia do INSA (Instituto Nacional de Ciências Aplicadas) da Universidade Claude Bernard Lyon I (UCBL I) que, por sua vez, propiciou ocasionalmente, outra característica para facilitar, naquele momento, a análise comparativa entre Brasil e França: a presença de estudantes brasileiros da UNESP/Campus Guaratinguetá, matriculados no Programa Ciências sem Fronteiras.

Esse achado conduziu a presente investigação a buscar informações acerca dos documentos oficiais de ensino, com o Prof. Dr. Guy ATHANAZE, Vice-Presidente do Comitê de Educação e Coordenador da área de Matemática do INSA. Não sendo prevista no itinerário dessa pesquisa, mas avaliada como necessária, procedeu-se uma entrevista semiestruturada[80] com o referido professor, também responsável pelos estudantes franco-latinos que participavam do referido programa de cooperação internacional de forma que 50 eram franceses, 31 latinos e 19 brasileiros.

Como resultado do encontro inicial, obteve-se uma compreensão de como está estruturado os documentos oficiais nesse instituto. Segundo o Prof. ATHANAZE, os planos de ensino das disciplinas ofertadas não se constituem em uma exigência oficial, tendo apenas que considerar os programas informados pela instituição estão disponíveis no endereço: <http://www.insa-lyon.fr/>. Nesses planos, buscaram-se elementos para responder as seguintes questões: Quais os tipos de Tarefas podem ser consideradas para abordar as noções de Funções Trigonométricas? Caso existam, as técnicas utilizadas no EM, estas são evocadas para a resolução de problemas com essas mesmas noções? O discurso tecnológico em torno das noções de Funções Trigonométricas foi ampliado?

Passou-se a analisar o programa disponibilizado, cuja disciplina denominada de Matemáticas é identificada pelo código PC-1-AM-MA. No rol de conteúdos, não foi verificado a existência de tipos de Tarefas que se referissem às

[80] Vide Anexo 01.

noções das Funções Trigonométricas o que implicou, na sequência, na nulidade dos outros questionamentos. No entanto, desconfiou-se que o quarto item dessa lista de conteúdos – Funções de uma variável real[81] – bem como em alguns dos seus subitens, coexistam tais noções.

Dessa forma, foi infrutífero o desenvolvimento de uma análise praxeológica, o que impediu a compreensão da estruturação do ensino das noções das Funções Trigonométricas no Ensino Superior, via os programas de oficiais de ensino considerados.

Pode-se, assim, entender como um sinal, S_{pESuF}-01, pinçado desse contexto, que tais noções não são consideradas importantes para o desenvolvimento das noções relativas ao Cálculo Diferencial e Integral no Ensino Superior francês.

6.2.2 – Análise dos Livros Didáticos de Cálculo (Manuais)

Para analisar as praxeologia existentes e direcionadas ao *tema* "Funções Trigonométricas" nos manuais do Ensino Superior, também se utilizou das informações oriundas da entrevista com o Prof. ATHANAZE que, apesar de sugerir algumas fontes bibliográficas, disponibiliza para os estudantes uma brochura concebida por ele mesmo, nos idiomas francês, espanhol e português.

Essa apostila *(manual)* apresenta as seguintes características:

> **Título**: *"Matemática Primeiro ano AMERINSA Versão Portuguesa"*
> **Autores**: Guy ATHANAZE
> **Editora**: *INSA LYON*
> **Ano de publicação**: *2012-2013*

Segundo esse professor, nesse material estão contidas, de uma forma resumida, todas as informações necessárias para o desenvolvimento da disciplina denominada de Matemáticas.

Nessa apostila preparada por ele, das 434 páginas, apenas sete apresentam noções no que se referem ao Campo Trigonométrico, contendo

[81] Traduzido do original: *"Fonctions d'une variable réelle"*

basicamente: fórmula de adição, transformação de produto em soma, transformação de soma em produto, resolução de equação *a*.cos *x* + *b*.sen *x* = *c*, expressão de cos θ, sen θ, tg θ em função de t = tg (θ/2).

Com efeito, verificou-se que essas noções representam uma etapa mais aprofundada das Funções Trigonométricas e que, mesmo assim, não foram encontradas em termos de tipos de Tarefas que, caso existissem, auxiliariam no desenvolvimento de uma análise praxeológica, para que fosse compreendido como foi estruturada a Organização Matemática em torno das noções das Funções Trigonométricas (S_{mESuF}-02). Alguns tipos de Tarefas identificados reportam-se para a abordagem vetorial, com articulação ao campo dos números complexos e, nesse sentido, se distanciam dos objetivos iniciais da presente pesquisa, tal como foi constatado no S_{pESe}-06 nos programas do Lycée.

6.2.3 – Análise das Macroavaliações de Matemática (Exames)

Nessa fase da investigação, objetivou-se desenvolver uma análise das expectativas institucionais dos estudantes, que também podem ser compreendidas como as relações pessoais esperadas sobre o ensino e aprendizagem das noções das Funções Trigonométricas no Ensino Superior. No entanto, em um dos momentos da entrevista com o Prof. Guy ATHANASE, foi esclarecido que esse tipo de avaliação não consta nas políticas públicas da educação francesa.

Essa informação gerou uma nova lacuna, para tornar possível o desenvolvimento da análise que se pretendia. Assim, o S_{maESuF}-03, demarca a inexistência de praxeologia, para auxiliar na compreensão das relações pessoais esperadas para o ensino e aprendizagem das noções das Funções Trigonométricas no Ensino Superior francês.

Ao final das análises nos documentos disponíveis na amostra selecionada para o Ensino Superior francês, reuniram-se no quadro a seguir, os sinais encontrados nos programa de ensino, apostila (manual) e macroavaliações que possibilitaram mapear e compreender como são tratadas as noções relativas às Funções Trigonométricas:

Quadro 91

Mapeamento de Sinais encontrados nos Documentos Oficiais de Ensino de Matemática (Ensino Superior) na França.

Referência	**Mapeamento de Sinais nos Documentos Oficiais do Ensino Superior francês a partir do INSA (UCBL I):** $MS_{DOESuF.}$
S_{pESuF}-01	As noções das Funções Trigonométricas não são consideradas importantes para o desenvolvimento das noções relativas ao Cálculo Diferencial e Integral no Ensino Superior
S_{mESuF}-02	Não foram encontradas em termos de tipos de Tarefas para auxiliar no desenvolvimento de uma análise praxeológica que permitisse compreender como foi estruturada a Organização Matemática em torno das noções das Funções Trigonométricas.
S_{maESuF}-03	A inexistência de praxeologia para auxiliar na compreensão das relações pessoais esperadas para o ensino e aprendizagem das noções das Funções Trigonométricas.

Fonte: O autor (2015).

Com esses dados, tornou-se possível finalizar a análise institucional na França para compreender como se desenvolve a transição do ensino das Funções Trigonométricas EM-ES. Tal processo de transição foi concebido como vertical, cuja análise comparativa entre o Ensino Secundário e Ensino Superior será descrita no item seguinte.

6.3 – Transição do Ensino das Funções Trigonométricas Ensino Secundário-Ensino Superior na França.

Nessa fase da análise, denominada vertical, exigiu-se que algumas informações fossem retomadas. Dentre elas, um esquema do trabalho desenvolvido:

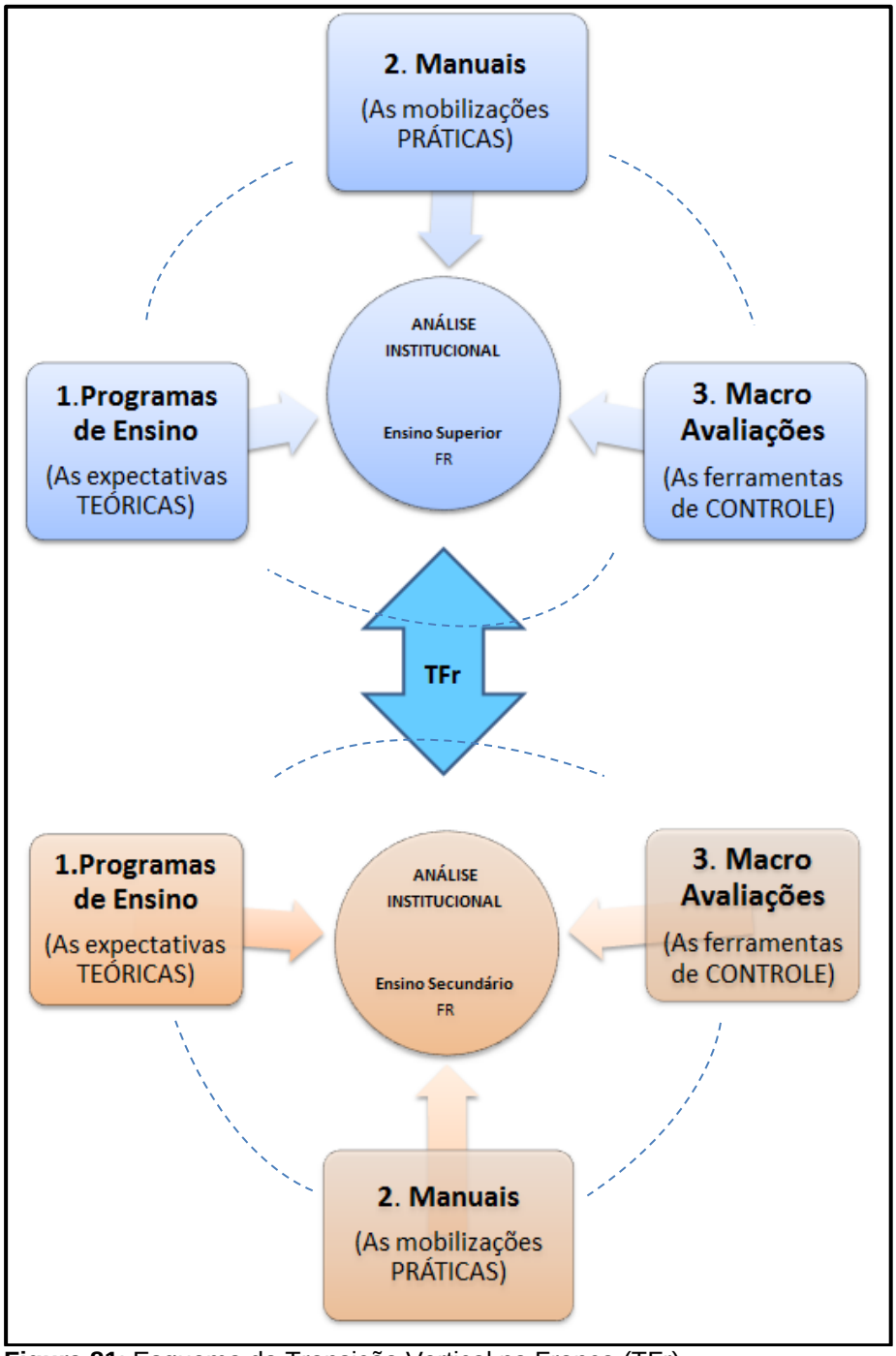


Figura 81: Esquema da Transição Vertical na França (TFr).
Fonte: O autor (2015).

Além dessa figura, o próximo quadro mostrará quais documentos oficiais e níveis de ensino foram encontrados e analisados na França:

Quadro 92

Levantamento dos Documentos Oficiais de Ensino de Matemática no sistema francês de educação.

Documentos Oficiais	Ensino SECUNDÁRIO		Ensino SUPERIOR
	Collège	Lycée	
Programas de Ensino	P	P	P
Manuais	P	P	P
Macroavaliações	∄	P	∄

Fonte: O autor (2015).
Legenda: P = possível; ∄ = Não Existe.

Esse mapeamento permitiu identificar que a comparação entre o Ensino Secundário e Ensino Superior só foi possível por meio dos programas de ensino e dos manuais. Nesse sentido, a comparação por meio do cruzamento[82] dos dados obtidos nos Quadros 75 e 76 (Cf. p. 337-338), referentes aos programas de ensino francês, indicou a prevalência da mudança entre os domínios matemáticos geometria e função, para abordar as noções trigonométricas iniciais, seno e cosseno, quando eram articuladas as noções de ângulos e a noção de número real, respectivamente.

No que se refere aos manuais do Collège, os sinais S_{mC}-04 e S_{mC}-05, principalmente, ratificam que a mudança entre os domínios da geometria e da função, não é mobilizada por meio de organizações matemáticas que busquem ajustar a ruptura epistemológica identificada no estudo das noções das Funções Trigonométricas. Provas encontradas nos manuais do Lycée, sinais S_{mL}-03, S_{mL}-04 e S_{mL}-07, primordialmente, corroboram a continuidade da ruptura identificada, cujo prejuízo é silenciosamente conduzido para o Ensino Superior.

Por sua vez, o Ensino Superior não considera importante os conhecimentos relativos às noções das Funções Trigonométricas, via S_{pESuF}-01, que parte do princípio estarem disponíveis para implementar, o aprofundamento das mesmas por meio das articulações entre geometria vetorial e números complexos, para a abordagem das noções relativas ao cálculo diferencial e integral, sobretudo, quando determinados tipos de Tarefas exigem a aplicação dessas articulações, para a compreensão da fórmula de Euler que definiu as Funções Trigonométricas como

[82] Vale ressaltar que, conforme definição de Chevallard e Grenier (1997), é a partir do cruzamento dos dados que se torna possível alcançar os objetivos de uma pesquisa documental.

sendo $sen\ z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$, $cos\ z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$ e $e^z = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n$, conforme kennedy (1992), apresentado no capítulo IV.

Com efeito, vale ainda lembrar que tanto nos trabalhos de Lobo da Costa (1997), Silva (2005), Ribeiro (2011), Miashiro (2013) e Fonseca (2002), destacados no capítulo I, as relações **R_{DM6}**, **R_{DM7}**, **R_{DM10}**, **R_{DM15}** e **R_{DM17}**, respectivamente, apontaram fragilidades relativas ao desenvolvimento epistemológico das Funções Trigonométricas que, por esse motivo, contribuíam com a etiologia das causas das Dificuldades de Aprendizagem Matemática.

Por sua vez, considerando-se as investigações de Gueudet (2008a) apresentadas no capítulo II, observou-se que estão imersas e cristalizadas nos trabalhos mencionados acima, as características que prevaleceram no estudo da Álgebra Linear e continuam prevalecendo no campo das Funções Trigonométricas, sobretudo, no que se refere às dificuldades dos estudantes apontadas no Quadro 21 (Cf. p. 88), carecerem de dificuldades intrínsecas, relacionadas ao estudo epistemológico, inicialmente.

Nesse sentido, tanto na Álgebra Linear verificado por Gueudet (2008a), como na presente pesquisa, identificado pelos marcadores *DAMFT* do capítulo I, o caráter abstrato das noções das Funções Trigonométricas, impulsionados pela abordagem dedutiva, corrobora para reforçar as rupturas epistemológicas de ambos os campos da Matemática, sempre que desconsideram as possíveis e naturais articulações com a geometria. Por esse motivo, Gueudet (2008a) recomenda que, apesar de não existir uma abordagem epistemológica, capaz de destacar todos os aspectos de qualquer noção Matemática, tenha-se, ao menos que considerar alguns desses. E, para tanto, a pesquisadora recomenda uma cuidadosa e exaustiva revisão, em equipe, sobre uma bibliografia específica ao tema selecionado.

Isto posto, entendeu-se respondida a questão de pesquisa Q1 que, mesmo não sendo descrita objetivamente, vale-se das ponderações articuladas na redação dos parágrafos anteriores.

No próximo capítulo, será apresentada uma análise neurocognitiva acerca do Nível de Funcionamento do Conhecimento, dos estudantes do Ensino Superior,

referentes às noções matemáticas em tela, fundamentando-se nas orientações para a formação, aquisição e evocação da Memória de Longo Prazo.

CAPÍTULO VII

Análise Neurocognitiva: possibilidades de articulação entre o Nível de Funcionamento do Conhecimento e a Memória de Longo Prazo por meio de tipos de Tarefas relativas às noções das Funções Trigonométricas do Ensino Médio supostamente disponíveis no Ensino Superior.

Considerações iniciais

O objetivo geral dessa análise neurocognitiva foi responder a questão de pesquisa Q2, a saber: A institucionalização de atividades matemáticas baseadas nos princípios da Neurociência Cognitiva pode auxiliar no processo de neutralização da ruptura na transição do Ensino de Funções Trigonométricas do EM-ES? Para tanto, considerou-se os resultados das análises institucionais desenvolvidas no Brasil e na França, que desvelaram as possíveis causas dessa ruptura apontando, principalmente, a mudança de domínios entre a geometria e função – denominada de ruptura epistemológica – que, ao mesmo tempo, impulsionou a mobilização das demais.

As reflexões em torno Q2, auxiliou supor que, por hipótese (H2), o ensino das Funções Trigonométricas tanto no EM, como no ES não leva em conta tais princípios que, conforme, Kandel (1991), primordialmente, constituem a base celular e molecular da cognição, lócus do fenômeno aprendizagem.

Percebidos como um conjunto de condições necessárias, mas que seguem na contramão dos resultados esperados para ambas as etapas escolares, na medida em que, por hipótese, não são considerados, esses princípios se articulados aos Níveis de Funcionamento de Conhecimento (NFC) de Robert (1997, 1998), permitiram auxiliar na concepção, estruturação, disposição e apresentação de tipos de Tarefas, voltadas para as noções de Funções Trigonométricas, favorecendo os estudantes entrarem em Atividade Matemática de forma mais eficaz e eficiente.

Para verificar a ocorrência dessa possibilidade, foi necessário desenvolver um protocolo experimental de pesquisa, a fim de mobilizar a Atividade Matemática nos estudantes do Ensino Superior, por meio das noções de Funções

Trigonométricas, que representavam conhecimentos prévios, supostos disponíveis desenvolvidos no Ensino Médio.

Sob o ponto de vista da Didática da Matemática, esses protocolos foram organizados a partir de três tarefas, levando-se em conta: a análise epistemológica, segundo Artigue (1996), descrita no capítulo IV, os NFC de Robert (1997, 1998) e, também, as orientações de Artigue (1998) para constituir a análise a priori dessas tarefas, essencial para auxiliar no exame das respostas dos estudantes.

Sob o ângulo da Neurociência Cognitiva, considerou-se apenas a função cognitiva Memória de Longo Prazo, princípio P_5(NC) apresentado no capítulo III, pelo fato de ser, na ocasião e condições favoráveis a essa pesquisa, a função mais viável para ser verificada e, também, por repousar nessa, o amálgama dos princípios anteriores. Dessa opção, resultaram dois tipos de protocolos experimentais sendo a diferença entre eles, protocolos “A” e “B”, a apresentação de um estímulo sensorial dado.

Somando-se as perspectivas acima, objetivou-se responder a questão Q2, sendo necessário, para tanto, recorrer ao seguinte procedimento metodológico de aplicação:

Primeiramente, esses protocolos foram aplicados na cidade de Lyon (FR) a um conjunto (Grupos A e B), singular de estudantes universitários: formado por alunos brasileiros e franceses que fazem parte de um projeto de intercâmbio entre o Brasil e a França gerenciado pelo INSA Lyon. Residiram sobre essa amostra os resultados conclusivos da análise em tela.

No entanto, numa segunda oportunidade, aplicou-se também o mesmo protocolo para estudantes, unicamente brasileiros de duas universidades distintas (UD1 e UD2), respectivamente, em turmas de Licenciatura em Matemática e Engenharia na UD1 e, exclusivamente em uma turma de Engenharia da UD2.

O propósito dessa segunda aplicação foi, tão somente, fazer uma breve estatística dos resultados, sem fazer as mesmas considerações teóricas dispensadas ao grupo de Lyon, que sofreram influências culturais por participarem da experiência, consequentemente, desenvolvendo estratégias particulares de adaptação, que influenciaram nos resultados (dados numéricos), quando

comparados ao segundo grupo (sem intercâmbio). Essa comparação permitiu também observar a evolução das relações pessoais dos estudantes, considerando-se, inclusive a aquisição de novos hábitos de vida, de cultura, anteriormente previstos por Artigue (2004).

Com efeito, buscou-se observar os seguintes aspectos:

- identificação de objetos não ostensivos na MLP (existência de conhecimentos matemáticos prévios supostos disponíveis);

- Verificação de manipulação de objetos ostensivos articulados aos não ostensivos evocados, caso existam (relação pessoal existente);

- observação das dificuldades de aprendizagem (DAMFT) existentes;

Na sequência, foram apresentados os elementos constituintes dessa análise.

7.1 – Elementos da Didática da Matemática:

7.1.1 – Considerações da análise epistemológica (C_{AE}):

De acordo com a Figura 31 (Cf. p. 199), as noções de Funções Trigonométricas revisitadas, ampliadas e aplicadas pelo Ensino Superior, repousam sobre o estudo da Trigonometria Plana Analítica Circular apresentadas, inicialmente, no Ensino Médio.

Nesse estudo, as noções de seno e cosseno, por exemplo, passam a ser compreendidas, por meio do conjunto dos números reais, cuja principal unidade de medida relacionada para medir ângulos são os radianos. Nesses termos, faz-se necessário dispor, hierarquicamente, dos seguintes conhecimentos prévios:

(1) definição de radiano como unidade de medida de ângulos (arcos) de uma circunferência;

(2) definição de círculo (circunferência) trigonométrico (a);

(3) relação de equivalência entre ângulo e arco de uma circunferência trigonométrica: arco (AB) de 360° ≡ arco (AB) de 2π.rad ou arco (AB) de 180° ≡ arco (AB) de π.rad;

(4) definição de seno e cosseno como números reais, inicialmente.

(5) definição e propriedades da função seno ou função cosseno como função real de variáveis reais que associa a cada número real x o valor real sen x ou cos x, ou seja:

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad x \to f(x) = \text{sen } x \qquad \text{ou} \qquad f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad x \to f(x) = \cos x$$

7.1.2 – Considerações dos NFC (C_{NFC})

Em conformidade com a teoria apresentada no capítulo III, de acordo com Robert (1997, 1988), existe uma hierarquia natural entre os Níveis de Funcionamento do Conhecimento (NCF), a saber:

(1) NT – Nível Técnico: corresponde à aplicação imediata de teoremas, propriedades, definições, fórmulas, etc, na resolução de uma tarefa: **Tarefa A**.

(2) NM – Nível Mobilizável: obedece a um funcionamneto mais amplo que o NT por meio de aplicações simples em que as propriedades sejam inseridas uma de cada vez, de forma que o que se questiona esteja explicitadamente descrito: **Tarefa B**.

(3) ND – Nível Disponível: o aluno deve ser capaz de resolver o que lhe é oferecido sem nenhuma indicação, descobrindo por si mesmo o conhecimento necessário para resolução da tarefa: **Tarefa C**.

7.1.3 – Considerações sobre a escolha das tarefas (C_{ET})

Para a seleção das três tarefas constituintes dos protocolos experimentais, buscou-se adaptar tarefas que atendessem as considerações C_{AE} e C_{NFC}, descritas anteriormente. Dessa forma, obteve-se:

Tarefa A: Diga se cada uma das afirmações seguintes é verdadeira ou falsa e justifique:

a) Como $\frac{\pi}{8} < \frac{\pi}{6}$, $\cos(\frac{\pi}{8}) < \cos(\frac{\pi}{6})$

b) Como $\frac{\pi}{8} < \frac{\pi}{6}$, $\sin(\frac{\pi}{8}) < \sin(\frac{\pi}{6})$

c) Como $\frac{2\pi}{3} < \frac{11\pi}{12}$, $\cos(\frac{2\pi}{3}) < \cos(\frac{11\pi}{12})$

d) Como $\frac{2\pi}{3} < \frac{11\pi}{12}$, $\sin(\frac{2\pi}{3}) < \sin(\frac{11\pi}{12})$

Tarefa B: Determine o período da função *g(x) = 2 cos x – cos (5x + 1).* Justificar.

Tarefa C: Foi construído com hastes de metal um losango articulado de lado igual a 6 cm. Denominou-se de ABCD esse losango e α o ângulo BÂD.

a) Estude as variações de área desse losango em função do ângulo α.

b) Para que valor de α a área do losango é máxima? Justificar.

7.1.4 – Considerações da análise a priori (C_{AaP}):

Cabe esclarecer que tal análise, baseou-se em alguns dos princípios instituídos por Artigue (1998), a saber:

(1) Identificação de métodos, técnicas ou estratégias (não ostensivos evocados) de resolução de cada tarefa;

(2) Definição dos conhecimentos matemáticos prévios relacionados (ostensivos manipulados), supostos disponíveis;

(3) Previsão das possíveis dificuldades que os estudantes poderão apresentar diante do confronto com a tarefa em jogo.

Caso da **Tarefa A**:

(1) No círculo trigonométrico, as relações são visíveis imediatamente, tendo o estudante, apenas que demarcar os reais dados sobre o mesmo. Neste caso, a relação entre graus e radianos pode facilitar a localização dos reais. Se os

estudantes utilizarem as representações gráficas de funções, é necessário traçar as duas funções e identificar as abscissas correspondentes aos reais dados. Neste caso, a relação entre graus e radianos não fornece nenhuma ajuda. Pode-se, então, supor que o Grupo A de estudantes, que vai funcionar sem o estímulo sensorial, na forma de círculo trigonométrico, irão, principalmente, usar representações gráficas e será mais difícil para localizar as abscissas, enquanto o outro Grupo B que usaram o estímulo, servindo-se das relações entre graus e radianos para localizar os reais dados.

(2) São esperados os conhecimentos matemáticos prévios supostos disponíveis: ***não ostensivos*** – noção de medidas de ângulos e arcos; relação entre graus e radianos; definição de seno e cosseno como números reais; ***ostensivos escriturais*** *(algébricos)* – relativos às propriedades de conversão de graus em radianos e de radianos em graus e, também as operações consideradas fundamentais e disponibilizadas pela Educação Básica.

(3) É possível existir as seguintes dificuldades dos estudantes: estabelecer a diferença entre graus e radianos; estabelecer a articulação entre as medidas de arcos e números reais; reconhecer os eixos dos senos e cossenos para determinar os números reais dados (sob a forma de radianos).

Caso da **Tarefa B**:

(1) Como modelo matemático concebido para a compreensão de fenômenos ondulatórios, decorrente de suas repetições (principal propriedade), as Funções Trigonométricas gozam dessa característica, decorrendo do círculo trigonométrico, as principais relações imediatamente visíveis, sendo esperado dos alunos as ariticulações e movimentações dos números reais, dados sobre o mesmo. Neste caso, a consolidação da relação entre graus e radianos, no domínio das funções, pode ajudar a visualizar os vários modos de “deformação” da circunferência trigonométrica, a partir do modelo algébrico dado. Caso os estudantes recorram às representações gráficas da função cosseno, faz-se necessário esboçar também o gráfico da função $g(x)$ dada, considerando, para tanto, a construção de uma tabela de valores e uma calculadora científica para auxiliar nos cálculos. Outra alternativa, seria inserir, na definição de período, o desdobramento da soma de arcos, indicado na segunda parcela da função $g(x)$. No primeiro caso, a relação entre grau e radiano

é fundamental para desenhar os gráficos. Contudo, no segundo, a mesma relação já está consolidade e embutida no algebrismo esperado e, por esse motivo, não favorece contribuições. Dessa forma, foi possível supor que no Grupo A os estudantes, cujo estímulo sensorial foi subtraído, optarão pela manipulação dos ostensivos escriturais (algébrico-trigonométricos) sem utilizar representações gráficas e será mais difícil lembrar-se dos mecanismos de resolução. Contrariamente, no Grupo B, cujo estímulo sensorial foi dado, recorrerão às possíveis memórias armazendas, visualizando esboços dos gráficos equivalentes e, ao mesmo tempo, articularão as possíveis deformações sofridas por $g(x)$ motivadas pela expressão algébrica-trigonométrica associada aos gráficos visualizados, auxiliando a evocação dos não ostensivos necessários, bem como a manipulação dos ostensivos escriturais que funcionaram como "artifícios[83]" em busca da solução.

(2) São esperados os conhecimentos matemáticos prévios supostos disponíveis: ***não ostensivos*** – relação entre graus e radianos; definição de seno e cosseno como números reais; definição de círculo trigonométrico; definição de função cosseno, $f(x) = \cos x$, como função real de variáveis reais que associa a cada número real e das propriedades associadas; definição de periodicidade em senoides; ***ostensivos escriturais*** *(algébricos)* – relativos às propriedades das Funções Trigonométricas (adição de arcos) e, também as operações fundamentais disponibilizadas pela Educação Básica.

(3) É possível existir as seguintes dificuldades dos estudantes: lembrar-se da definição de período, para as Funções Trigonométricas; estabelecer a articulação entre a definição de periodicidade a partir da função simples $f(x) = \cos x$ e a função $g(x)$ *dada*; calcular o valor numérico do seno e cosseno de números reais sob a forma de radianos; aplicar as técnicas relativas às propriedade de adição de arcos; manipular propriedades e operações fundamentais apresentadas na Educação Básica.

Caso da **Tarefa C**:

[83] Cabe esclarecer que, tais artifícios, são esperados para resolver os problemas de indeterminação relativas as noções de limites na disciplina Cálculo I do Ensino Superior, devendo esses, estarem disponíveis na Memória de Longo Prazo dos estudantes dessa etapa de ensino.

(1) A figura dada é um losango com o ângulo α variável. Isto é para estudar as variações da sua área pode ser expressa por $S(\alpha) = \ell^2 \sin(\alpha)$, onde ℓ é o comprimento do lado do losango. A instrução é dada repousa sobre o domínio da geometria e nada indica a utilização da função seno na resolução do problema. Então, essa tarefa está aqui para mobilizar o conhecimento de seno como relação de comprimento em um triângulo retângulo (discutido no Ensino Médio, caso do Brasil e no Ensino Fudamental, caso da França) que deverá estar disponível para resolver o problema. A partir da expressão de área $S(\alpha)$, torna-se fácil estudar as variações da função associada, partindo-se da representação gráfica da função sen (x), bem como a partir do círculo trigonométrico. O estudo da função precisa considerar os valores de α em radianos, as articulações entre grau e radiano devem estar estabelecidas, porque a instrução dada não está fundamentada no domínio geométrico e α representa um ângulo (a princípio em graus). Por suposição, os estudantes do Grupo A (sem o estímulo sensorial – círculo trigonométrico), irão calcular a área do losango que permitirá a introdução das noções trigonométricas (cosseno, principalmente), para a determinação das medidas das diagonais do mesmo, auxiliando o estudo das variações de área em função do ângulo α. O resultado da área em termos de $S(\alpha)$ conduzirão os alunos ao cálculo da área máxima, por meio da articulação com a função seno que, para $\alpha = \pi/2$, atinge a altura máxima. De outra forma, os alunos do Grupo B (que usaram o estímulo sensolrial), recorrerão ao entendimento da variação da área solicitada, por meio do esboço dos losangos correspondetes, buscando compreender a variação de área a partir das variações do ângulo α e as propriedades geométricas adequadas. Nesse processo, podem se servir dos *"flashes"* de memória, ativados nos microsegundos, quando direcionam o órgão do sentido visão, para articular as propriedades das Funções Trigonométricas (estudo do sinal, estudo da monotonia – crescimento e decrescimento, pontos de máximo e de mínimo, principalmente). Ativadas, essas memórias podem mobilizar estratégias relativos à manipulação dos ostensivos escriturais, para a confecção de tabela que facilitará as conjecturas resultantes da articulação entre o domínio da geometria e das funções, permitindo aos estudantes responder e estabelecer a relação de dependência entre a área S e o ângulo α, por meio da função seno.

(2) São esperados os conhecimentos matemáticos prévios supostos disponíveis: ***não ostensivos*** – noção de figuras planas – propriedades, perímetro e área; relação entre graus e radianos; noções de trigonometria no triângulo retângulo; noções de Funções Trigonométricas (senos como números reais) – propriedades; ***ostensivos escriturais*** *(algébricos)* – relativos ao domínio da geometria (propriedades básicas das figuras planas), a trigonometria no triângulo retângulo, às propriedades das Funções Trigonométricas (duplicação de arcos) e, também às operações fundamentais disponibilizadas pela Educação Básica.

(3) É possível existir as seguintes dificuldades dos estudantes: ausência (por esquecimento) dos conhecimentos relativos às noções de figuras planas; incompreensão da relação entre grau e radiano; estabelecer a articulação entre as medidas de arcos e números reais; reconhecer os eixos dos senos, como eixo para controlar as áreas S (α); domínio da manipulação dos ostensivos escriturais (algébricos); identificação de propriedades das Funções Trigonométricas (duplicação de arcos e arco metade).

7.2 – Elementos da Neurociência Cognitiva:

7.2.1 – Considerações sobre a MLP (C_{MLP}):

Conforme foi discutido no capítulo III, vale realçar que o mecanismo cerebral de aquisição da informação está submetido a nove etapas, sendo o armazenamento a última delas.

De acordo com o neurocientista cognitivo Willingham (2011), a evocação de uma informação precisa ser ativada pela presença de um estímulo sensorial provindo, na maioria das vezes – do “meio externo”, bem como de fatos na memória de longo prazo, procedimentos na memória de longo prazo e quantidade de espaço na memória de trabalho, residindo na ausência de um deles, o provável insucesso do raciocínio, esperado para a resolução de uma determinada tarefa.

Por sua vez, a recuperação ou evocação de uma dada informação supostamente consolidada, promove a articulação de todas as funções cognitivas podendo ser comparada a uma ‘força tarefa’, caso seja de interesse do cérebro,

nesse caso, por exemplo, dos estudantes participantes dessa experimentação, conforme foi mostrado na Figura 23 (Cf. p. 184).

Decorrente dessas considerações e das, anteriormente abrigadas pelas pesquisas de Luria (1980), Kandel (1991), LeDoux (2001), Gazzaniga (2006), Lent (2002, 2008), Sternberg (2010), Willingham (2011), e Izquierdo (2011), principalmente, definiram-se as seguintes condições:

(1) Qualidade da informação do ambiente (meio externo);

(2) Fatos na Memória de Longo Prazo;

(3) Procedimentos na Memória de Longo Prazo.

7.2.2 – Considerações sobre o mapa da circuitaria neurocognitiva articulado pela MLP (C_{MLP}):

Levando-se em conta as condições 1, 2 e 3 do subitem 7.2.1, bem como os estudos do processamento cerebral da informação, fundamentado nas mesmas bases teóricas dos pesquisadores acima, esboçou-se o esquema de um mapa que apresenta a hierarquia da circuitaria neurocognitiva, que deverá ser ativada sempre que houver a apresentação de um estímulo sensorial que, nesse caso, deu-se por meio da visão (canal de entrada):

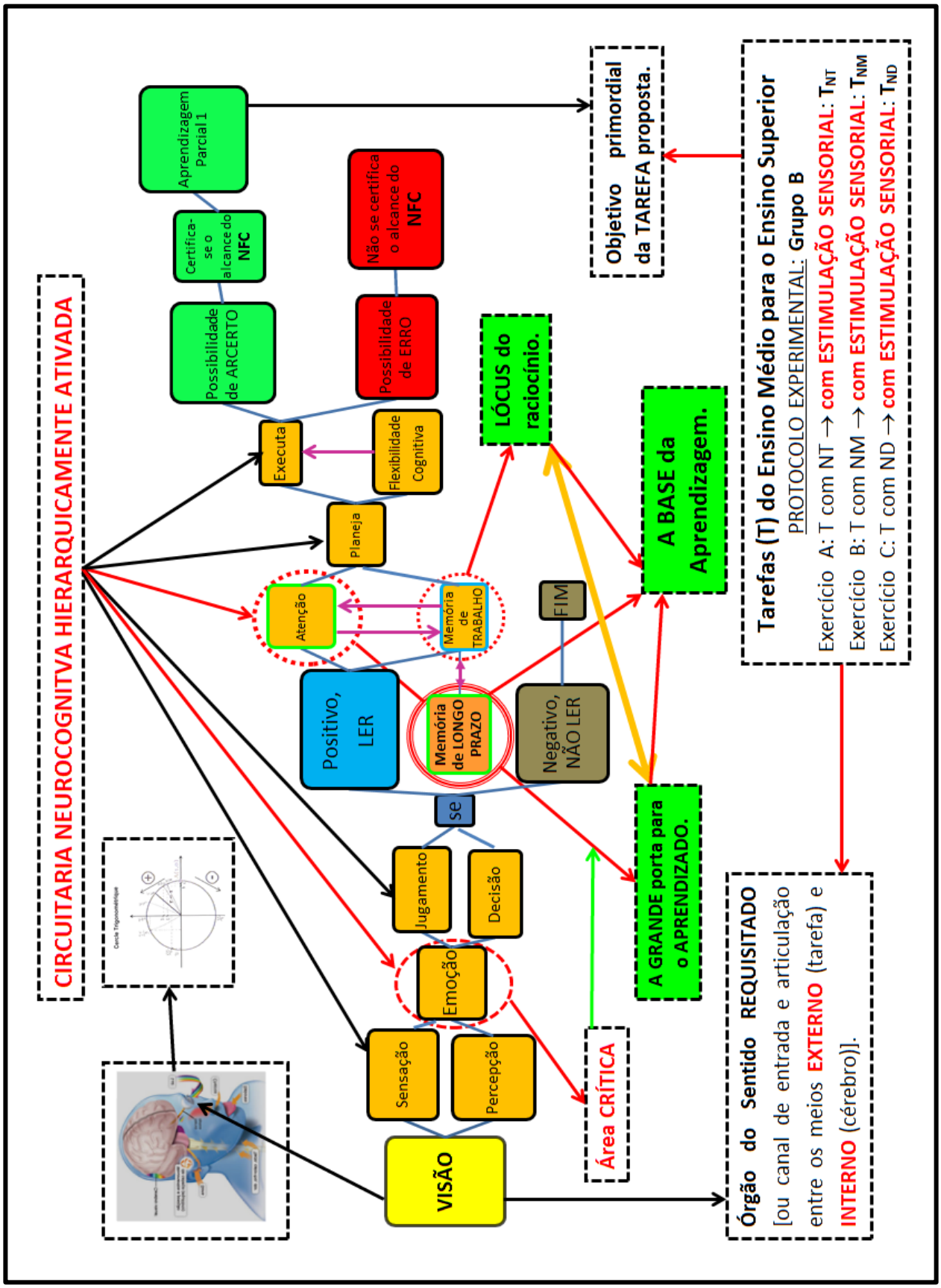


Figura 82: Mapa da Circuitaria Neurocognitiva Ativada.
Fonte: O autor (2015).

7.2.3 – Considerações sobre os traços mnemônicos esperados pela evocação da MPL durante a resolução das tarefas propostas: (C_{TME})

A respeito dos traços mnemônicos esperados (registros de não ostensivos evocados e manipulados por meio seus respectivos ostensivos), levaram-se em conta as considerações C_{AE}, C_{NFC} e C_{MLP} que fundamentaram a resolução das respectivas tarefas A, B e C, servindo ao mesmo tempo, de referência para a análise dos protocolos aplicados, conforme segue:

Resolução da Tarefa A (t A): Diga se cada uma das afirmações seguintes é verdadeira ou falsa e justifique.

a) Como $\frac{\pi}{8} < \frac{\pi}{6}$, $\cos(\frac{\pi}{8}) < \cos(\frac{\pi}{6})$

$C_{TME\ –\ t\ A\ (a)}$:

- Dados: **ostensivos escriturais**: $\frac{\pi}{8}$, $\frac{\pi}{6}$, cos $(\frac{\pi}{8})$ e cos $(\frac{\pi}{6})$; **domínio matemático**: função;
- Recupera-se da MLP, os não ostensivos relacionados:
  (a) arco (AB) de 180° ≡ arco (AB) de π.rad;
  (b) definição de seno e cosseno como números reais.
- Manipulam-se os ostensivos associados por meio das técnicas τ_{2}LDEM2 e τ_{4}LDEM2, disponíveis em Dante (2013).
- Faz-se necessária a aplicação de uma técnica não prevista em nenhum dos documentos oficiais dos dois países para esse caso: τ_{1TA}: usar o círculo trigonométrico.
- Aplicam-se técnicas de comparação em desigualdades amplamente abordadas na Educação Básica. (*)

RESOLUÇÃO:

$\frac{\pi}{8}$ rad = $\frac{180°}{8}$ = 22,5° e $\frac{\pi}{6}$ rad = $\frac{180°}{6}$ = 30° ⟶ τ_{2}LDEM2

cos $(\frac{\pi}{8})$= cos 22,5° e cos $(\frac{\pi}{6})$= cos 30° ⟶ τ_{4}LDEM2 + τ_{1TA}

cos 22,5° < cos 30° ⟶ (*)

Como cos 22,5° = 0,925 e cos 30° = 0,866, têm-se que: 0,925 < 0,866

Resposta: ***Falso***, conforme os mostrados pelos cálculos acima.

b) Como $\frac{\pi}{8} < \frac{\pi}{6}$, sin $(\frac{\pi}{8})$ < sin $(\frac{\pi}{6})$

$C_{TME - t\ A\ (b)}$: prevalece a mesma sequência de traços de $C_{TME - t\ A\ (a)}$, considerando-se o eixo dos senos.

RESOLUÇÃO:

$\frac{\pi}{8}$ rad = $\frac{180°}{8}$ = 22,5° e $\frac{\pi}{6}$ rad = $\frac{180°}{6}$ = 30° ⟶ τ_2LDEM2

sen $(\frac{\pi}{8})$= sen 22,5° e sen $(\frac{\pi}{6})$= sen 30° ⟶ τ_4LDEM2 + τ_{1TA}

sen 22,5° < sen 30° ⟶ (*)

Como sen 22,5° = 0,384 e sen 30° = 0,500, tem-se que: 0,384 < 0,500

Resposta: **Verdadeiro**, conforme os mostrados pelos cálculos acima.

c) Como $\frac{2\pi}{3} < \frac{11\pi}{12}$, cos $(\frac{2\pi}{3})$ < cos $(\frac{11\pi}{12})$

$C_{TME - t\ A\ (c)}$:

- Dados: **ostensivos escriturais**: $\frac{2\pi}{3}$,$\frac{11\pi}{12}$,cos $(\frac{2\pi}{3})$ e cos $(\frac{11\pi}{12})$; **domínio matemático**: função;
- Recupera-se da MLP os não ostensivos relacionados:
  (a) arco (AB) de 180° ≡ arco (AB) de π.rad;
  (b) definição de seno e cosseno como números reais.
- Manipulam-se os ostensivos associados por meio das técnicas τ_2LDEM2, τ_3LDEM2 e τ_4LDEM2, disponíveis em Dante (2013).
- Faz-se necessária a aplicação da técnica τ_{1TA}: usar o círculo trigonométrico.
- Aplicam-se técnicas de comparação em desigualdades amplamente abordadas na Educação Básica. (*)

RESOLUÇÃO:

$\frac{2\pi}{3}$rad = $\frac{2.\ 180°}{3}$ = 120° e $\frac{11\pi}{12}$ rad = $\frac{11.\ 180°}{12}$ = 165° ⟶ τ_2LDEM2

cos $(\frac{2\pi}{3})$= cos 120° e cos $(\frac{11\pi}{12})$= cos 165° ⟶ τ_4LDEM2

cos 120°= - cos 60° e cos 165° = - cos 15° ⟶ τ_3LDEM2 + τ_{1TA}

- cos 60° < - cos 15° ⟶ (*)

Como - cos 60° = - 0,500 e - cos 15° = - 0,966, tem-se que: - 0,500 < - 0,966

Resposta: ***Falso***, conforme os mostrados pelos cálculos acima.

d) Como $\frac{2\pi}{3} < \frac{11\pi}{12}$, sin $(\frac{2\pi}{3})$ < sin $(\frac{11\pi}{12})$

$C_{TME - t\ A\ (d)}$: prevalece a mesma sequência de traços de $C_{TME - t\ A\ (c)}$, considerando-se o eixo dos senos.

RESOLUÇÃO:

$\frac{2\pi}{3}$rad = $\frac{2.\ 180°}{3}$ = 120° e $\frac{11\pi}{12}$ rad = $\frac{11.\ 180°}{12}$ = 165° ⟶ τ_2LDEM2

sen $(\frac{2\pi}{3})$= sen 120° e sen $(\frac{11\pi}{12})$= sen 165° ⟶ τ_4LDEM2

sen 120°= sen 60° e sen 165° = sen 15° ⟶ τ_3LDEM2 + τ_{1TA}

sen 60° < sen 15° ⟶ (*)

Como sen 60° = 0,866 e sen 15° = 0,259, tem-se que: 0,866 < 0,259

Resposta: ***Falso***, conforme os mostrados pelos cálculos acima.

Resolução da Tarefa B (t B): Determine o período da função *g(x) = 2 cos x – cos (5x + 1).* Justificar.

- Dados: **ostensivos escriturais** *g(x) = 2 cos x – cos (5x + 1)*; **domínio matemático**: função;
- Recupera-se da MLP, os não ostensivos relacionados:
  - (a) definição de círculo trigonométrico;
  - (b) definição de função cosseno como função real de variáveis reais que associa a cada número real x o valor real cos x, ou seja, f: IR → IR
    $x \rightarrow f(x) = \cos x$
  - (c) definição de periodicidade em senoides.
- Manipulam-se os ostensivos associados por meio das técnicas τ_4LDEM2, τ_6LDEM2, τ_8LDEM2 e τ_{13}LDEM2, disponíveis em Dante (2013) para os estudantes brasileiros e τ_7 disponível em Misset (2011) *et al* para os estudantes

franceses ($1^{re}S$), apesar de não ter sido analisada na obra de Dante (2013).

- Aplicam-se técnicas de comparação, identificação e substituição em igualdades amplamente abordadas na Educação Básica. (*)

RESOLUÇÃO:

Definição: Uma função f: IR → IR é dita periódica de período T se existe um número real T tal que $f(x+T) = f(x)$, $\forall\ x \in IR$. ⟶ τ_6LDEM2 e τ_{13}LDEM2
Verifica-se que em g(x) = 2 cos x – cos (5x + 1), a função $f(x) = \cos x$ tem período $T = 2\pi$. ⟶ (*)

Aplicando-se a definição de periodicidade em g(x) com $T=2\pi$, tem-se:

$g(x+2\pi) = 2\cos(x+2\pi) - \cos(5.(x+2\pi) + 1)$ ⟶ τ_{13}LDEM2
$g(x+2\pi) = 2(\cos x.\cos 2\pi - \text{sen } x.\text{sen } 2\pi) - \cos(5x+10\pi + 1)$ ⟶ τ_7
$g(x+2\pi) = 2(\cos x.\ 1 - \text{sen } x.\ 0) - \cos((5x+1)+10\pi)$ ⟶ τ_4LDEM2 e (*)
$g(x+2\pi) = 2(\cos x. - 0) - [\cos(5x+1).\cos 10\pi - \text{sen}(5x+1).\text{sen } 10\pi]$ ⟶ (*) e τ_7
$g(x+2\pi) = 2\cos x - [\cos(5x+1).\ 1 - \text{sen}(5x+1).\ 0]$ ⟶ τ_4LDEM2 e (*)
$g(x+2\pi) = 2\cos x - [\cos(5x+1) - 0]$ ⟶ (*)
$g(x+2\pi) = 2\cos x - \cos(5x+1) = g(x)$ ⟶ (*)

Resposta: Conforme justificativa acima, *o período T da função g(x) é 2π.*

Resolução da Tarefa C (t C): Foi construído com hastes de metal um losango articulado de lado igual a 6 cm. Denominou-se de ABCD esse losango e α o ângulo BÂD.

a) Estude as variações de área desse losango em função do ângulo α.

$C_{TME\ –\ t\ C\ (a)}$:

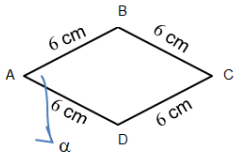
- Dados: **ostensivos escriturais** *losango ABCB e o ângulo α = BÂD, lado ℓ = 6, variação de área, função;* **domínios matemáticos**: geometria e função;
- Recupera-se da MLP os não ostensivos relacionados:
  (a) Da geometria: noções de figuras planas; propriedades geométricas dessas figuras; noções de trigonometria no triângulo retângulo;

(b) De função: noções de círculo trigonométrico; definição de Funções Trigonométricas e suas propriedades.

- Manipulam-se os ostensivos associados por meio das técnicas τ_{2}LDEM1, τ_{4}LDEM2, τ_{3}LDEM2, τ_{6}LDEM2, τ_{7}LDEM2, τ_{8}LDEM2 e τ_{10}LDEM2, disponíveis em Dante (2013) para os estudantes brasileiros e τ_{7} disponível em Misset (2011) *et al* para os estudantes franceses, apesar de não ter sido analisada na obra de Dante (2013).
- Aplicam-se técnicas – tanto no âmbito da geometria quanto das funções – de comparação, identificação e substituição em igualdades amplamente abordadas na Educação Básica. (*)

RESOLUÇÃO:

Passo 01: Evocar o ***não ostensivo*** (noções de figuras planas – um losango) segundo os dados:



⟶ (*)

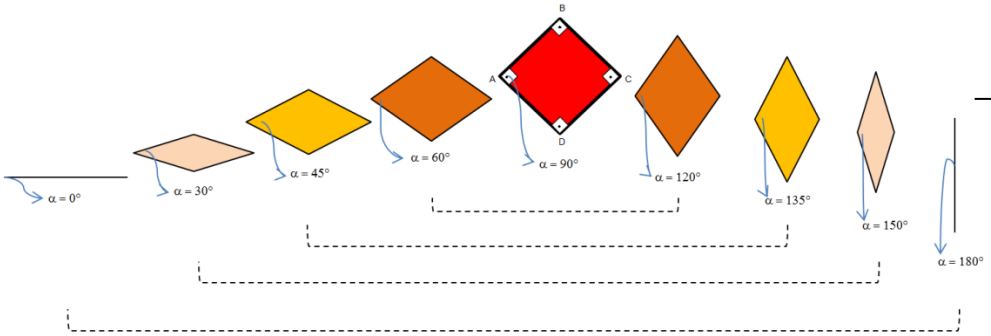
Passo 02: Manipular os ***ostensivos escriturais*** associados:

Se ABCD é um losango e $\alpha = B\hat{A}D$, *logo* $\alpha = B\hat{C}A$.
Assim, $\hat{B} = \hat{D} = \beta$ *e vale a propriedade:*

$2\alpha + 2\beta = 360°$ *ou* $\alpha + \beta = 180°$

⟶ (*)

Passo 03: Manipular os ***ostensivos gráficos*** associados para desenvolver o estudo das variações de área desse losango em função do ângulo α:



⟶ (*)

Passo 04: Manipular os ***ostensivos escriturais*** associados às noções de área do losango (***não ostensivo*** evocado)

$S_{losango\ ABCD} = S = \frac{d_1.d_2}{2}$, onde d_1 = diagonal maior e d_2 = diagonal menor. ⟶ (*)

Mas, deverá perceber que d_1 e d_2 não são dados, apenas o lado $\ell = 6$.

Isso conduz ao apelo da *flexibilidade cognitiva* que permitirá a algumas alternativas (A e B) de resolução:

ALTERNATIVA "A": *Desconsiderar o cálculo de d_1 e d_2 para determinar S.*

- Sistema de ostensivos conectados e articulados a um certo número de não ostensivos:

  Propriedade: Em um losango se os quatro ângulos internos forem congruentes e iguais a 90° tem-se um quadrado. (não ostensivo). Nessas condições e com $\ell = 6$, é possível obter $S = \ell^2$. ⟶ (*)

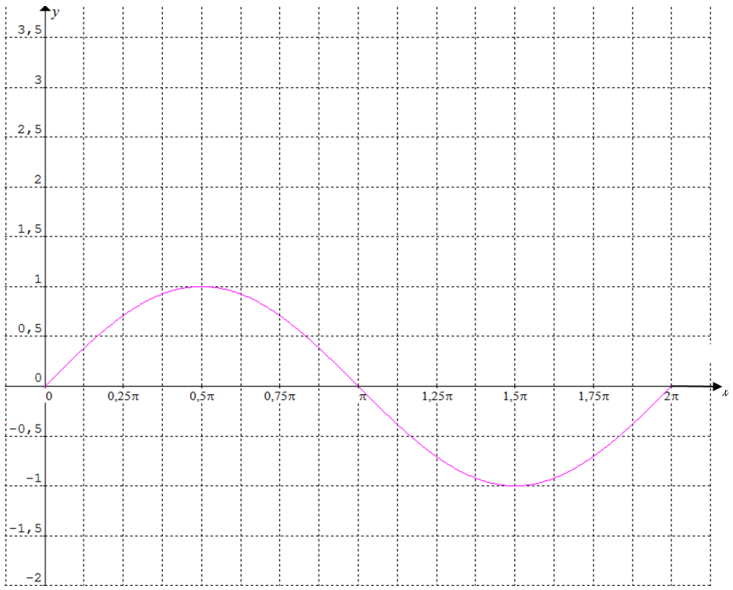
- Aplicar $S = \ell^2$ (ostensivo), considerando que, quando $\alpha = 90°$, ABCD é um quadrado, logo S = 36. ⟶ (*)
- Pelas figuras do passo 03, observa-se que S varia em função de α. podendo-se escrever: ⟶ (*)

  Se $0 \leq \alpha \leq 90°$, $\exists\ S(\alpha)$ tal que $0 \leq S(\alpha) \leq 36$. (relação entre grandezas, α e $S(\alpha)$, diretamente proporcionais).
  Se $90° \leq \alpha \leq 180°$, $\exists\ S(\alpha)$ tal que $36 \geq S(\alpha) \geq 0$. (relação entre grandezas, α e $S(\alpha)$, diretamente proporcionais).

- Manipular os ***ostensivos escriturais*** associados às noções de Funções Trigonométricas, função seno (***não ostensivo*** evocado)

Essas relações, $0 \leq \alpha \leq 90° \rightarrow 0 \leq S(\alpha) \leq 36$ e $90° \leq \alpha \leq 180° \rightarrow 36 \geq S(\alpha) \geq 0$ conduzem a evocar a função $f(\alpha) = \text{sen}\ \alpha$, para todo α real no intervalo $0 \leq \alpha \leq 180°$, cujo modelo atende as variações observadas da área S em função do ângulo α.

Para tanto, evoca-se o ***não ostensivo gráfico*** de $f(\alpha)$:



A recuperação mnemônica do ***não ostensivo gráfico*** de $f(\alpha)$ permite manipular os seguintes ***ostensivos***:

- Existe uma relação entre $f(\alpha)$ e $S(\alpha)$; ⟶ (*)

- Para efeito de área, o sinal de $f(\alpha)$ é sempre positivo, logo $S(\alpha)$ varia no intervalo em que $0 \leq \alpha \leq \pi$. ⟶ τ_{10}LDEM2

- A função $f(\alpha)$ assume valores iguais para α, cujos arcos correspondentes possuem as extremidades contidas no 1º e 2º quadrantes. ⟶ τ_{3}LDEM2

- Quando $\alpha = \pi/2$, a função $f(\alpha)$ corresponderá ao ponto máximo. ⟶ τ_{7}LDEM2

- Por dedução, concluir que a relação entre $f(\alpha)$ e $S(\alpha)$ é dada por: $S(\alpha) = \ell^2 . f(\alpha) = 6^2 . \text{sen}\ \alpha = 36 . \text{sen}\ \alpha$ ⟶ (*)

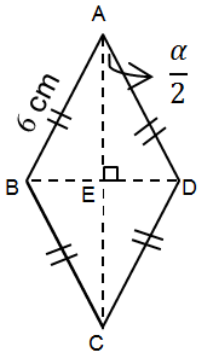
- Para validar, poderá utilizar uma calculadora científica e testar a fórmula preenchendo a tabela abaixo: ⟶ τ_{1TA}, τ_{8}LDEM2

α		sen α	$S(\alpha) = \ell^2$ sen α, ℓ = 6 cm	
			36. sen α	$S(\alpha)$
0°	0 rad	0,000	36. 0,000	0
30°	$\pi/6$ rad	0,500	36. 0,500	18 cm^2
45°	$\pi/4$ rad	0,707	36. 0,707	25,45 cm^2
60°	$\pi/3$ rad	0,866	36. 0,866	31,17 cm^2
90°	$\pi/2$ rad	1,000	36. 1,000	36 cm^2
120°	$2\pi/3$ rad	0,866	36. 0,866	31,17 cm^2
135°	$3\pi/4$ rad	0,707	36. 0,707	25,45 cm^2
150°	$5\pi/6$ rad	0,500	36. 0,500	18 cm^2
180°	π rad	0,000	36. 0,000	0

Resposta: Conforme justificativa acima, o estudo desenvolvido mostrou as variações de área desse losango em função do ângulo α.

ALTERNATIVA "B": <u>*Calcular d_1 e d_2 para determinar S.*</u>

- Sistema de ostensivos conectados e articulados a um certo número de não ostensivos:



Propriedades:

(a) As diagonais d_1 e d_2 em um losango são perpendiculares, logo o Δ AED é retângulo em Ê e $\frac{\hat{A}}{2} + \hat{E} + \frac{\hat{D}}{2} = 180°$, sendo $\frac{\hat{A}}{2} = \frac{\alpha}{2}$. Ao mesmo tempo, E é ponto médio das duas diagonais, logo: $\frac{d_1}{2} = \overline{ED}$ e $\frac{d_2}{2} = \overline{EA}$ ⟶ (*)

(b) Aplicar as técnicas da trigonometria no triângulo retângulo AED:

sen $(\frac{\alpha}{2})$ = $(\frac{d_1}{2})/6$ e cos $\frac{\alpha}{2}$ = $(\frac{d_2}{2})/6$. ⟶ τ_2LDEM1

$\frac{d_1}{2}$ = 6. sen $(\frac{\alpha}{2})$ e $\frac{d_2}{2}$ = 6. cos $(\frac{\alpha}{2})$

(c) Utilizar os valores de d_1 e d_2 no cálculo da área do Δ AED:

$S_{AED} = (\overline{ED} \ . \ \overline{EA})/2 = (\frac{d_1}{2} \ . \ \frac{d_2}{2})/2 = ([6. \text{ sen } (\frac{\alpha}{2})] \ . \ [6. \cos (\frac{\alpha}{2})])/2$

$S_{AED} = 18. \text{ sen } (\frac{\alpha}{2}).\cos (\frac{\alpha}{2}) = 9 \ . \ [2. \text{ sen } (\frac{\alpha}{2}).\cos (\frac{\alpha}{2})]$ ⟶ (*)

Como $[2. \text{ sen } (\frac{\alpha}{2}).\cos (\frac{\alpha}{2})] = \text{sen } \alpha$, tem-se que: $S_{AED} = 9. \text{ sen } \alpha$ ⟶ τ_7

(d) Aplicando-se $S_{AED} = 9. (\text{sen } \alpha)$ para no cálculo de $S_{\text{losango ABCD}}$, tem-se:

$S_{\text{losango ABCD}} = 4. S_{AED} = 4. 9. (\text{sen } \alpha) = 36.(\text{sen } \alpha)$. Resumindo, vem que:

$S(\alpha) = 36.(\text{sen } \alpha)$. Conforme variação de α no intervalo $0 \leq \alpha \leq 90°$ e $90° \leq \alpha \leq 180°$, $S(\alpha)$ varia, respectivamente, no intervalo $0 \leq S(\alpha) \leq 36$ e $36 \geq S(\alpha) \geq 0$

⟶ (*)

Resposta: Conforme justificativa acima, o estudo desenvolvido mostrou as variações de área desse losango em função do ângulo α.

b) Para que valor de α a área do losango é máxima? Justificar.

Resposta: Seguindo-se a alternativa **"A"** e observando-se a tabela dos valores calculados a partir de S(α), cujas relações estão associadas ao ***não ostensivo gráfico*** $f(\alpha)$, é possível dizer o valor de α para que S(α) seja máxima é $\pi/2$.

Considerando-se a alternativa **"B"**, basta fazer utilizar S(α) = 36.(sen α) e fazer $\alpha = \pi/2$ que reflete em $f(\alpha)$ = (sen α), a máxima imagem da função para α variando no intervalo $0 \leq \alpha \leq 180°$. Assim, quando $\alpha = \pi/2$, S (α) = 36cm^2.

7.3 – Cenário da Experimentação:

7.3.1 – População e amostra da pesquisa:

População de pesquisa:

Alunos do Ensino Superior, matriculados na disciplina **Cálculo I** (ou equivalentes) ministrada para os cursos de Licenciatura em Matemática ou Engenharia, em universidades públicas do Brasil e da França.

Amostra Principal:

No mês de abril de 2014, participaram, voluntariamente, dessa pesquisa, no período diurno, 23 estudantes, de ambos os sexos, com idade média de 18 anos, do curso de Engenharia matriculados no INSA – Instituto Nacional de Ciências Aplicadas de Lyon da *Universidade Claude Bernard Lyon I* (UCBL I), sendo: 09 brasileiros com intercâmbio por meio do programa ***Ciência sem Fronteiras***[84] através da UNESP – Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho/Campus de Guaratinguetá e 14 franceses da UCBL I. Esses estudantes desenvolveram os estudos do cálculo diferencial e integral, à época, com Prof. Dr. Guy ATHANAZE, Vice-Presidente do Comitê de Educação e Coordenador da área de

[84] Tal programa resulta da iniciativa do governo brasileiro e esforço conjunto dos Ministérios da Ciência, Tecnologia e Inovação (MCTI) e do Ministério da Educação (MEC), cujos recursos financiamentos são oriundos de agências de fomento à pesquisa – CNPq e Capes –, bem como das Secretarias de Ensino Superior e de Ensino Tecnológico do MEC.

Matemática do INSA, também responsável, nesse caso, pelo programa de intercâmbio entre Brasil e França.

Amostra Secundária:

Nos meses de abril, maio e setembro de 2014, participaram, voluntariamente, dessa pesquisa, no período diurno:

- 51 estudantes (abril e maio), de ambos os sexos, com idade média de 18 anos, dos cursos de Licenciatura em Matemática e de Engenharia matriculados na UD1, sendo: 25 da licenciatura e 26 da engenharia;
- 20 estudantes (setembro), de ambos os sexos, com idade média de 18 anos, do curso de Engenharia matriculados na UD2.

7.3.2 – Elaboração dos instrumentos de pesquisa – os Protocolos:

Durante a confecção dos protocolos, foi respeitada a apresentação dos mesmos nas respectivas línguas maternas dos países envolvidos, português e francês, obedecendo, conforme anexos 02, 03, 04 e 05, a seguinte caracterização: Grupos A e B (em português) e Grupos A e B (em francês).

7.3.3 – Metodologia de aplicação dos instrumentos de pesquisa – os Protocolos:

Em todas as quatro aplicações dos protocolos experimentais, seguiu-se a seguinte conduta:

- Os estudantes voluntários foram convidados a optar livremente e, sem o conhecimento prévio que motivou a seleção, pela participação em um dos dois grupos que constituíam cada uma das amostras pesquisadas, ou seja, **Grupo A** e **Grupo B**.

- Em salas, espacialmente distintas, cada um dos participantes recebeu:

  No **Grupo A**: uma folha inicial contendo – dados de identificação da pesquisa, dados de identificação pessoal (opcional), três orientações para o desenvolvimento das tarefas (os exercícios), apresentação das Tarefas A, B e C; duas a três folhas de repostas para realização dos cálculos.

  No **Grupo B**: uma folha inicial contendo – dados de identificação da pesquisa, dados de identificação pessoal (opcional), quatro orientações para o desenvolvimento das tarefas (os exercícios), apresentação das Tarefas A, B e C; duas a três folhas de repostas para realização dos cálculos; uma folha contendo o círculo

trigonométrico (estímulo sensorial), devendo-se ser informado e justificado (na folha inicial) a sua utilização.

- As tarefas deverão ser resolvidas individualmente sem, inclusive, a consulta de livros, cadernos ou apostilas de nenhuma natureza.

- Poderá ser utilizada calculadora científica (avisado antecipadamente na fase do recrutamento) apenas nas tarefas B e C.

- As tarefas devem ser desenvolvidas utilizando-se lápis, borracha, caneta, as folhas distribuídas e a calculadora.

- Todas as folhas distribuídas deverão ser devolvidas ao pesquisador.

- O tempo estimado para a resolução das três tarefas será de 1 (uma) hora, com acréscimo máximo de 20 minutos.

7.3.4 – Análise dos Protocolos Experimentais coletados:

7.3.4.1 – Codificação das amostras:

Todas as 94 amostras[85] foram, indistintamente, codificadas para garantir o anonimato dos voluntários participantes, obedecendo-se a seguinte estrutura:

Quadro 93

Amostra Principal – França: UCBL I – Engenharia.

Tipo da amostra	Voluntários	Identificação	Totais parciais
Grupo A	Estud. Brasileiros	**AEB1, AEB2, AEB3, AEB4**	04
	Estud. Franceses	**AEF1, AEF2, AEF3, AEF4, AEF5, AEF6, AEF7**	07
Grupo B	Estud. Brasileiros	**BEB1, BEB2, BEB3, BEB4, BEB5**	05
	Estud. Franceses	**BEF1, BEF2, BEF3, BEF4, BEF5, BEF6, BEF7**	07
Total geral			23

Fonte: O autor (2015).

[85] Mesmo que, conforme foi dito anteriormente, as amostras dos Quadros 94, 95 e 96 não participando, efetivamente, da análise neurocognitiva, eventualmente, a codificação foi importante para o breve levantamento estatístico das tarefas A, B e C.

Quadro 94

Amostra Secundária 1(a) – Brasil: UD1 – Licenciatura em Matemática.

Tipo da amostra	Voluntários	Identificação	Totais parciais
Grupo A	Estudantes UD1	**AEBSEM1, AEBSEM2, AEBSEM3, AEBSEM4, AEBSEM5, AEBSEM6, AEBSEM7, AEBSEM8, AEBSEM9, AEBSEM10**	10
Grupo B		**BEBSEM1, BEBSEM2, BEBSEM3, BEBSEM4, BEBSEM5, BEBSEM6, BEBSEM7, BEBSEM8, BEBSEM9, BEBSEM10, BEBSEM11, BEBSEM12, BEBSEM13, BEBSEM14, BEBSEM15**	15
Total geral			25

Fonte: O autor (2015).

Quadro 95

*Amostra Secundária 1(b) – Brasil: UD1 – Engenharia***.**

Tipo da amostra	Voluntários	Identificação	Totais parciais
Grupo A	Estudantes UD1	**AEBSEE1, AEBSEE2, AEBSEE3, AEBSEE4, AEBSEE5, AEBSEE6, AEBSEE7, AEBSEE8, AEBSEE9, AEBSEE10, AEBSEE11, AEBSEE12, AEBSEE13**	13
Grupo B		**BEBSEE1, BEBSEE2, BEBSEE3, BEBSEE4, BEBSEE5, BEBSEE6, BEBSEE7, BEBSEE8, BEBSEE9, BEBSEE10, BEBSEE11, BEBSEE12, BEBSEE13**	13
Total geral			26

Fonte: O autor (2015).

Quadro 96

*Amostra Secundária 2 – Brasil: UD2 – Engenharia***.**

Tipo da amostra	Voluntários	Identificação	Totais parciais
Grupo A	Estudantes UD2	**AEBSPE1, AEBSPE2, AEBSPE3, AEBSPE4, AEBSPE5, AEBSPE6, AEBSPE7, AEBSPE8, AEBSPE9, AEBSPE10**	10
Grupo B		**BEBSPE1, BEBSPE2, BEBSPE3, BEBSPE4, BEBSPE5, BEBSPE6, BEBSPE7, BEBSPE8, BEBSPE9, BEBSPE10**	10
Total geral			20

Fonte: O autor (2015).

7.3.4.2 – Desempenho dos participantes da pesquisa nas tarefas A, B e C do protocolo experimental[86]:

Para analisar o desempenho dos estudantes voluntários, utilizaram-se as resoluções das tarefas A, B e C apresentadas no item 7.2.2 (C_{TME}) como matriz-matemática-referência. Para classificar os diferentes níveis de desempenho dos participantes em cada uma das tarefas, preservaram-se os níveis de proficiência de Matemática atribuídos pelo SARESP (2013), a saber: Abaixo do Básico; Básico; Adequado; Avançado. Conforme seus descritores espera-se em cada um desses níveis que:

> Abaixo do Básico: Os alunos, neste nível, demonstram domínio insuficiente dos conteúdos, competências e habilidades desejáveis para o ano/série escolar em que se encontram.
>
> Básico: Os alunos, neste nível, demonstram domínio mínimo dos conteúdos, competências e habilidades, mas possuem as estruturas necessárias para interagir com a proposta curricular no ano/série subsequente.
>
> Adequado: Os alunos, neste nível, demonstram domínio pleno dos conteúdos, competências e habilidades desejáveis para o ano/série escolar em que se encontram.
>
> Avançado: Os alunos, neste nível, demonstram conhecimentos e domínio dos conteúdos, competências e habilidades acima do requerido no ano/série escolar em que se encontram. (SARESP, 2013, p. 5)

Considerando-se as características dos NFC de Robert (1997, 1998) e a escala utilizada pelo SRESP (2013) mencionada, observou-se uma possível correspondência entre os mesmos, tal que:

[86] Esses níveis de classificação do desempenho dos estudantes foram baseados nas escalas produzidas, validadas e utilizadas pelo SRESP (2013) para avaliar a proficiência de Matemática do 5º, 7º e 9º anos do Ensino Fundamental e da 3ª série do Ensino Médio das escolas da rede pública do Estado de São Paulo.

Quadro 97

Correspondência entre as diferentes classificações.

NFC de Robert (1997, 1998)	Escala dos Níveis de Proficiência de Matemática do SRESP (2013)
–	Abaixo do Básico
NT – Nível Técnico	Básico
NM – Nível Mobilizável	Adequado
ND – Nível Disponível	Avançado

Fonte: O autor (2015).

Com efeito, essa equivalência permitiu verificar se o desempenho dos estudantes corresponde às expectativas do funcionamento do conhecimento em cada uma das tarefas apresentadas. Dessa forma, foi possível dizer, por exemplo, que se na tarefa C o aluno do grupo B apresenta nível de proficiência *adequado*, então existe um descompasso entre o esperado e o existente, atribuindo-se a tal desequilíbrio uma deficiência de aprendizagem, por fragilidades percebidas na recuperação da MLP quando não se evocou os não ostensivos necessários para o desenvolvimento da questão.

Munindo-se dessas ferramentas, prosseguiu-se com as análises considerando-se cada tarefa.

7.3.4.2.1 – Desempenho dos participantes da pesquisa na tarefa A:

No quadro seguinte, o levantamento dos dados permitiu verificar a relação entre o NFC e o desempenho dos voluntários, ou seja, a relação entre o esperado e o existente.

Quadro 98

Desempenho dos estudantes na TAREFA "A" – Amostra Principal.

Tipo da amostra	Número de Voluntários	Escala dos Níveis de Proficiência de Matemática do SRESP (2013)				NT↔ Básico
		Abaixo do Básico	Básico	Adequado	Avançado	
Grupo A	04 (BR)	–	**AEB1 AEB2 AEB3 AEB4**			100%
	07 (FR)	**AEF5**	**AEF1 AEF2 AEF3 AEF4 AEF6 AEF7**			85,72%
Grupo B	05 (BR)	–	**BEB1 BEB2 BEB3 BEB4 BEB5**			100%
	07 (FR)	–	**BEF1 BEF2 BEF3 BEF4 BEF5 BEF6 BEF7**			100%

Fonte: O autor (2015).

Imediatamente, observou-se que, com exceção do indivíduo representado pela amostra **AEF5**, tanto no Brasil como na França, o NFC técnico proposto para os estudantes corresponde às expectativas da escala do SARESP (2013), na medida em que foi contemplada, no desenvolvimento dessa tarefa a manipulação das técnicas atreladas aos não ostensivos evocados, conforme os descritores da matriz-matemática-referência (C_{TME} - t A).

Mesmo não sendo solicitado e nem disponibilizado, o círculo trigonométrico foi esboçado em 50% dos participantes do grupo A, enquanto que no grupo B que dispôs do estímulo sensorial, 100% dos estudantes afirmaram precisar utilizá-lo. Para a Didática da Matemática (DM), sob as lentes da Chevallard (1994), os objetos não ostensivos gráficos ajudam evocar os objetos ostensivos que permitirão a manipulação das técnicas adequadas à resolução da tarefa em tela que, conforme descritas nos capítulos V e VI, referem-se as τ_{2}LDEM2 e τ_{4}LDEM2 também previstas ser manipuladas no item (2) da análise a priori da tarefa em questão.

Outra evidência encontrada refere-se aos traços mnemônicos verificados nas amostras de ambos os grupos, pois foi recuperado da MLP, a relação entre grau e radiano definida por “arco (AB) de 180° ≡ arco (AB) de π.rad”, bem como a definição de seno e cosseno como números reais. Nesses termos Kandel (1991), Willingham (2011) e Izquierdo (2011), principalmente, advogam que essa evocação está justificada pela existência de fatos e procedimentos potenciais na MLP.

Por sua vez, essas reservas de memórias são armazenadas quando, segundo LeDoux (2001), as amídalas cerebrais ativaram o sistema límbico que avaliou como positiva, à época, as informações referentes às noções de Funções Trigonométricas em tela que, provavelmente, está interligada a qualidade dessas, provenientes do meio externo. Nesse sentido, salienta Redolar Ripoll (2014), que essa ativação estimula a produção de serotonina (neurotransmissor do prazer, 5-HT), precisando essa, chegar até a fenda sináptica (Figura 28, Cf. p. 190) para permitir a comunicação, entre outros neurônios que, por exemplo, conduzirão a ativação de marcadores de familiaridade com as noções trigonométricas em jogo, reconhecidos pela presença da acetilcolina (neurotransmissor da memória, ACh).

A exemplo desse diálogo que se estabeleceu entre a DM e a Neurociência Cognitiva (NC) foi pinçado do material coletado duas amostras do grupo B dos dois países:

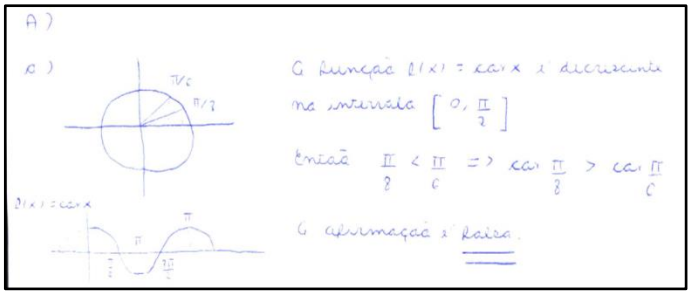


Figura 83: Amostra brasileira BEB1.
Fonte: Protocolos experimentais da pesquisa (2015).

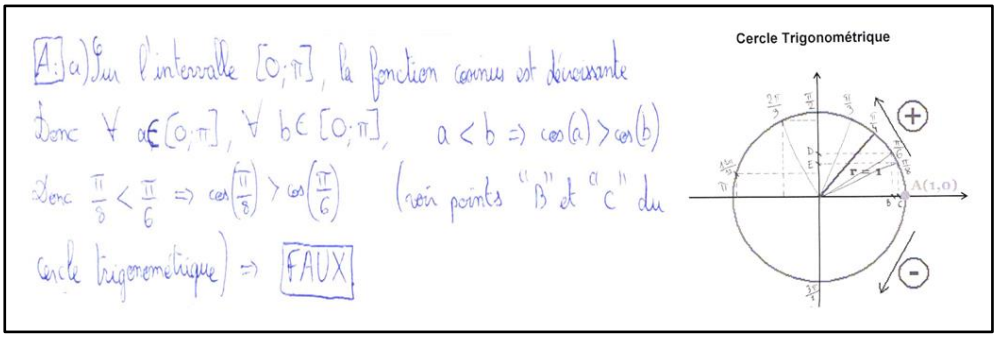


Figura 84: Amostra brasileira BEF2.
Fonte: Protocolos experimentais da pesquisa (2015).

Como consequência dessa articulação, pode-se concluir que os objetos não ostensivos concebidos por Chevallard (1994) são, na verdade, traços mnemônicos evocados da MLP, conforme postulado por Kandel (1991), Willingham (2011) e Izquierdo (2011), principalmente, e anteriores a denominações da DM.

Com efeito, conforme O Quadro 98 (Cf. p. 406) e verificações do desenvolvimento das resoluções dos estudantes da tarefa A, a principal dificuldade verificada na amostra **AEF5**, também prevista no item (3) da análise a priori, foi estabelecer a articulação entre as medidas de arcos e números reais que, por sua vez, decorre da incompreensão da relação entre graus e radianos.

Mesmo assim, esse fato pontual não impede de concluir que os estudantes voluntários, em sua maioria, dispõem dos conhecimentos prévios (***não ostensivos*** previstos no item (2) da análise a priori) necessários para a resolução de tarefas no nível técnico. Decorrente dessa análise neurocognitiva permitiu-se dizer que, a transição do ensino das Funções Trigonométricas EM-ES será bem sucedida, nessa instância, caso as condições abaixo sejam atendidas:

- Existam conhecimentos prévios na MLP;
- Existam estímulos sensoriais potenciais articulados ao desenvolvimento das referidas noções matemáticas;
- Estímulos sensoriais devem ser estruturados e apresentados considerando-se o desenvolvimento epistemológico das noções em jogo que sinalizará o sentido necessário para ativar o sistema límbico do cérebro;

- Tarefas que representem o nível técnico de funcionamento do conhecimento devem ser superadas pelos estudantes antes que ocorra a mudança para o nível seguinte, o mobilizável.

Foi oportuno apresentar uma breve estatística sobre o desempenho dos estudantes, representados pelas amostras codificadas nos Quadros 91, 92 e 93 (Cf. p. 402). Conforme, levantamento realizado, segue:

Quadro 99

Desempenho dos estudantes na TAREFA "A" – Amostra Secundária 1(a).

Tipo da amostra	**Número de Voluntários** (estudantes UD1)	**Escala dos Níveis de Proficiência de Matemática do SRESP (2013)**				**NT↔ Básico**
		Abaixo do Básico	Básico	Adequado	Avançado	
Grupo A	10	**AEBSEM1 AEBSEM2 AEBSEM3 AEBSEM4 AEBSEM5 AEBSEM6 AEBSEM7 AEBSEM8 AEBSEM9 AEBSEM10**				0%
Grupo B	15	**BEBSEM1 BEBSEM2 BEBSEM3 BEBSEM4 BEBSEM5 BEBSEM6 BEBSEM7 BEBSEM8 BEBSEM9 BEBSEM10 BEBSEM11 BEBSEM12 BEBSEM13 BEBSEM14 BEBSEM15**				0%

Fonte: O autor (2015).

Mesmo evitando-se proceder a uma análise neurocognitiva sobre os resultados no quadro acima, a descrição do SARESP (2013) sobre o nível em que se encontram o conteúdo das amostras coletadas, desvela alguns bastidores da transição EM-ES, dos estudantes voluntários do curso de Licenciatura em Matemática da UD1. Ainda conforme o SARESP (2013), a demonstração da insuficiência acerca do domínio matemático analisado, o das Funções

Trigonométricas, acarretará, provavelmente, um desequilíbrio maior quando se defrontarem com níveis de conhecimento em que seu funcionamento exija ter disponíveis a superação do nível técnico.

Talvez, o destaque de alguns “registros” (depoimentos) encontrados nessas amostras possa fundamentar o esclarecimento dos resultados e das observações acima, a saber: *“não estudei esse conteúdo”* – **BEBSEM5***; “não me lembro desse assunto”* – **BEBSEM3, BEBSEM10, BEBSEM11**; *“não sei fazer”* – **BENSEM2**, por exemplo. Nesse sentido, vale esclarecer que, segundo Izquierdo (2011), só existirá MLP se, primordialmente, ao mesmo tempo, também existir a experiência. Por esse critério, a apresentação de qualquer estímulo sensorial será incapaz de mobilizar a evocação de um conteúdo inexistente na MLP.

Na sequência, foi observado o desempenho dos alunos de outro curso da mesma universidade:

Quadro 100

*Desempenho dos estudantes na TAREFA “A” – Amostra Secundária 1(b)***.**

Tipo da amostra	**Número de Voluntários** (estudantes UD1)	**Escala dos Níveis de Proficiência de Matemática do SRESP (2013)**				**NT↔ Básico**
		Abaixo do Básico	Básico	Adequado	Avançado	
Grupo A	13	**AEBSEE1 AEBSEE2 AEBSEE5 AEBSEE6 AEBSEE7 AEBSEE8 AEBSEE9 AEBSEE11 AEBSEE12**	**AEBSEE3 AEBSEE4 AEBSEE10 AEBSEE13**			30,76%
Grupo B	13	**BEBSEM1 BEBSEM3 BEBSEM5 BEBSEM6 BEBSEM8 BEBSEM9 BEBSEM10 BEBSEM11 BEBSEM12 BEBSEM13 BEBSEM14 BEBSEM15**	**BEBSEM2 BEBSEM4 BEBSEM7**			23,07%

Fonte: O autor (2015).

Nesse novo contexto, verificou-se uma pequena mudança percentual, embora prevaleçam as mesmas características observadas nas amostras do curso anterior. Esse traço, perseverante, sinaliza os possíveis problemas enfrentados pelos professores das disciplinas, que dependem desses conhecimentos para alicerçar os fundamentos teóricos que futuramente justificarão a prática de um engenheiro, a exemplo, das disciplinas de Física.

Na contramão desses resultados, o próximo quadro, apresenta alterações consistentes que possibilitaram inserir as considerações regionais e culturais como um divisor de águas:

Quadro 101

Desempenho dos estudantes na TAREFA "A" – Amostra Secundária 2.

Tipo da amostra	**Número de Voluntários** (estudantes UD2)	**Escala dos Níveis de Proficiência de Matemática do SRESP (2013)**				**NT↔ Básico**
		Abaixo do Básico	Básico	Adequado	Avançado	
Grupo A	10		**AEBSPE1 AEBSPE2 AEBSPE3 AEBSPE4 AEBSPE5 AEBSPE6 AEBSPE7 AEBSPE8 AEBSPE9 AEBSPE10**			100%
Grupo B	10	**BEBSPE5**	**BEBSPE1 BEBSPE2 BEBSPE3 BEBSPE4 BEBSPE6 BEBSPE7 BEBSPE8 BEBSPE9 BEBSPE10**			90%

Fonte: O autor (2015).

Inicialmente, vale ressaltar que, todos os participantes dessa pesquisa cursavam, o primeiro semestre da universidade, considerando, inclusive, aqueles que dividiam com os estudantes franceses, experiências ainda não conhecidas pelos demais.

Paralelamente, fez-se necessário, rapidamente, recorrer a Artigue (2004) para encontrar possíveis justificativas, a partir das questões culturais, já que entre os

dois países, Brasil e França, bem como entre dois Estados brasileiros de duas regiões geograficamente distintas, os sistemas de valores, crenças e hábitos, mobilizam diferentes formas de difusão de praxeologias, que permitem a comunicação entre os níveis de co-determinação de Chevallard (2007a) quando, por exemplo, consideram-se nessa escala as interações entre (pedagogia ↔ escola ↔ sociedade ↔ civilização) para analisar a Atividade Matemática.

Dessa forma, o tratamento dispensado à Atividade Matemática nos participantes das **Amostras Secundárias (1a) e (1b)** pode ter sido considerado no *nível informal*, enquanto que nas **Amostras Principal e Secundária 2**, no *nível técnico*.

Segundo Artigue (2004) reside na cultura às justificativas, para esse descompasso entre os *níveis informal e técnico*, já que existe uma relação institucional, esperada oficialmente, tanto no Brasil como na França, para todos os estudantes do Ensino Médio ou Lycée, respectivamente, que, aparentemente, passou a ser considerada como existente nessas duas últimas amostras destacadas, dado o alcance esperado pelo SARESP (2013) para o Nível do Funcionamento do Conhecimento proposto.

7.3.4.2.2 – Desempenho dos participantes da pesquisa na tarefa B:

Utilizando-se da mesma estratégia relativa à análise do desempenho dos participantes da tarefa A, o segundo levantamento dos dados permitiu verificar, no próximo quadro, a seguinte disposição estatística das relações entre o esperado e o existente na tarefa B:

Quadro 102

Desempenho dos estudantes na TAREFA "B" – Amostra Principal.

Tipo da amostra	**Número de Voluntários**	**Escala dos Níveis de Proficiência de Matemática do SRESP (2013)**				**NM↔ Adequado**
		Abaixo do Básico	Básico	Adequado	Avançado	
Grupo A	04 (BR)	**AEB2 AEB4**		**AEB1 AEB3**		50%
	07 (FR)	**AEF1 AEF3 AEF5 AEF7**		**AEF2 AEF4 AEF6**		42,85%
Grupo B	05 (BR)	**BEB2 BEB3 BEB4 BEB5**		**BEB1**		20%
	07 (FR)	**BEF2 BEF3 BEF4 BEF5 BEF6**		**BEF1 BEF7**		28,57%

Fonte: O autor (2015).

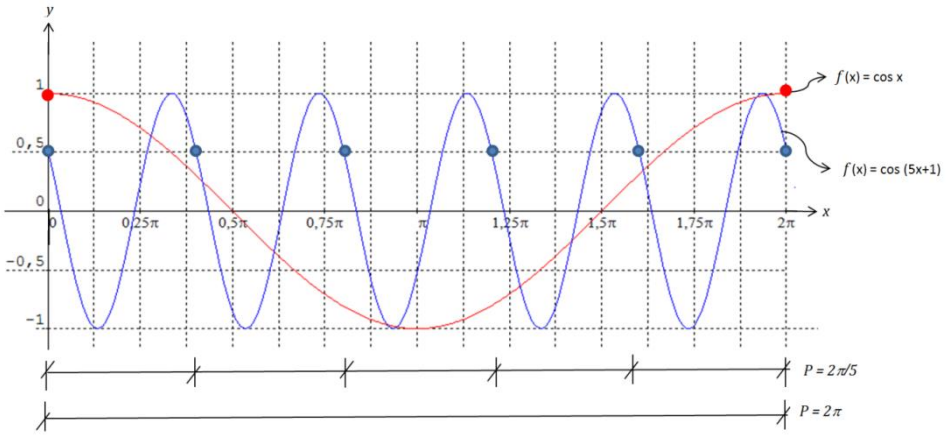
Primeiramente, coube destaque, a alguns pontos imediatos, a saber:

- Nas amostras do grupo A (**AEB1, AEB3, AEF2, AEF4, AEF6)** e do grupo B (**BEB1, BEF1, BEF7**), observou-se a prevalência entre o NCF (proposto ou esperado) e o desempenho (existente);
- Verificou-se também que o número de estudantes que atingiram as expectativas diante de uma tarefa do nível técnico decaiu, em média, mais de 50%;

Considerando tais observações e também, os percentuais menores do grupo B quando comparados aos do grupo A, uma impressão inicial, incitou a invalidação da hipótese de pesquisa H2.

No entanto, e, na contramão de uma análise numérica, esse tipo de experimentação pressupõe a existência de outros elementos, do tipo qualitativo, buscando-se evidenciar, por meio dos registros escritos (objetos ostensivos escriturais) pinçados das amostras coletadas, indícios considerados tanto pelas pesquisas em Didática da Matemática (DM) quanto pela Neurociência Cognitiva (NC), que possibilitaram o abrigo de algumas justificativas, tais como:

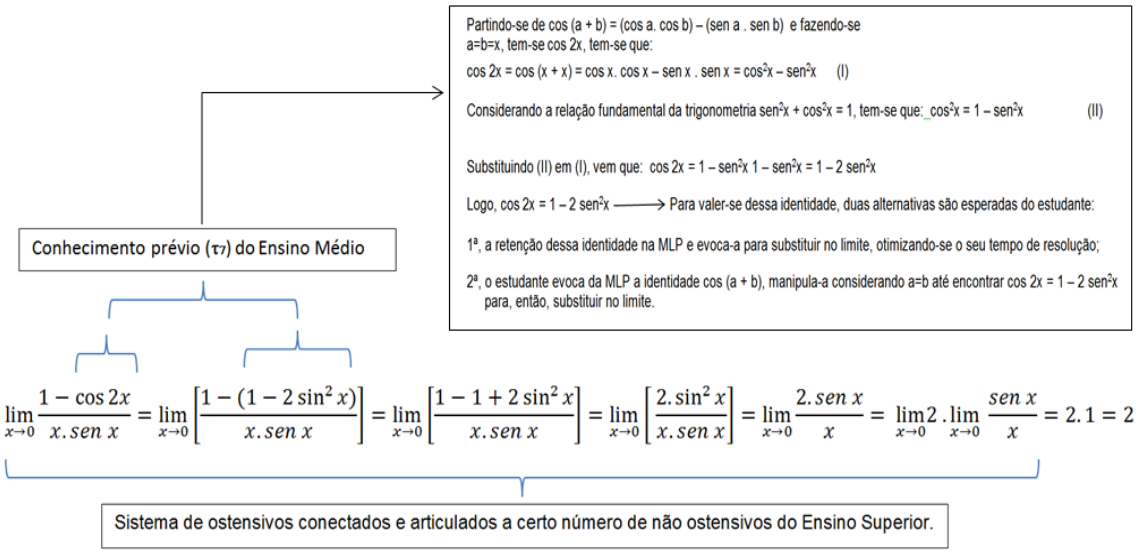
- Possivelmente, o estímulo sensorial (círculo trigonométrico) não tenha sido potencialmente significativo, conforme Willingham (2011), apesar de representar a base do desenvolvimento da trigonometria no círculo ou das Funções Trigonométricas. Conforme esse pesquisador, esse traço compromete a qualidade da informação provinda do meio externo;
- Provavelmente, a falta de conhecimentos prévios – pela ótica da DM, segundo Artigue (2004), Gueudet (2008a) e Faro (2011) ou pelas vias da NC, conforme Guzzo (1987) e Izquierdo (2011) – específicos às propriedades das Funções Trigonométricas. Tal pré-requisito está associado a existência de fatos e procedimentos na Memória de Longo Prazo;
- Conforme está indicado nos registros encontrados das nove amostras, cujo desempenho foi classificado *abaixo do básico*, observou-se que não foi considerado a articulação entre a representação gráfica e algébrica do período de uma função, sobretudo, se a vaiável dependente sofreu alteração de produto e de soma, ou seja: Se f (x) = cos x, então período P = 2π. Mas, se f (x) = cos (5x +1), então P = 2π/5. Nesse caso, a vaiável x sofreu alteração de produto fazendo com que a função se repita 5 vezes no intervalo 2π – implicando na alteração do período – e depois sofrendo uma translação para a direita de uma unidade, conforme esboço dos gráficos abaixo:



Apenas três alunos do grupo B afirmaram que utilizaram a folha contendo o estímulo sensorial. A explicação dos demais girou em torno da evocação do não ostensivo “propriedade algébrica de

período", aplicando-o como técnica τ_6LDEM2, τ_8LDEM2 e τ_{13}LDEM2 (os tensivos manipulados). De certa forma, essas dificuldades confirmaram-se, em parte, por meio da análise a priori.

- Mesmo recorrendo e manipulando-se os ostensivos escriturais algébrico-trigonométricos por meio das técnicas acima, verificou-se a dificuldade para aplicar a técnica τ_7 que necessitaria de uma dose *flexibilidade cognitiva* e *atenção* (funções cognitivas) para desmembrar *cos (x+2π) em (cos x. cos 2π – sen x .sen 2π)* e repetir essa técnica em *cos [(5x+ 1)+10π],* obtendo-se: *[cos (5x+ 1). cos 10π – sen (5x+1). sen 10].* Tais identidades são imprescindíveis para aplicar nos cálculos de limites trigonométricos que resultem em indeterminação, como por exemplo:



Considerando-se articulados: a definição de periodicidade por meio da igualdade f (x + T) = f (x), ∀ x ∈ IR, as identidades trigonométricas acima e as visualizações dos gráficos de f (x) = cos (x) e f (x) = cos (5x +1), possivelmente, a tarefa seria resolvida com sucesso. No entanto, a ausência dessa completa articulação, foi pouco enfatizada nas amostras analisadas e, conforme Artigue (1995), residem nessas circunstâncias os obstáculos que dificultam a aprendizagem do

Cálculo, provocada, segundo essa pesquisadora, pela ruptura entre geometria e álgebra, conforme mostrado acima.

Como forma de demonstrar essas constatações, selecionaram-se alguns excertos das amostras, cujo desempenho foi observado como *abaixo do básico*:

No caso dos estudantes brasileiros participantes, as próximas figuras revelaram, respectivamente:

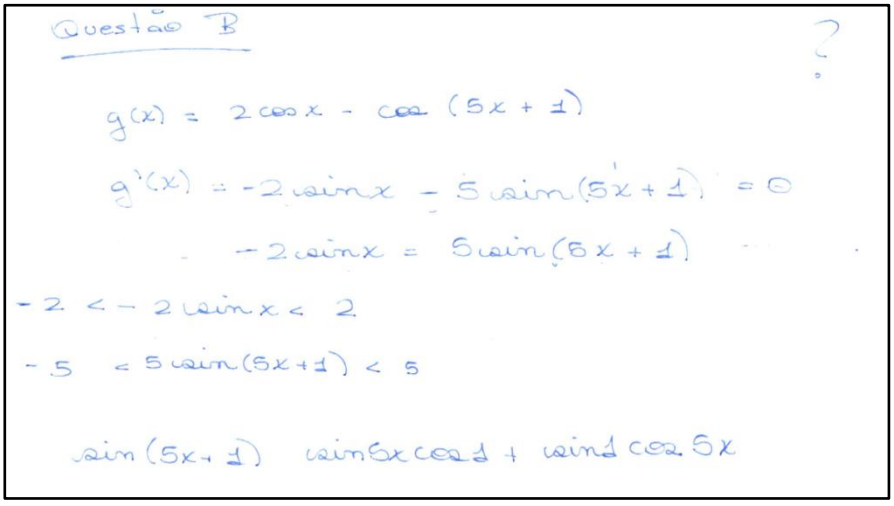


Figura 85: Excerto da Amostra BEB5.
Fonte: Protocolos experimentais da pesquisa (2015).

Por meio do exame desses registros, observou-se que:

- foi aplicada, inequivocamente, a técnica de derivação;
- a derivada de g (x) foi igualada a zero, cujo propósito não foi compreendido e distanciou-se do esperado;
- foi inserido estudos de inequação de forma aleatória;
- residiu na ausência de conhecimentos prévios esperados (MLP), mostrados nessa figura por meio do símbolo de interrogação;
- houve ausência de um sistema articulado de ostensivos e não ostensivos adequados;
- não existiram possíveis considerações geométricas;

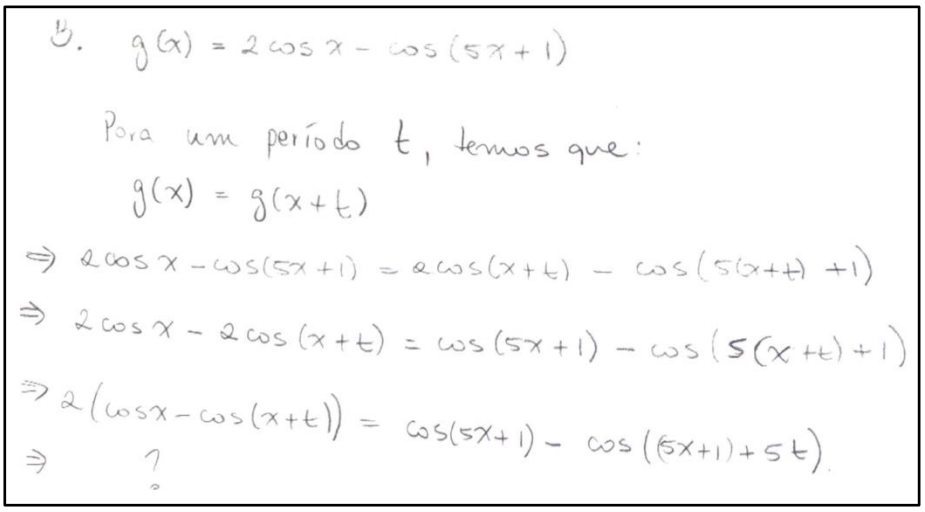


Figura 86: Excerto da Amostra AEB2.
Fonte: Protocolos experimentais da pesquisa (2015).

Nesse caso, verificou-se:

- que foi evocado o não ostensivo relativo à definição de período de uma função: existência de MLP sobre as noções analisadas;
- ausência de MLP na manipulação dos ostensivos esperados do Ensino Médio para resolver o *cos (a + b)* mostrado nessa figura por meio do símbolo de interrogação;
- ausência de outros conhecimentos prévios esperados;
- ausência de sistema articulado de ostensivos e não ostensivos adequados;
- ausência de considerações geométricas;

A situação dos estudantes voluntários franceses foi mostrada nas figuras seguintes, respectivamente:

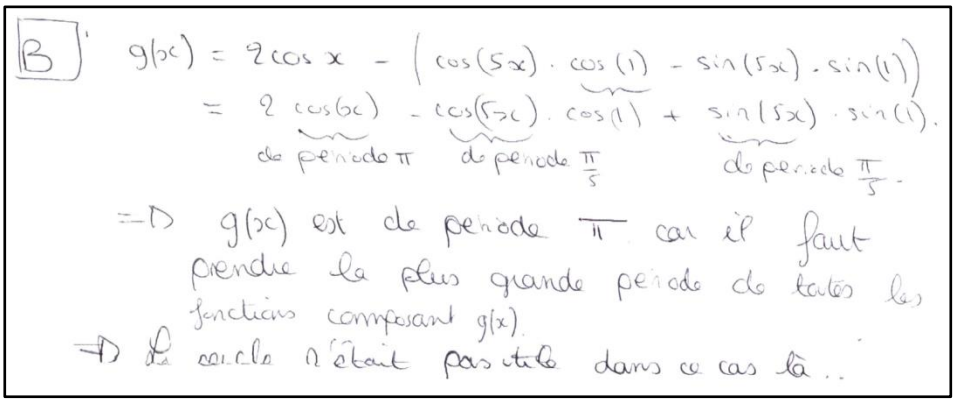


Figura 87: Excerto da Amostra BEF5.
Fonte: Protocolos experimentais da pesquisa (2015).

No desenvolvimento dessa tarefa, foram observados sinais em que:

- desconsiderou-se o discurso tecnológico (θ_7 pinçada do *2de S*) sobre período de uma função para iniciar a resolução da tarefa (erro 01);
- foi evocada a técnica τ_7 (*1re S*) apenas pelo reflexo imediato ao desdobramento da identidade *cos (a + b)*, pois utilizou-se, em seguida, a análise equivocada do período em cada uma das parcelas (erro 02);
- arbitrariamente, dada à ausência legitimada de discurso tecnológico, justificou que o período da função *g*(x) é π porque ele é o maior quando comparado aos períodos das parcelas (erro 03);
- os erros 01, 02 e 03 verificados, denunciaram a completa ausência de aprendizagem das noções em jogo, decorrente da inexistência do sistema articulado de ostensivos e não ostensivos na MLP;
- residiu a ausência de outros conhecimentos prévios esperados;
- perseverou-se a ausência de considerações geométricas quando se comparou essa amostra às anteriores.

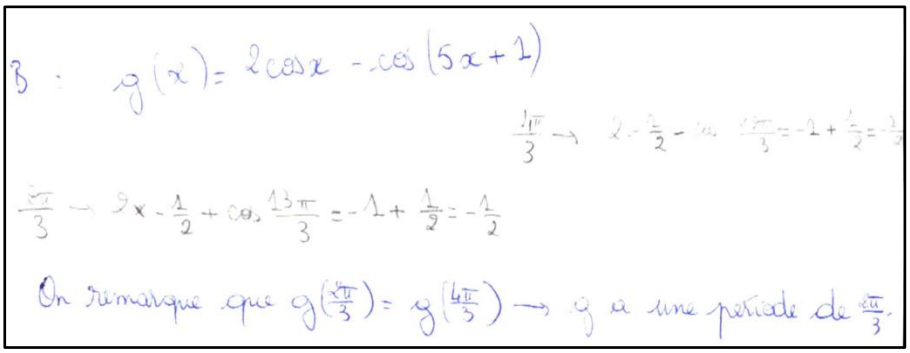


Figura 88: Excerto da Amostra AEF5.
Fonte: Protocolos experimentais da pesquisa (2015).

Nas poucas linhas da resolução dessa tarefa, constatou-se:

- pelas vias das pesquisas fundamentadas na Neurociência Cognitiva, um grau significativo de indícios precoce de *declínio da performance cognitiva*[87], na medida em que, o estudante: introduz, casualmente, os arcos de $4\pi/3$ e $2\pi/3$; calcula, arbitrariamente, o cos $23\pi/3$ e o cos $13\pi/3$; compara $g(2\pi/3)$ como igual a $g(4\pi/3)$ e conclui que o período de $g(x)$ é $2\pi/3$;
- a inexistência de quaisquer traços de MLP relativos aos não ostensivos θ_7 (pinçado do *2^de S*), e consequentemente, a evocação da técnica τ_7 (*1^re S*), mesmo "olhando-se" para a expressão *cos (a + b)*;
- a ausência legitimada de discurso tecnológico quando buscou justificar o período da função $g(x)$ como $2\pi/3$ decorrente, talvez, da relação de congruência entre os arcos analisados, cujos cossenos resultam em -1/2;
- a ausência de outros conhecimentos prévios esperados;
- persistiu a ausência de considerações geométricas quando se comparou essa amostra às anteriores.

Sob o abrigo das considerações previstas na análise, a priori, para essa tarefa (consequentemente contempladas) e pelas evidências constadas nas amostras **BEB5**, **AEB2**, **BEF5** e **AEF5** – pinçadas dos países relacionados nessa pesquisa e em diferentes condições de execução –, faz-se necessário tecer algumas

[87]Essa denominação pode ser atribuída em pessoas, cujos processos sejam, segundo Antunes *et al* (2006, p. 109), *"baseados em habilidades fluidas, tais como tarefas aprendidas mas não executadas, sofrem declínio"*, ou seja, diminuição do desempenho.

explanações sobre a MLP, cujos fundamentos alicerçados nessa função cognitiva, selecionada para compreender as possíveis contribuições da Neurociência Cognitiva, no processo de transição das Funções Trigonométricas EM-ES, são idênticos aos que justificam a fabricação dos psicofármacos, sugeridos à população de pessoas portadoras de patologias atreladas a problemas de memória.

Em recentes estudos desenvolvidos na Inglaterra, determinou-se o tempo e a sequência hierarquizada, de algumas funções cognitivas envolvidas, em etapas, bem como, posteriores estágios esperados para formação de uma MLP que, segundo Carter *et al* (2012), são combinados por:

- Etapa 1: ATENÇÃO com 0,2 segundo;
- Etapa 2: EMOÇÃO com 0,25 segundo;
- Etapa 3: SENSAÇÃO com 0,2 a 0,5 segundo;
- Etapa 4: MEMÓRIA DE TRABALHO com 0,5 segundo a 10minutos;
- Etapa 5: PROCESSAMENTO HIPOCAMPAL com 10 minutos a 2 anos;
- Etapa 6: CONSOLIDAÇÃO com 2 anos em diante.

A figura a seguir ilustra o esboço dessa formação:

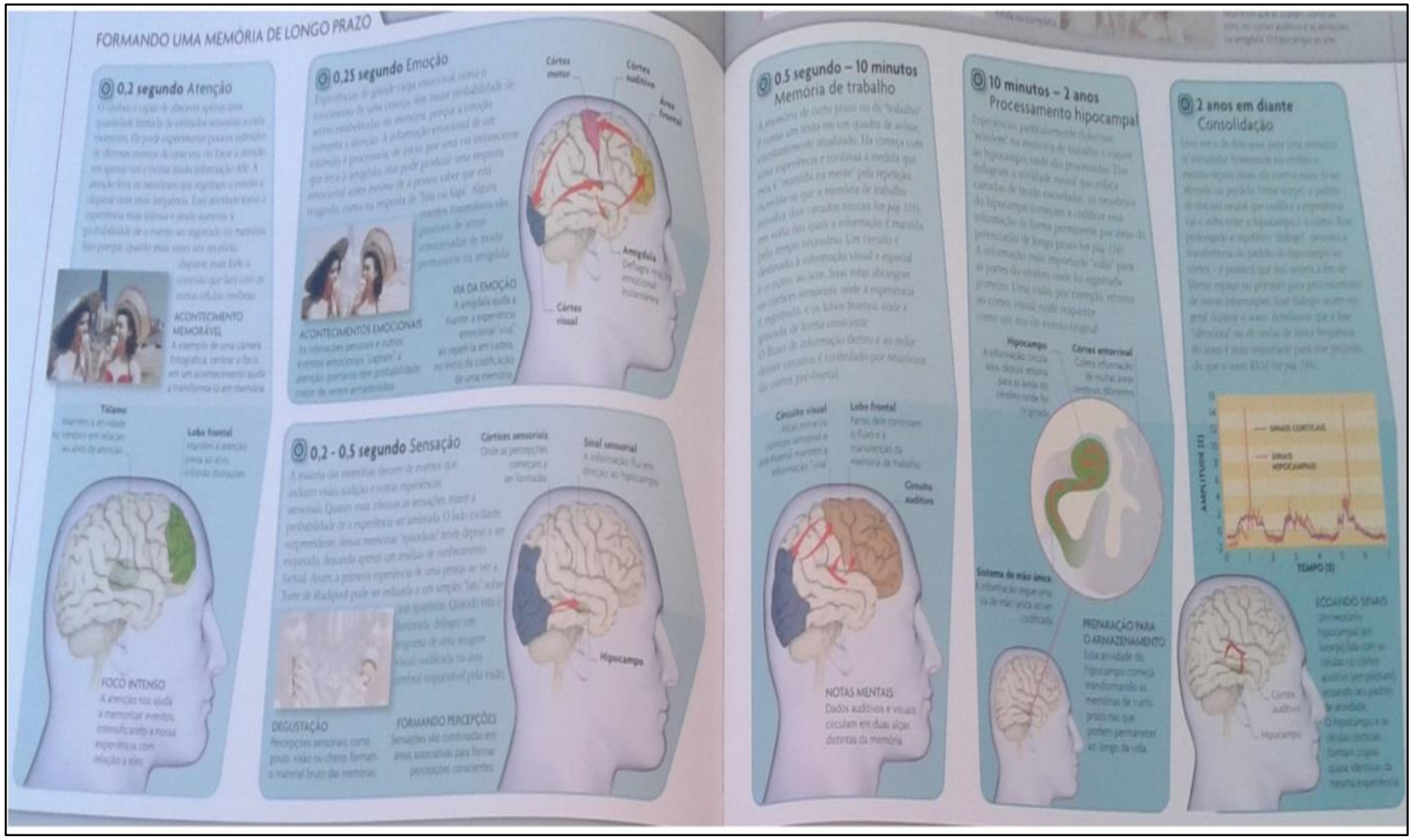


Figura 89: Etapas de formação da MLP.
Fonte: CARTER *et al* (2012, p. 158-159).

Esse recurso foi introduzido, nessa parte da análise neurocognitiva, devido ao descompasso entre o estímulo sensorial (basal para a evocação das noções de Funções Trigonométricas) e o desempenho dos estudantes voluntários do grupo B, principalmente.

Com base nessas considerações e no ponto de vista de Antunes *et al* (2012) sobre habilidades fluidas – ratificadas pelos sinais S_{LDESuB}-02, S_{pESuF}-01 e S_{mESuF}-02 identificados nas análises institucionais em capítulos anteriores, compreendeu-se os possíveis motivos que justificam a ausência de habilidades para determinação do período da função *g(x) = 2 cos x – cos (5x + 1)*: poucos investimentos didáticos para consolidação dos conhecimentos relativos a definição, propriedades e técnicas sobre a determinação do período de uma função.

Contudo, no caso brasileiro, especificamente, reside no sinal S_{pESuB}-01 (dos planos de ensino da universidade) a defesa da necessidade dos conhecimentos das Funções Trigonométricas para resolução de $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos 2x}{x.sen\ x}$, entre outros. Sendo assim, tanto esse sinal como a resolução do limite proposto, justifica a necessidade de redimensionar os investimentos didáticos dirigidos à facilitação da aprendizagem das noções de Funções Trigonométricas no Ensino Médio.

Dessa segunda análise neurocognitiva para a resolução de tarefas no nível mobilizável, mobilizadas no Ensino Médio, mas que precisam servir como conhecimentos prévios (***não ostensivos*** previstos no item (2) da análise a priori) supostos disponíveis no Ensino superior, enumerou-se algumas condições que se acreditou, serem favoráveis, para a formação de uma Memória de Longo prazo e, consequentemente, para a transição das Funções Trigonométricas EM-ES, a saber:

- Exista estímulo sensorial potencialmente significativo;
- Estímulos sensoriais devem ser estruturados e apresentados considerando-se o desenvolvimento epistemológico das noções em jogo que sinalizará o sentido necessário para ativar o sistema límbico do cérebro;
- Existam conhecimentos prévios na MLP;
- Exista a articulação entre registros geométricos e algébricos;

- Exista a manipulação de objetos ostensivos escriturais algébrico-trigonométricos que provoquem o exercício das funções cognitivas, *flexibilidade cognitiva* e *atenção*;
- Respeito às etapas para formação de MLP na constituição e seleção de tarefas;
- Tarefas que represente o nível mobilizável de funcionamento do conhecimento devem ser superadas pelos estudantes antes que ocorra a mudança para o nível seguinte, o disponível.

Desse ponto em diante, foi inserido, conforme previsto, uma breve estatística sobre o desempenho dos estudantes representados pelas amostras codificadas nos Quadros 91,92 e 93 (Cf. p. 402). Conforme, levantamento realizado, segue:

Quadro 103

*Desempenho dos estudantes na TAREFA "B" – Amostra Secundária 1(a)***.**

Tipo da amostra	**Número de Voluntários** (estudantes UD1)	**Escala dos Níveis de Proficiência de Matemática do SRESP (2013)**				**NM↔ Adequado**
		Abaixo do Básico	Básico	Adequado	Avançado	
Grupo A	10	**AEBSEM1 AEBSEM2 AEBSEM3 AEBSEM4 AEBSEM5 AEBSEM6 AEBSEM7 AEBSEM8 AEBSEM9 AEBSEM10**				0%
Grupo B	15	**BEBSEM1 BEBSEM2 BEBSEM3 BEBSEM4 BEBSEM5 BEBSEM6 BEBSEM7 BEBSEM8 BEBSEM9 BEBSEM10 BEBSEM11 BEBSEM12 BEBSEM13 BEBSEM14 BEBSEM15**				0%

Fonte: O autor (2015)..

Observando-se os resultados da última coluna do quadro acima, bem como os registros de todas as amostras, verificou-se, por meio dessa constante, que a transição EM-ES, dos estudantes voluntários do curso de Licenciatura em Matemática da UD1 participantes dessa investigação, encontra-se comprometida, sobretudo, quando esses estudantes se deparam na disciplina Cálculo I com questões que solicitem resolver o $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos 2x}{x.sen\, x}$, já que deveriam ter apresentado desempenho adequado, segundo descrição do SARESP (2013), na tarefa B proposta aos mesmos.

Além disso, e, levando-se em consideração a escala do SARESP (2013), a apreciação das referidas amostras demonstraram o grau avançado de insuficiência acerca do domínio matemático analisado, o das Funções Trigonométricas, contribuindo, dessa forma, para aumentar o abismo entre o binômio competência-habilidade, podendo esse também ser interpretado segundo as lentes de Chevallard (1998), (saber)-(saber-fazer). Caso esse desequilíbrio não seja superado até o final do Ensino Superior, provavelmente, contribuir-se-á para um tipo de desserviço à educação, quando tais lacunas acompanharem os momentos de aprendizagem dos futuros alunos.

Ao longo da apreciação das amostras, verificou-se um aumento significativo nas declarações (depoimentos) dos estudantes, que reforçaram sentimentos de impotência, tais como: *"não estudei esse conteúdo"; "não me lembro desse assunto"*; *"não sei fazer"*, por exemplo. Para tanto, continuam valendo os postulados de Izquierdo (2011) que para existir a MLP, faz-se imprescindível existir primeiro, a experiência, devendo essa ser contagiada de sentido e significado. Assim, reside na ausência dessa prerrogativa a impossibilidade de recuperar, mesmo na presença de um estímulo sensorial, informações da MLP.

A seguir, apresentaram-se os dados referentes ao desempenho dos alunos voluntários, de um curso de Engenharia da mesma universidade:

Quadro 104

Desempenho dos estudantes na TAREFA "B" – Amostra Secundária 1(b).

Tipo da amostra	**Número de Voluntários** (estudantes UD1)	**Escala dos Níveis de Proficiência de Matemática do SRESP (2013)**				**NM↔ Adequado**
		Abaixo do Básico	Básico	Adequado	Avançado	
Grupo A	13	**AEBSEE1 AEBSEE2 AEBSEE3 AEBSEE4 AEBSEE5 AEBSEE6 AEBSEE7 AEBSEE8 AEBSEE9 AEBSEE10 AEBSEE11 AEBSEE12 AEBSEE13**				0%
Grupo B	13	**BEBSEM1 BEBSEM2 BEBSEM3 BEBSEM4 BEBSEM5 BEBSEM6 BEBSEM7 BEBSEM8 BEBSEM9 BEBSEM10 BEBSEM11 BEBSEM12 BEBSEM13 BEBSEM14 BEBSEM15**				0%

Fonte: O autor (2015).

Observou-se que, em relação ao desempenho da tarefa A, os estudantes voluntários desse curso decaíram em seus resultados, potencializando-se a ausência de conhecimento prévio disponível sobre as propriedades das Funções Trigonométricas. Por meio dessa descrição, pode-se inferir que, existe a possibilidade de não atingirem o desempenho esperado, em tarefas em que o Nível do Funcionamento do Conhecimento (NFC) seja o mobilizável, pois não foram consolidados na MLP, um sistema articulado de ostensivos e não ostensivos inerente as noções em jogo.

Diferentemente dos resultados da tarefa A, outro tipo de contramão se estabeleceu, nas amostras dos estudantes de um curso de Engenharia da UD2 que, conforme os dados apresentados, no quadro a seguir provocou mudanças sobre as considerações culturais, a saber:

Quadro 105

Desempenho dos estudantes na TAREFA "B" – Amostra Secundária 2.

Tipo da amostra	**Número de Voluntários** (estudantes UD2)	**Escala dos Níveis de Proficiência de Matemática do SRESP (2013)**				**NM↔ Adequado**
		Abaixo do Básico	Básico	Adequado	Avançado	
Grupo A	10	**AEBSPE1 AEBSPE2 AEBSPE3 AEBSPE4 AEBSPE5 AEBSPE7 AEBSPE8 AEBSPE10**		**AEBSPE6 AEBSPE9**		20%
Grupo B	10	**BEBSPE1 BEBSPE2 BEBSPE3 BEBSPE4 BEBSPE5 BEBSPE6 BEBSPE8 BEBSPE9 BEBSPE10**		**BEBSPE7**		10%

Fonte: O autor (2015).

Verificou-se, inicialmente, uma pequena variação nos resultados do cenário brasileiro, embora também tenha sido percebido quando, comparando-se os resultados apresentados na tarefa A com os da tarefa B específicos dos estudantes voluntários da UD2, um considerado desnível entre os seus respectivos desempenhos que, nesse caso, apontam um declínio no rendimento dos participantes.

Anteriormente, as questões de cultura possibilitaram uma defesa em prol dos desempenhos regional dos estudantes. No entanto, observou-se que, aumentado um nível na hierarquização do funcionamento do conhecimento, as diferenças culturais não foram suficientes para justificar o descompasso entre o esperado (NFC) e o existente (desempenho). Inclusive, levando-se em conta os resultados da **Amostra Principal**.

Com efeito, o que pode ser considerado fato é que, independentemente de nacionalidade, os participantes dessa pesquisa não atingiram o desempenho

esperado diante de uma tarefa no nível mobilizável, considerando-se as prerrogativas de Robert (1997, 1998).

A insuficiência nos resultados permitiu conjecturar que há necessidade de revisitar, no Ensino Médio, o percurso metodológico que priorizou a apresentação das noções de Funções Trigonométricas, especificamente, suas propriedades analíticas, geométricas e algébricas, considerando-se os postulados de Artigue (1998, 2004) e Gueudet (2008a).

Residem na possibilidade dessa revisão, ressignificação e reestruturação metodológica, as bases teóricas do campo da Neurociência Cognitiva, inicialmente, por respaldar cientificamente, conforme Kandel (1991) a ciência que analisa, em nível molecular, os fundamentos da aprendizagem humana. Em segundo lugar, articular a essas perspectivas os fundamentos da Didática da Matemática, considerando-se os ensinamentos de Chevallard (1998) por meio da TAD e de Robert (1997, 1998) via os NFC, para estruturar o cenário onde a Atividade Matemática dos estudantes precisa ser mobilizada.

Espera-se, dessa forma, que a transição das Funções Trigonométricas EM-ES ocorra diminuindo-se impactos que reflitam, posteriormente, na Aprendizagem Matemática dos alunos da Educação Básica, tanto no Brasil como na França.

7.3.4.2.3 – Desempenho dos participantes da pesquisa na tarefa C:

Na última fase dessas análises, foram apresentados no quadro abaixo, dados sobre os resultados dos participantes que auxiliaram a compreensão da relação entre o NFC (esperado) e o desempenho dos voluntários (existente), conforme segue:

Quadro 106

Desempenho dos estudantes na TAREFA "C" – Amostra Principal.

Tipo da amostra	Número de Voluntários	Escala dos Níveis de Proficiência de Matemática do SRESP (2013)				ND↔ Avançado
		Abaixo do Básico	Básico	Adequado	Avançado	
Grupo A	04 (BR)	**AEB3**			**AEB1 AEB2 AEB4**	75%
	07 (FR)	**AEF5**			**AEF1 AEF2 AEF3 AEF4 AEF6 AEF7**	85,72%
Grupo B	05 (BR)	**BEB2 BEB4**			**BEB1 BEB3 BEB5**	60%
	07 (FR)	**BEF1 BEF3 BEF4 BEF6**			**BEF2 BEF5 BEF7**	42, 85%

Fonte: O autor (2015).

De pronto, os dados numéricos apresentados no quadro acima causaram um impacto pela recuperação e evolução nos percentuais do grupo A e, contrariamente, no grupo B. Cabe esclarecer que esses percentuais refletiram os resultados em que, tanto o desenvolvimento, quanto o resultado final estavam absolutamente corretos. Nesse sentido, confirmaram-se as expectativas da análise a priori do grupo A que, conforme a maioria das amostras, não apresentou as dificuldades inicialmente previstas.

Inversamente, o grupo B, considerando o resultado do desempenho na tarefa B, obteve resultados pouco superiores que, segundo as previsões da análise a priori, que foram justificadas pelo fato, principalmente, de: não utilizarem do círculo trigonométrico como ponto de partida; falta de atenção na cópia e transporte de dados, dentro do desenvolvimento da questão; erros de cálculos numéricos; domínio da manipulação dos ostensivos escriturais (algébricos) [**BEF4**]; identificação de propriedades das Funções Trigonométricas (duplicação de arcos e arco metade) [**BEF1**, **BEF6**, **BEB4**]; estabelecer a articulação entre as medidas de arcos e números reais [**BEB2**]; reconhecer o eixo dos senos como eixo para controlar as áreas S (α) [**BEF3**].

Com efeito, algumas evidências permitiram concluir que:

- No grupo A, existe um único caso em que a relação pessoal existente articulada às noções de Funções Trigonométricas na amostra AEF5 está, em sua totalidade, abaixo do grau esperado pelas expectativas institucionais para o mesmo objeto, pois em nenhum dos NFC (técnico, mobilizável ou disponível) foi possível atingir o desempenho esperado segundo a escala do SARESP (2013);
- Ainda no grupo A, está claro que nas amostras AEB1, AEF2, AEF4 e AEF6, a relação pessoal existente relativa às noções em jogo atingiram o grau desejado pelas expectativas institucionais para as mesmas noções, pois em todos os NFC esperados correspondem suas respectivas equivalências de desempenho validadas pelo SARESP (2013);
- No grupo B, a validação da relação pessoal foi possível ser verificada nas amostras BEB1 e BEF7, dado o alcance em todos os NFC propostos nas três tarefas que foram atingidos sob os critérios estabelecidos pelo SARESP (2013).

A respeito da relação pessoal, inerente às noções em tela nas demais amostras, não foi possível concluir sobre a dimensão de sua frequência dada a osciliação que se estabeleceu, principalmente, entre a tarefa B (nível mobilizável) e a tarefa C (nível disponível). Nesse sentido, observou-se, especificamente, no caso da tarefa C, que o apelo ao domínio da geometria quando articulado ao domínio das funções, possibilitou crescimento proporcional aos participantes do grupo B, considerando-se os resultados da tarefa B.

Dessa forma, esse viés que segue como um vetor no contrafluxo dos resultados das análises institucionais sinaliza a existência de possibilidade para minimizar as rupturas epistemológicas entre a trigonometria do triângulo retângulo e a trigonometria da circunferência em que, ao menos, no momento da concepção das tarefas, tenha-se clareza de tais ruputuras, para que elas sejam consideradas como alvos de uma transposição didática, mais adequada ao desenvolvimento da Aprendizagem Matemática dos estudantes da Educação Básica.

A seguir, foram inseridos alguns excertos de amostras do grupo A que, apesar de não terem alcançado a relação pessoal esperada pelas vias institucionais, desenvolveram estatégias craitivas para demonstrar os resultados, a saber:

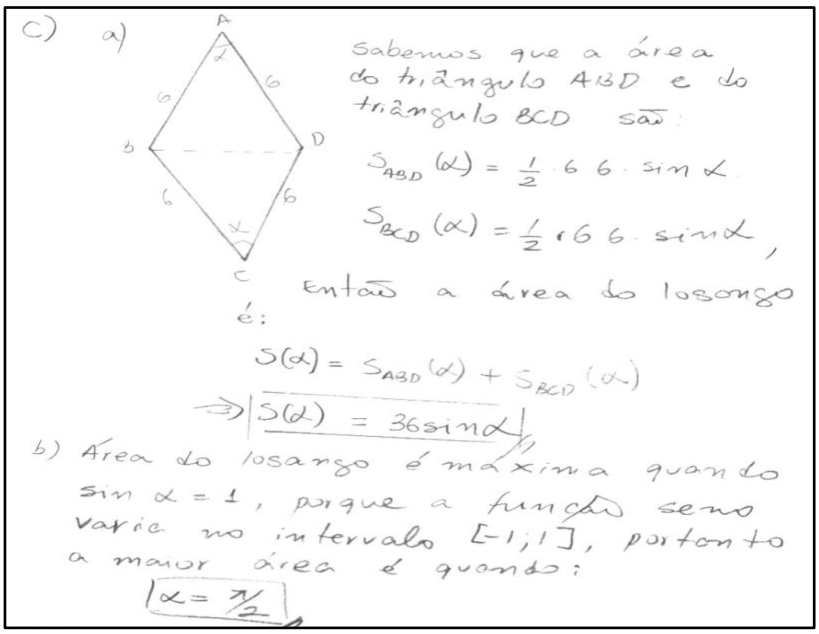


Figura 90: Amostra brasileira AEB2.
Fonte: Protocolos experimentais da pesquisa (2015).

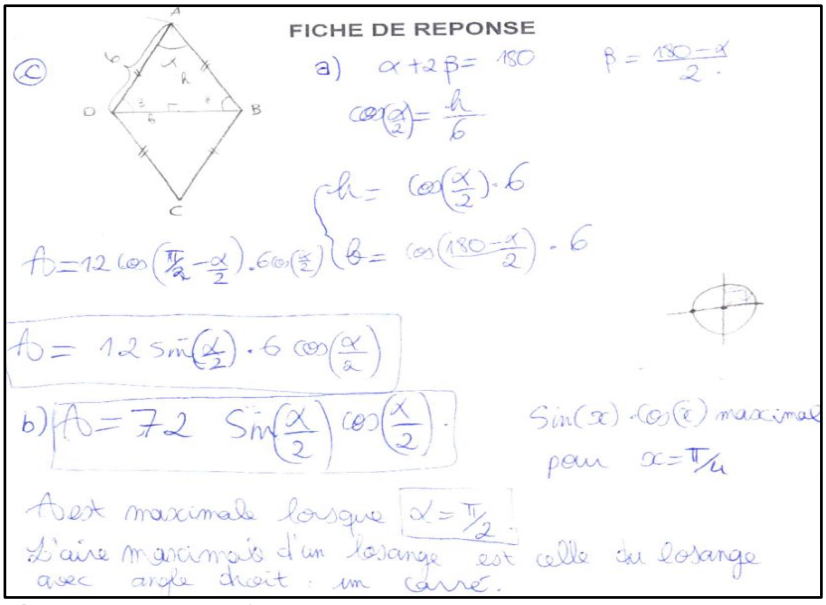


Figura 91: Amostra francesa AEF1.
Fonte: Protocolos experimentais da pesquisa (2015).

Considerando-se as descrições do item (7.2.3 – C_{TME} - t C), verificou-se que nessas amostras foi privilegiado, de certa forma a **ALTERNATIVA "B"** (*Calcular d_1 e d_2 para determinar S*), com pequenas variações. Uma delas encontra-se na amostra **AEB2** em que se optou por utilizar a fórmula da "lei dos senos", aplicada

duas vezes nos triângulos que formam o losango, para o cálculo da área S em função de α. Enquanto que na amostra **AEF1**, optou-se por outras técnicas algébrico-trigonométricas que estão articuladas a não ostensivos, cujos discursos tecnológicos referem-se às propriedades da geometria plana (soma de ângulos internos de um triângulo), as relações trigonométricas no triângulo retângulo e também as relações entre seno e cosseno de ângulos complementares.

Observou-se nessas amostras, bem como nas dispostas no Quadro 106 (Cf. p. 428), em que os índices alcançaram os objetivos, tanto no Brasil como na França, à existência e uso adequado dos conhecimentos prévios, necessários para a resolução da tarefa em tela, bem como o sistema articulado de ostensivos e não ostensivos que permitiram os estudantes entrarem em Atividade Matemática.

Na sequência, destacaram-se também alguns excertos de amostras do grupo B que, apesar de não terem superado, como era esperado, os índeces do grupo A, de certa forma, valeram-se, possivelmente, dos recursos das funções cognitivas, sobretudo, da MLP quando deixaram registrados no itinerário do desenvolvimento da tarefa proposta, alguns traços do funcionamento cognitivo. Em sua maioria, as amostras ocultadas nesse exemplo, por uma questão de espaço, espelharam uma estruturação semelhante, cujas estratégias lançadas justificaram a apresentação do estímulo sensorial, a saber:

- Constatou-se MLP, mesmo apenas com um único e rápido contato visual direcionado ao objeto de estimulação, pois houve evocação de informações (não ostensivos) estudadas há, pelo menos, dois anos;
- Confirmou-se a “flexibilidade cognitiva” por meio dos diferentes “caminhos” escolhidos pelos voluntários para atingir os objetivos;
- Averiguou-se a função cognitiva “atenção” por meio de articulações, do começo ao fim, para resolução da tarefa;
- Observou-se também a “memória de trabalho” que permitiu conexão entre o meio externo (a tarefa) e a MLP.

Esse conjunto de funções cognitivas pode ser apontado nas amostras abaixo:

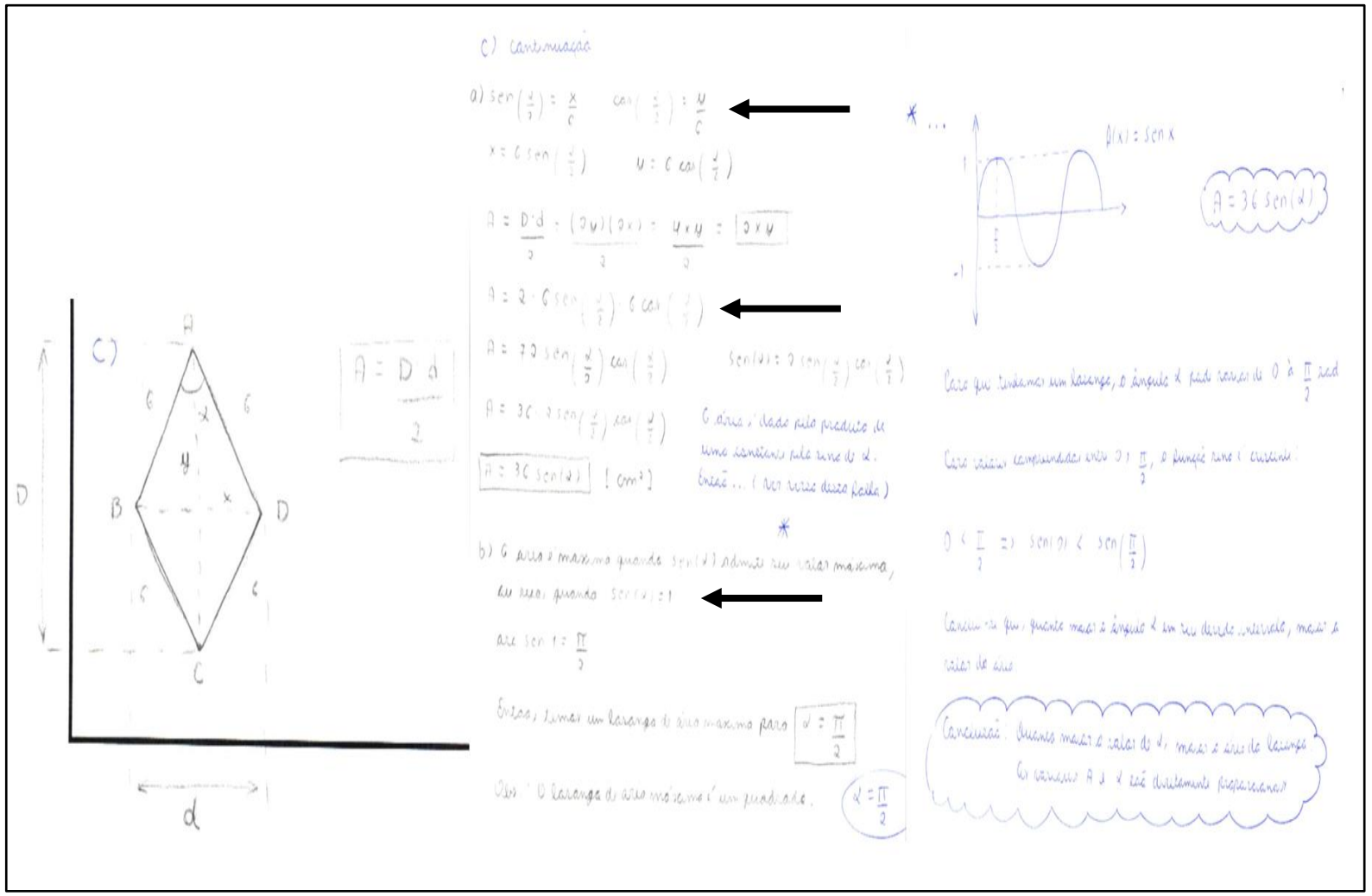


Figura 92: Amostra brasileira BEB1.
Fonte: Protocolos experimentais da pesquisa (2015).

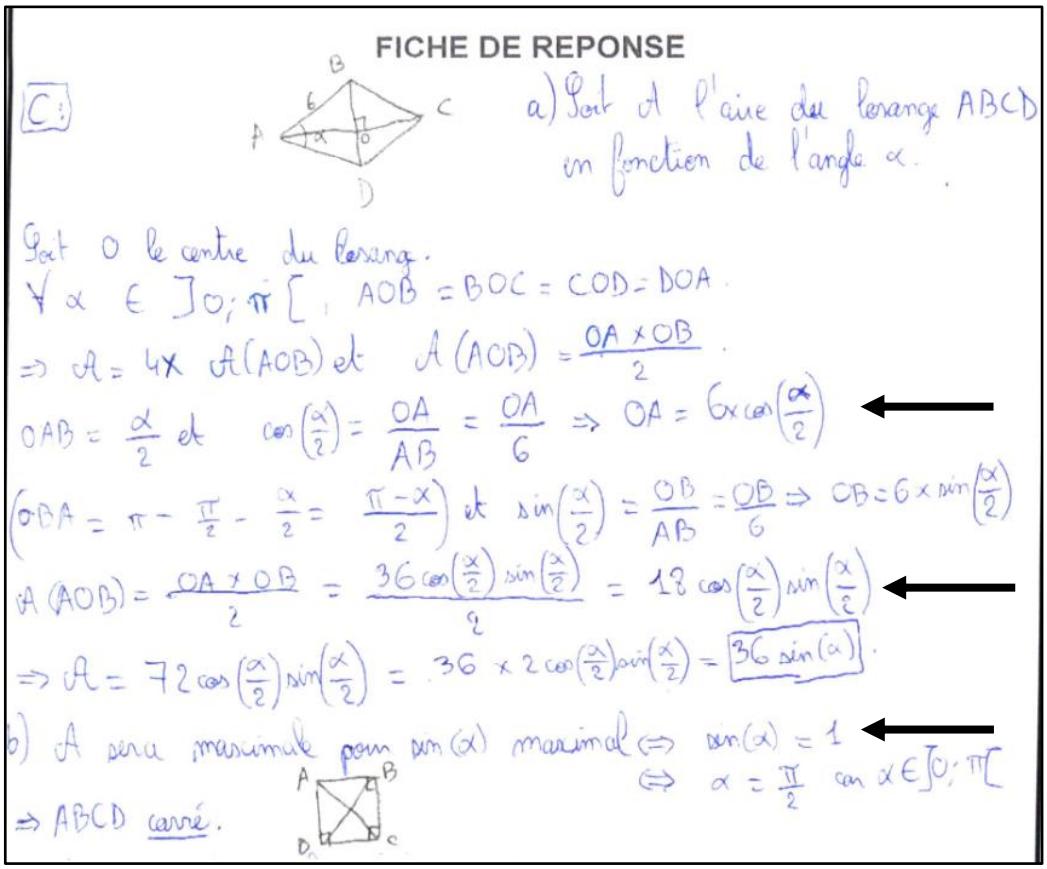


Figura 93: Amostra francesa BEF2.
Fonte: Protocolos experimentais da pesquisa (2015).

Nesses dois casos, observou-se também o espelhamento parcial dos descritores do item (7.2.3 – C_{TME} - t C), priorizando-se, de certa forma a mais a **ALTERNATIVA "B"** (*Calcular d_1 e d_2 para determinar S*) que a **ALTERNATIVA "A"** (*Desconsiderar o cálculo de d_1 e d_2 para determinar S*), embora essa última tenha sido verificada, em pequena dose, por meio da evocação do não ostensivo gráfico inserido na amostra **BEB1** e outras pequenas variações.

Também foi percebido o momento da articulação entre a geometria e função, domínios matemáticos distintos epistemologicamente, cuja transposição didática, por meio das tarefas encontradas nos Livros Didáticos analisados, tanto no Brasil como na França, refletiram, segundo as análises institucionais, mais uma ruptura do que uma articulação ou passagem, sempre que os tipos de Tarefas referentes à trigonometria do triângulo retângulo solicitavam o cálculo do ângulo, dados o seno (cosseno) correspondente. Esse movimento exigia dos alunos o raciocínio empregado pela função inversa que, no dado estágio de sua escolaridade,

ainda não tinham conhecimento, já que, como um conteúdo ou noção matemática, o estudo da função está previsto para ser desenvolvido posteriormente.

Tanto na amostra **BEB1** como em **BEF2**, os momentos da articulação entre geometria e função (trigonométrica), segundo a seta (⟵) aponta, são:

- Na amostra **BEB1**: cálculo das diagonais *x* e *y*; cálculo da área do losango ABCD; cálculo da área máxima.
- Na amostra **BEF2**: cálculo da semi-diagonal maior ($\overline{OA}$) e da semi-diagonal menor ($\overline{OB}$); cálculo da área do triângulo AOB; cálculo da área máxima.

Isto posto, prevalecem nessas observações as mesmas justificativas sobre a verificação da MLP fundamentadas em Kandel (1991), Willingham (2011) e Izquierdo (2011), pois verificou-se o abrigo ao sistema articulado de ostensivos e não ostensivos de Chevallard (1994) referentes as noções trigonométricas que, por sua vez, repousa sobre a existência de fatos e procedimentos potenciais nela contidos.

Percebeu-se também que, como uma figura geométrica, o losango se constitui um marcador de familiaridade, dada o seu formato resultar da junção de dois triângulos, de simbologias (losango da bandeira do Brasil, perfil dos balões das festas juninas, formato de pedras preciosas, elementos arquitetônicos, etc.), da semelhança com o quadrado, entre outras, ajudam a ativação da MLP, pela ativação direta do sistema límbico que associou esses traços a lembranças prazerosas e que geraram “bem estar”. Por meio dessa motivação geométrica, fica mais fácil para o cérebro, segundo LeDoux (2001), armazenar informações que, inclusive articulam-se através de outros tipos de representação, por exemplo, a algébrica.

Nesse sentido, é senso comum entre a comunidade de neurocientistas do mundo inteiro, aqui representadas pelos trabalhos de Lezak *et al* (1976), Kandel (1991), LeDoux (2001), Gazzaniga (2006), Herculano-Houzel (2007), Lent (2008), Parent (2009), Willingham (2011) e Izquierdo (2011) que a qualidade ou sucesso de uma resposta sob a apresentação de um estímulo sensorial é diretamente proporcional ao número e diversidade de experiência vividas por um ser

humano. Apenas mergulhando-se em situações em que, diversidade e dinâmica, estimuladas, por meio das sinapses, produzirão vários tipos de neurotransmissores (5-HT, ACh, DA, NAD, entre outros) necessários para atuarem diretamente no processo da aprendizagem humana, especificamente, nesse caso, Aprendizagem Matemática.

Sobretudo, decorreu dessa efetiva comunicação entre a Didática da Matemática (DM) e a Neurociência Cognitiva (NC), a última etapa da análise neurocognitiva que, em defesa de uma tranquila transição do ensino das Funções Trigonométricas EM-ES, destacou as seguintes condições:

- Existência de diversidade de experiências dinâmicas;
- Existam conhecimentos prévios na MLP;
- Considerem-se os conhecimentos prévios existentes na MLP;
- Existam estímulos sensoriais relacionados aos marcadores de familiaridade potenciais articulados ao desenvolvimento das referidas noções matemáticas;
- Estímulos sensoriais devem ser introduzidos segundo um laboratório de sucessivas transposições didáticas buscando-se diminuir possíveis rupturas epistemológicas das noções em jogo;
- Estímulos sensoriais devem dispor de características de sentido esperado para a ativação do sistema límbico do cérebro;
- Tarefas que represente o nível mobilizável de funcionamento do conhecimento devem ser superadas pelos estudantes antes que ocorra a mudança para o nível seguinte, o disponível.

Com efeito, prosseguiu-se esse estudo considerando-se uma breve estatística sobre o desempenho dos estudantes representados pelas amostras codificadas nos Quadros 91, 92 e 93 (Cf. p. 402). Conforme, levantamento realizado, segue:

Quadro 107

Desempenho dos estudantes na TAREFA "C" – Amostra Secundária 1(a).

Tipo da amostra	**Número de Voluntários** (estudantes UD1)	**Escala dos Níveis de Proficiência de Matemática do SRESP (2013)**				**ND↔ Avançado**
		Abaixo do Básico	Básico	Adequado	Avançado	
Grupo A	10	**AEBSEM1 AEBSEM2 AEBSEM3 AEBSEM4 AEBSEM5 AEBSEM6 AEBSEM7 AEBSEM8 AEBSEM9 AEBSEM10**				0%
Grupo B	15	**BEBSEM1 BEBSEM2 BEBSEM3 BEBSEM4 BEBSEM5 BEBSEM6 BEBSEM7 BEBSEM8 BEBSEM9 BEBSEM10 BEBSEM11 BEBSEM12 BEBSEM13 BEBSEM14 BEBSEM15**				0%

Fonte: O autor (2015).

Nessa terceira tarefa, as amostras representadas pelos estudantes voluntários do curso de Licenciatura em Matemática da UD1 continuaram apontando a prevalência do nível "abaixo do básico", segundo a escala do SARESP (21013). Tal constatação permite conjecturar que a transição do ensino das funções Trigonométricas EM-ES encontra-se comprometida e, possivelmente, o emprego dessas noções matemáticas quando requisitadas para serem aplicadas na resolução dos limites trigonométricos da disciplina Calculo I não produzam resultados satisfatórios.

Na maioria dessas amostras, foram encontradas, as margens das tentativas de resolução da tarefa em tela, depoimentos semelhantes (registros escritos deixados pelos voluntários como forma de explicar o próprio insucesso)

utilizados na tarefa B, como por exemplo: *"não estudei esse conteúdo no Ensino Médio"* – **BEBSEM1**, **BEBSEM5***; "falto conhecimento"* – **BEBSEM4, BEBSEM7, BEBSEM15**; *"não me lembro desse assunto"* – **BEBSEM3, BEBSEM10, BEBSEM11**; *"não sei fazer"* – **BENSEM2**, por exemplo. Conforme defendido por Izquierdo (2011), anteriormente, a MLP só existirá se, primordialmente, ao mesmo tempo, também existir a experiência. Nesse sentido, é ineficiente tentar recuperar objetos não ostensivos, por mais potencial que seja o estímulo sensorial, caso não exista conteúdo na MLP.

Em seguida, verificou-se o desempenho dos alunos, num segundo curso da área das ciências exatas da mesma universidade:

Quadro 108

Desempenho dos estudantes na TAREFA "C" – Amostra Secundária 1(b).

Tipo da amostra	**Número de Voluntários** (estudantes UD1)	**Escala dos Níveis de Proficiência de Matemática do SRESP (2013)**				**ND↔ Avançado**
		Abaixo do Básico	Básico	Adequado	Avançado	
Grupo A	13	**AEBSEE1 AEBSEE2 AEBSEE3 AEBSEE4 AEBSEE5 AEBSEE6 AEBSEE7 AEBSEE8 AEBSEE9 AEBSEE10 AEBSEE11 AEBSEE12 AEBSEE13**				0%
Grupo B	13	**BEBSEM1 BEBSEM2 BEBSEM3 BEBSEM4 BEBSEM5 BEBSEM6 BEBSEM7 BEBSEM8 BEBSEM9 BEBSEM10 BEBSEM11 BEBSEM12 BEBSEM13 BEBSEM14 BEBSEM15**				0%

Fonte: O autor (2015).

Dados os resultados apresentados no quadro acima, corroboraram-se os mesmos fundamentos dispensados para o curso de Licenciatura em Matemática, evitando-se, nesse caso, repetir as mesmas considerações.

Na sequência, seguiu no contra-fluxo dos resultados das amostras anteriores, mudanças significativas, tanto no grupo A como no grupo B, quando foi analisado o desempenho dos participantes diante de uma tarefa de nível disponível.

Quadro 109

*Desempenho dos estudantes na TAREFA "C" – Amostra Secundária 2***.**

Tipo da amostra	**Número de Voluntários** (estudantes UD2)	**Escala dos Níveis de Proficiência de Matemática do SRESP (2013)**				**ND↔ Avançado**
		Abaixo do Básico	Básico	Adequado	Avançado	
Grupo A	10	**AEBSPE4 AEBSPE6 AEBSPE7**			**AEBSPE1 AEBSPE2 AEBSPE3 AEBSPE5 AEBSPE8 AEBSPE9 AEBSPE10**	70%
Grupo B	10	**BEBSPE1 BEBSPE4**			**BEBSPE2 BEBSPE3 BEBSPE5 BEBSPE6 BEBSPE7 BEBSPE8 BEBSPE9 BEBSPE10**	80%

Fonte: O autor (2015).

Os dados acima, mais uma vez, tal como ocorreu na análise da **Amostra Principal**, recorrem a justificativas (discursos tecnológicos) que favorecem a articulação, entre os domínios da geometria e das funções trigonométricas, por meio dos ostensivos manipulados, considerando-se que foram desenvolvidas as semelhantes argumentações apresentadas pelos participantes nas amostras **AEB2**, **AEF1**, **BEB1** e **BEF2**.

Nesse sentido, valem-se das mesmas conclusões, acerca da DM e da NC que legitimaram as anteriores.

Dessa forma, concluiu-se a análise neurocognitiva que considerou do ponto de vista da Didática da Matemática, três tipos de Tarefas articuladas,

respectivamente, a três níveis de funcionamento do conhecimento também diferentes, cuja proposta de resolução considerou quatro condições distintas: primeiramente, as variáveis da Neurociência Cognitiva: (a) sem apresentação do estímulo sensorial e (b) com a apresentação do estímulo sensorial; em segundo lugar, as nacionalidades envolvidas: (a) brasileira e (b) francesa.

Com efeito, foi possível mostrar nessas análises que é mínima a existência de MLP nos extratos das amostras observadas, justificadas pelas declarações dos estudantes voluntários por não “lembrarem” das referidas noções (caso verificado na **Amostra Secundária 1(a)**) ou pela ausência de manipulação de ostensivos adequados na maior parte dos extratos da **Amostra Principal**.

Sendo assim, foi possível constatar que, tanto o Ensino Médio quanto o Ensino Superior não levam em consideração os princípios da Neurociência Cognitiva que, por meio da existência solidificada da MLP, auxiliaria com mais eficácia o processo de neutralização da ruptura epistemológica, na transição do ensino das Funções Trigonométricas do EM-ES. Esse fato conduziu concluir que se faz necessário institucionalizar, desde o início do processo de aprendizagem, os princípios da Neurociência Cognitiva, cujas possibilidades de sucesso podem ajudar a modificar, os casos onde a aprendizagem não foi verificada.

Ao longo dessa análise, mobilizaram-se reflexões articuladas priorizando-se a Amostra Principal que envolveu estudantes de ambas as nacionalidades. No entanto, dada a extensão desse diagnóstico percebeu-se a necessidade de compreender a performance da transição EM-ES considerando-se a evolução desse processo, nas duas nações distinta.

Por esse motivo, o próximo capítulo, será desenvolvido um breve estudo comparado da transição do ensino das Funções Trigonométricas no Brasil e na França que considerou os resultados das análises institucionais dos dois países, bem como da análise neurocognitiva.

CAPÍTULO VIII

Análise Comparativa entre Brasil e França: pela compreensão horizontal da transição do Ensino das Funções Trigonométricas EM-ES.

Considerações iniciais

Nessa sessão objetivou-se, inicialmente, apresentar a evolução do processo de transição EM-ES, nos dois países, por meio das técnicas e tecnologias utilizadas nos diferentes níveis de ensino – possíveis de serem comparadas considerando-se as noções matemáticas em jogo –, bem como as análises institucionais e neurocognitivas anteriormente desenvolvidas. Em segundo lugar, analisar essa evolução considerando os pressupostos teóricos de Chevallard (2002) sobre os níveis de co-determinação.

A definição desses objetivos teve inspiração, primordialmente, nos trabalhos de:

- Campos, Artigue e Dias (2011, 2012) que desenvolveram, mais recentemente, um estudo comparativo no Ensino Médio entre os mesmos países em tela, priorizando-se as noções de matrizes e sistemas lineares. Essas pesquisadoras concluíram que existem diferenças nos habitats de ambos os países e também diferença na relação entre matrizes e sistemas lineares, sendo ambas as causadoras de impactos na transição EM-ES. Justificaram residir sobre as condições e restrições que moldaram às escolhas curriculares, bem como sua evolução, as origens desses descompassos;

- Matheus e Dias (2012) que investigaram a transição EM-ES por meio de um estudo comparativo entre Brasil e Moçambique destacando-se a noção de funções reais de uma variável real. Considerando-se os estudos de Gueudet (2008a) e Chevallard (2002), concluíram que esta noção é abordada no Ensino Fundamental, em nível documental, de forma semelhante, tanto no sistema brasileiro quanto no moçambicano. A principal diferença ocorre no Ensino Médio, onde é enfatizado o quadro analítico direcionando-se para as noções iniciais de Cálculo Diferencial e Integral, caso particular do Brasil após o ingresso no Ensino

Superior. Essas diferenças institucionais decorrem de decisões em diferentes níveis de co-detrerminação, principalmente, no nível sociedade;

- Dias, Artigue, Jahn e Campos (2010) que também refletiram sobre um estudo comparativo da transição EM-ES entre Brasil e França, focando-se no domínio das funções. Nesse trabalho demonstrou-se, em primeiro plano, que a TAD de Chevallard (1998) é uma teoria adequada para realização de estudos comparativos, pois revela as semelhanças e diferenças culturais e educativas que ocorrem durante a transição EM-ES. Posteriormente, essas pesquisadoras também concluíram que a existência de especificidades contextuais localizadas nos diferentes níveis de co-determinação também contribuem para verificar tais diferenças. Nesse sentido, ressaltaram que fazer emergir as diferenças contextuais existentes, despercebidas pelos atores envolvidos e atuantes de um certo sistema educacional, auxiliaria na colaboração de um trabalho mais amplo e produtivo, cuja equipe responsável visualizará possibilidades de necessidades de amadurecimento ou evolução desse sistema;

- Nguyen (2006) que produziu em sua tese de doutorado reflexões sobre uma análise comparativa entre Vietnã e França para resolução de equações do segundo grau no Ensino Médio. Os resultados dessa pesquisa, também desenvolvida sob as lentes da TAD, principalmente, apontaram para as especificidades nas opções curriculares verificadas pela análise institucional dos dois países que concentra na abordagem teórica da álgebra, caso do Vietnã, um elenco de técnicas insuficiente para resolver alguns tipos de Tarefas.

Para dar cabo dos objetivos definidos acima, consideraram-se as análises institucionais desenvolvida nos dois territórios, entendendo-se que nelas estariam os fundamentos para compreender a evolução das relações institucionais esperadas via Programas Oficiais e a evolução das relações institucionais existentes via Livros Didáticos. Em segundo plano, recorreu-se as análises neurocognitivas para compreender a evolução das relações pessoais existentes via Protocolos Experimentais.

Decorrente dessa metodologia procedeu-se um levantamento sobre todas as análises citadas, priorizando-se a apresentação didática das noções de Funções Trigonométricas a partir das diferentes etapas de ensino, bem como recuo às

estatísticas que revelaram o desempenho dos estudantes voluntários através do NFC de três tarefas distintas.

Tendo recolhido esses dados, buscou-se responder algumas questões que serviram como fio condutor no auxílio do alcance dos objetivos iniciais dessa sessão: Como evoluem em ambos os países, via Programas Oficiais de ensino de Matemática, as relações institucionais esperadas para os estudantes? Caso existam, quais são as técnicas previstas pelas instituições brasileira e francesa para ativar o sistema de ostensivos e não ostensivos que mobilizadas pelas relações institucionais? Como evoluem, no Brasil e na França, as relações institucionais existentes passíveis de serem verificadas por meio dos Livros Didáticos? As técnicas previstas pelas relações institucionais esperadas correspondem às técnicas determinadas pelas relações institucionais existentes? Como evoluem, nas nações em tela, as relações pessoais existentes observadas através das estatísticas de desempenho, considerando-se as tarefas propostas sob os diferentes NFC e a escala do SARESP (2013)? Como se dá, nesse países, a introdução das noções de Funções Trigonométricas nas diferentes etapas da escolarização?

Com efeito, foi estruturada, dessa forma, a análise denominada horizontal, levando-se em consideração a evolução, via análises institucionais, principalmente, entre o EM e o ES nos dois países.

8.1 – Evolução das relações institucionais e pessoais

Para analisar a evolução das relações institucionais e pessoais, observaram-se os Quadros 107, 108 e 109. Nos dois primeiros quadros, valeu-se das noções de trigonometria encontradas nas análises institucionais e, no terceiro, para compreender as relações pessoais, da média aritmética das estatísticas da **Amostra Principal** calculada a partir do Quadro 98 (Cf. p. 406), Quadro 102 (Cf. p. 413) e Quadro 106 (Cf. p. 428).

8.1.1 – Evolução das relações institucionais esperadas e existente

Quadro 110

Evolução das relações institucionais esperadas via Programas Oficiais.

Países	**Ensino Fundamental**		**Ensino Médio**		**Evolução das relações institucionais esperadas**
	Faixa etária dos estudantes (em anos)				
	13	14	15	16	
Brasil	—	—	Noções de trigonometria no triângulo retângulo: **cosseno, seno e tangente**	Noções de trigonometria na circunferência: **Funções Trigonométricas**	**Lenta:** não existe a mobilização da Atividade Matemática
França	Noções de trigonometria no triângulo retângulo: **cosseno**	Noções de trigonometria no triângulo retângulo: **cosseno, seno e tangente**	Noções de trigonometria na circunferência: **Funções Trigonométricas**	Noções de trigonometria na circunferência: **Aprofundamento das Funções Trigonométricas**	**Média:** indicada pela existência da mobilização da Atividade Matemática

Fonte: O autor (2015).

Quadro 111

Evolução das relações institucionais existentes via Livros Didáticos.

Países	**Ensino Fundamental**		**Ensino Médio**		**Evolução das relações institucionais existentes**
	Faixa etária dos estudantes (em anos)				
	13	14	15	16	
Brasil	—	Noções de trigonometria no triângulo retângulo: **cosseno, seno e tangente**	Noções de trigonometria no triângulo retângulo: **cosseno, seno e tangente**	Noções de trigonometria na circunferência: **Funções Trigonométricas**	**Média:** indicada pela existência da mobilização da Atividade Matemática
França	Noções de trigonometria no triângulo retângulo: **cosseno**	Noções de trigonometria no triângulo retângulo: **cosseno, seno e tangente**	Noções de trigonometria na circunferência: **Funções Trigonométricas**	Noções de trigonometria na circunferência: **Aprofundamento das Funções Trigonométricas**	**Alta:** indicada pela existência e qualidade da mobilização da Atividade Matemática

Fonte: O autor (2015).

Sob a ótica de Chevallard (2007) é possível descrever a relação a um objeto, tanto institucional como pessoal, a partir de tudo que uma pessoa é orientada a fazer com esse mesmo objeto. Nessa orientação, está incluído, conforme o autor,

o que a pessoa pensa ou sonha em realizar. Essas características especiais das relações institucionais ou pessoais podem ser verificadas por meio das noções de praxeologias.

Nesse sentido, residiu sobre os momentos em que a instituição ou a pessoa (estudantes) entrou em Atividade Matemática, as constatações que conduziram, um ou outro, ativarem o objeto matemático em tela: as noções de Funções Trigonométricas.

Isto posto, foi possível observar no Quadro 110 (Cf. p. 443) que a evolução das relações institucionais esperadas via Programas Oficiais de ensino de Matemática, foi classificada no Brasil como "lenta", dada a ausência de técnicas nas faixas etárias correspondentes ao aparecimento das noções em jogo. Mesmo que nos documentos PCNEM, PCN+, OCEM essas noções tenham sido citadas, por si só, elas não conseguem ativar um sistema de ostensivos, pois não existem tipos de Tarefas relacionados.

Contrariamente, na França, o discurso tecnológico θ_{1C4}: *"relação entre cosseno de um ângulo agudo e o comprimento de dois lados adjacentes"* selecionado para os alunos de 13 anos é ativado por meio da técnica τ_{1C4} ou τ_{2C4}, considerando-se as tarefas $\mathbf{T_1}f_{1C4}$ e $\mathbf{T_2}f_{1C4}$. A ativação dessa articulação do sistema entre ostensivos e não ostensivo, além de servir de referência oficial, permite também, tanto professores como autores de livros didáticos elaborarem situações em que, estas técnicas estejam presentes, auxiliando os alunos a entrarem em Atividade Matemática.

Mesmo não sendo claras, as poucas técnicas ativadas por meio do uso de uma calculadora, τ_{1C3}, τ_{2C3}, τ_{1S1} e τ_{1S2}, inclusive, a iniciativa francesa impulsiona o estudo das noções iniciais das Funções Trigonométricas, de uma maneira atualizada, pois faz uso direto da tecnologia e, dessa forma, adequa-se as possíveis dificuldades pessoais dos estudantes.

Ainda assim, em ambos os casos, a diferença entre a evolução das relações institucionais esperadas é pequena quando se leva em conta ao sistema de ostensivos e não ostensivos que deveria existir para mobilizar a Atividade Matemática.

De certa forma, essa lacuna foi diminuída, tanto no Brasil como na França quando se observou a evolução das relações institucionais existentes por meio dos Livros Didáticos.

No Brasil, aos 14 anos, é esperado que os alunos tivessem o primeiro contato com o campo trigonométrico ativando-se as técnicas τ_{1}LDEF9, τ_{2}LDEF9, τ_{3}LDEF9, τ_{4}LDEF9, τ_{5}LDEF9 e τ_{6}LDEF9 que, se fossem desenvolvidas e aprendidas efetivamente, contribuiriam na passagem para o circulo trigonométrico.

Na França, existe um conjunto de técnicas equivalentes, porém dividido entre a *Classe 4ème e Classe 3ème* (equivalente no Brasil a 8º e 9º anos do Ensino Fundamental). Como uma espiral, o sistema francês ajuda no reforço gradativo da informação e, dessa forma, contribui para evocá-la mais rapidamente.

Contariamente e, de forma tardia, o sistema brasileiro retoma as técnicas apresentadas no volume 9, do livro para Ensino Fundamental, reapresentando-as no volume 1, do livro para o Ensino Médio. Talvez, resida nessa opção, a justificativa de que essas noções não sejam ofialmente pré-estabelecida nos Programas Oficiais do Ensino Fundamental.

Para Chevallard (2007), a mobilização dessas técnicas, poderia conduzir os alunos a uma diâmica cognitiva, que estilizasse o objeto em função do uso que se faz dele mesmo. Em outras palavras, a evolução das relações institucionais de maneira gradativa e contínua, contribuiria no fortalecimento das relações pessoais existentes. Assim, observou-se que existe uma propriedade entre as relações institucionais esperadas e as relaões pessoais existentes: o nascimento e mobilização da primeira determina a evolução e ativação da segunda.

Por outro lado, vale lembrar que, apesar de constatada essa mobilização e complementação em torno da evolução das relações institucionais esperadas, tanto no Brasil como na França, a mudança de domínios matemático – ruptura da geometria para a função –, permanece como uma lacuna institucional ainda não solucionada, considerando-se que tantos os Programas Oficiais de ensino como os Livros Didáticos analisados são atuais e continuam advogando, de cera forma, a favor dessa mesma ruptura.

8.1.2 – Evolução das relações pessoais existente

Sob essa lente e, considerando-se a ruptura mencionada acima, observou-se no quadro abaixo a existência de alunos, de ambas nacionalidades que conseguiram, de alguma forma, superar, parcialmente, esse problema, conforme se verifica a seguir :

Quadro 112

Evolução das relações pessoais existentes via Protocolos Experimentais.

Países	**Ensino Superior**			**Evolução das relações pessoais existentes**
	Faixa etária média dos estudantes voluntários			
	18 anos			
	Tarefa A	Tarefa B	Tarefa C	
Brasil	**Coerência de 100%**	**Coerência de 35%**	**Coerência de 67,5%**	**Média:** indicada pela existência da mobilização da Atividade Matemática
França	**Coerência de 92,86%**	**Coerência de 35,71%**	**Coerência de 64,28%**	**Média:** indicada pela existência da mobilização da Atividade Matemática

Fonte: O autor (2015).

No entanto, a articulação entre o domínio da geometria e das funções, deveriam subsidiar, caso fosse completamente assimilado, todas as três tarefas, diferenciadas pelo Nível de Funcionamento do Conhecimento (NFC). Por isso, reside ainda fragilidades dessa natureza que contribuiram, inclusive, para o baixo índice de ocorrência na Tarefa B.

Em contrapartida, os índices da Tarefa A apontam, nessa amostra, para o estabelecimento de uma equivalência entre as relações institucionais esperadas e as relações pessoais existentes, pois nos excertos das amostras apresentados no capítulo anterior, foi possível observar, por meio da articulação dos sistema entre ostensivos e não ostensivos, o processo dinâmico da Atividade Matemática.

Mesmo assim, cabe destacar que esses participantes brasileiros da pesquisa são, de certa forma, alunos privilegiados escolhidos por um processo de selação da UNESP/Guaratinguetá, para participar do programa *Ciência sem Fronteiras* na França e que também, aproveita na primeira etapa do vestibular apenas 20% da nota obtida no ENEM.

Sob essa macroavaliação foram selecionados os estudantes voluntários da **Amostra Sencundária 1(a)** e **1(b),** cujos resultados apresentados nas estatísticas, do capítulo VII desvelaram o traço negativo das relações pessoais existentes, quando foi comprovado a inexistência da Atividade Matemática, o que representa uma contradição em relação as expectativas institucionais.

Quanto a Tarefa C, observou-se que as relações pessoais existentes cumpriram seu papel sob dois pontos: primeiro, diminuiu a ruptura epistemológica que contribui para dificultar o processo de transição EM-ES; segundo, consequentemente, a maioria dos participantes conseguiram atingir o desempenho avançado segundo a escala do SARESP (2013). Isso, inpulsionou supor que, mesmo diante de um NFC mais complexo, parece que a exeitência de algum sentido possa mobilizar traços da MLP, capazes de ativar o sistema ariticulado de ostensivos e não ostensivos correspondentes, mobilizando, dessa forma a Atividade Matemática institucioalmente esperada.

8.2 – Evolução das noções de Funções Trigonométricas no Brasil e na França

Para ajudar na composição dessa fase da análise, denominada horizontal, foi inserida a figura abaixo que representa um panorama final de toda a pesquisa desenvolvida:

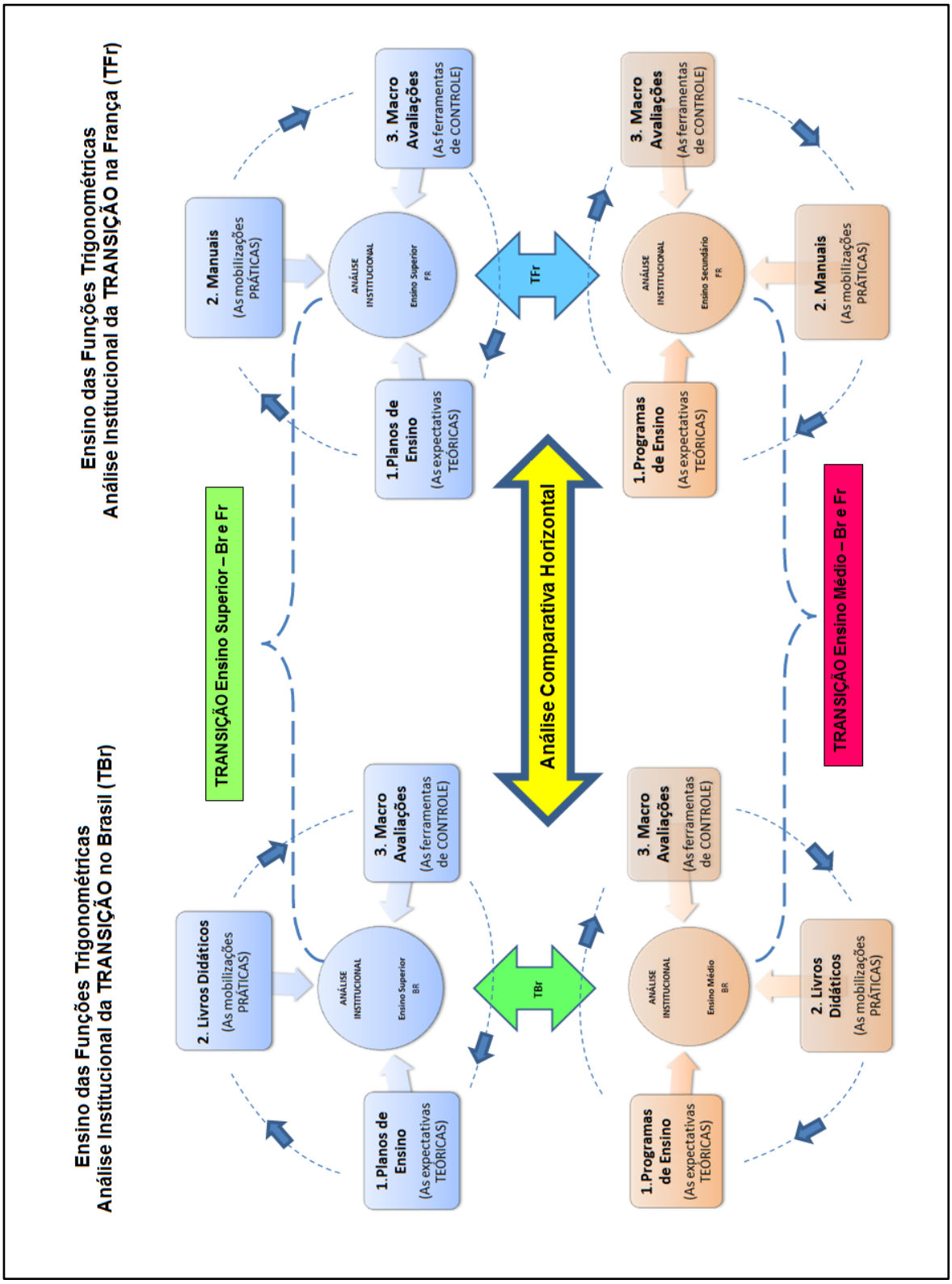


Figura 94: Esquema da Transição Horizontal comparando-se Brasil e França.
Fonte: O autor (2015).

Sobretudo, cabe ainda resumir que, nesse estudo comparativo, observou-se, inclusive, considerando-seos Quadros 107 e 108 (Cf. p. 442), como a introdução das noções de Funções Trigonométricas, se dá de diferentes formas, a saber:

Em ambos os países, essas noções matemáticas têm suas raízes no Ensino Fundamental, desenvolvendo-se sobre o domínio da geometria e, ainda assim, trilham caminhos diferenciados. Na França, parte-se de uma proposta oficializada pelos Programas de Ensino de Matemática, que não se considera as semelhanças de triângulos para chegar nas constantes seno, cosseno e tangente, conforme o rol de técnicas mobilizadas na *Classe 4ème e Classe 3ème*. No Brasil, além de não ser oficializado a apresentação dessas noções nessa etapa de ensino, são desenvolvidas sob a ótica da semelhança de triângulos constatada por meio da análise institucional do capítulo V, especificamente, do Quadro 42 (Cf. P. 225).

No Ensino Médio, cenário oficial para o desenvolvimento das noções em jogo dos dois países, foi verificado que no Brasil existe uma "retomada ou uma introdução" nos livros didáticos da 1ª série, cujo aprofundamento se dá na série seguinte. Nesse, reside à apresentação das noções de Funções Trigonométricas por meio da trigonometria circular. Na França, constatou-se que o processo é contínuo, sendo a passagem da trigonometria do triângulo para a do círculo no 1º ano, restando para a próxima série, conteúdos mais avançados, como, por exemplo: localização de um número real sobre o círclo trigonométrico a partir de um ângulo orientado, determinação de coordenadas polares de um ponto sobre o plano, cálculo da imagem de um ponto, por meio de uma rotação. Nessa proposta, observou-se que já se introduz algumas noções matemáticas utilizadas, na disciplina Cálculo Diferencial e Integral do Ensino Superior.

No Ensino Superior, observou-se que nas duas nacionalidades a referida noção é utilizada na disciplina destacada acima enquanto objeto matemático, sendo que no Brasil, é empregada como ferramenta explicita, para o reconhecimento de funções transcendentais, bem como conhecimento prévio, para o estudo das noções intuitivas e definições de limite, derivada em um ponto, função derivada, continuidade e de diferenciabilidade. Na França, elas são revisitadas, priorizando-se as fórmulas de adição, transformação de produto em soma, transformação de soma em produto, resolução de equação $a.\cos x + b.\text{sen } x = c$, expressão de cos θ, sen θ,

tg θ em função de t = tg (θ/2) para servirem de ferramenta de novos modos de pensar, inclusive.

Portanto, sobre a Organização Matemática das noções de Funções Trigonométricas nos dois países, observou-se a importância de uma investigação que vai além do rastreio, identificação e classificação de características dos distintos sistemas educativos que, sob a análise comparativa em tela, são muito próximos. No entanto, faz-se necessário ressaltar que, reside no nível de sociedade, segundo os níveis de co-determinação de Chevallard (2002), um ponto referencial desse estudo que, por questões de influências culturais decidem diferentes propostas educacionais para os seus membros, justificando as possíveis expectativas para a forma de mobilização, da Atividade Matemática.

CONCLUSÃO E PERSPECTIVAS DE PESQUISA

Esta pesquisa de tese de doutorado constitui-se em mais uma parte dos estudos desenvolvidos sobre a Transição do Ensino de Matemática entre o Ensino Médio e o Ensino Superior. Nesse sentido, teve como objetivo principal analisar a transição do Ensino das Funções Trigonométricas EM-ES sob a ótica da articulação entre os quadros da Didática da Matemática e da Neurociência Cognitiva.

Tal propósito provocou, inicialmente, o intento de revisitar os bastidores do fenômeno das Dificuldades de Aprendizagem Matemática, priorizando-se as Funções Trigonométricas (DAMFT), para então, esboçar um primeiro mapeamento atualizado das investigações científicas já desenvolvidas sobre essa temática buscando-se, inclusive, defini-lo como objeto nuclear da pesquisa em Neurociência Cognitiva e, também se mostrando algumas possibilidades de articulações entre os referidos quadros teóricos. Em seguida, estabeleceu-se uma reflexão sobre os trabalhos que analisaram a transição escolar, tanto no Brasil como no exterior, que permitiu amadurecer o ideário dessa pesquisa.

Concluiu-se, assim, que as etiologias das Dificuldades de Aprendizagem Matemática, especificamente, das DAMFT foram identificadas por meio dos marcadores *CDAE e DAMFT* (Quadro 21, Cf. p. 88) que, por sua vez, desvelaram algumas articulações entre a Didática da Matemática e a Neurociência Cognitiva. Já pelas vias institucionais, constatou-se que questões de ordem cultural e epistemológica incidem diretamente sobre diferentes contextos em que se objetiva o desenvolvimento da Aprendizagem Matemática. Partindo-se desses dois modelos de entendimento, sobre o desenvolvimento do fenômeno das DAM, prejudicial à transição do Ensino das Funções Trigonométricas EM-ES, supôs-se que, pode haver uma ruptura na transição do Ensino de Funções Trigonométricas do EM-ES" e que "o ensino das Funções Trigonométricas, tanto no EM como no ES, não leva em conta os princípios da Neurociência Cognitiva para suavizar essa ruptura".

Com base nessas hipóteses primeiras, decorreram as seguintes questões de pesquisa:

Q1 – Quais são as possíveis causas dessa ruptura?

Q2 – A institucionalização de atividades matemáticas baseadas nos princípios da Neurociência Cognitiva pode auxiliar no processo de neutralização dessa ruptura?

Essas indagações foram responsáveis pela escolha e recortes do quadro teórico que tentam elucidar elementos basais quando funcionaram como lentes de ampliação para enxergar objetos invisíveis aos olhos de alunos, professores, pais e educadores em geral, que imersos na dinâmica da jornada escolar, sequer desconfiam dos possíveis diálogos travados entre os mesmos.

Dentre esses, essa pesquisa fundamentou-se em dois quadros da Didática da Matemática, especificamente, na Teoria Antropológica do Didático (TAD) de Chevallard (1998), onde as causas iniciais da suposta ruptura, repousariam sobre uma análise institucional vinculada à abordagem do Nível de Funcionamento do Conhecimento de Robert (1997, 1998). Num momento posterior, serviu-se dos alicerces da Neurociência Cognitiva, sobretudo, considerando-se os ensinamentos de Kandel (1991) como fonte para tentar sinalizar alguma possibilidade de neutralização da suposta ruptura, valendo-se da hierarquia entre as fases de aquisição, codificação, processamento/transformação, armazenamento e evocação da informação que subsidiam os princípios da Memória de Longo Prazo (MLP).

Tomando-se todas essas circunspeções importantes para ancorar e tentar justificar as escolhas utilizadas com vista a compreender o processo de transição entre o Ensino Médio e o Ensino Superior no Brasil e na França, priorizando-se as noções de Funções Trigonométricas, percebeu-se que essas opções ajudem pesquisadores, professores, alunos, instituições e demais interessados a redimensionar as reflexões sobre as causas do fenômeno das dificuldades escolares, mobilizando esforços para neutralizar a sua evolução e contágio nos níveis subsequentes de ensino de Matemática, primordialmente.

Com efeito, a aplicação das ferramentas pinçadas da TAD, para proceder à análise praxeológica via os documentos oficiais (programas de ensino, livros didáticos, macroavaliações) – as noções de tipos de Tarefas, técnicas, tecnologias, teorias, objetos ostensivos e não ostensivos – auxiliaram na identificação das causas da suposta ruptura, da transição entre o Ensino Médio e o Ensino Superior.

Foi constatado por meio dessas ferramentas que, tanto no Brasil como na França, existe a ruptura na transição do ensino das Funções Trigonométricas EM-ES, cuja causa primeira reside sobre a mudança entre os domínios matemáticos – geometria e função – provocada sobre as noções trigonométricas iniciais, seno e cosseno, quando eram articuladas as noções de ângulos e a noção de número real, respectivamente.

Essa ruptura tem origem nos programas de ensino anteriores ao Ensino Médio e, especificamente, deve-se a apresentação de tipos de Tarefas que partem do domínio da geometria e necessitam, para serem concluídas, do domínio das funções, até então, desconhecidos pelos estudantes dessas etapas da escolarização. Nesse sentido, considerou-se essa ruptura do tipo epistemológica por pertencer a dois domínios diferentes que ao longo da história, inclusive, também foram verificadas pelo distanciamento entre as tarefas voltadas para as necessidades práticas (ou as aplicações) e os interesses pela purificação (ou lapidação ou formalização) do conhecimento matemático, conforme foi desvelado no capítulo IV.

Decorre dessa lacuna, a necessidade de reestruturar a Organização Matemática sobre as noções de Funções Trigonométricas de modo que as técnicas necessárias para o cálculo do ângulo agudo, dados os valores do seno ou cosseno, por exemplo, sejam deslocadas do tema “trigonometria do triângulo retângulo” para o tema “trigonometria na circunferência (círculo)”. Dessa forma, contornar-se-ia a ruptura epistemológica, postergando-se para um tema mais avançado a aplicação de técnicas, cujos objetos não ostensivos, ainda são desconhecidos pelos estudantes, sendo esses representados pelas noções de função inversa.

A segunda causa da ruptura entre a transição do Ensino Médio para o Ensino Superior reside na potencialização da ruptura epistemológica, identificada nos programas oficiais de ensino de Matemática encontrada nos Livros Didáticos analisados. Mesmo com as suas diferenças contextuais, Brasil e França, representam duas nações que, talvez, considerem esses programas de ensino como ponto de partida para implementarem as expectativas institucionais, por meio da elaboração dos Livros Didáticos.

Tal descompasso é posto em evidência quando o caráter abstrato das noções das Funções Trigonométricas esperado pelo Ensino Superior é mobilizado pelas macroavaliações dos ENEMs 2009 (**Questão 174**) e 2011 (**Questão 158**), cujas técnicas responsáveis por ativar o sistema articulado de ostensivos e não ostensivos, não são desenvolvidas nos Livros Didáticos analisados, de acordo com os marcadores S_{MAvEM}-07, S_{MAvEM}-08, S_{MAvEM}-13 e S_{MAvEM}-14. Segundo Gueudet (2008a) e Vleeschouwer (2010), esse desencontro assinala uma marca importante para justificar a origem das rupturas epistemológicas, também, inclusive, pelas vias da abordagem axiomática, que desconsideram as possibilidades de articulações naturais com a geometria.

No entanto, no Ensino Superior, constatou-se a existência de outros fatores que foram adicionados a esse cenário. Verificou-se que, apesar de serem importantes para resolver cálculos envolvendo limites ou derivadas, as noções de Funções Trigonométricas não são revisitadas com vista à redução de lacunas deixadas pelo Ensino Médio. Nos países em tela, ao menos, há insinuações nos planos de ensino examinados, que se faz necessário dispor dos conhecimentos prévios das noções em jogo, sobretudo, para resolver tarefas tais como $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^n$, em que z é calculado por meio de $sen\ z = \left(\frac{e^{iz}- e^{-iz}}{2i}\right)$ e $cos\ z = \left(\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}\right)$, sendo, nesse caso, requerido fortemente o apelo aos métodos axiomáticos.

Ao que tudo indica, repousa na ausência do diálogo entre os referidos níveis de ensino, os motivos da falta de flexibilização, por parte das novas instituições que, conforme Gueudet (2008a) parecem não considerar importantes as exposições, sobre questões de diversidade e heterogeneidade dos professores, do contrato didático, das avaliações e do equilíbrio das contribuições das diferentes abordagens institucionais. Essas diferenças foram justificadas por Artigue (2004), como fruto da própria cultura Matemática de cada instituição.

Uma possibilidade para suavizar esses desencontros, depende, segundo Gueudet (2008a), das novas instituições de Ensino Superior, mesmo considerando diferentes as abordagens matemáticas – conteúdo e forma – encontradas no Ensino Médio, propor após a transição do Ensino Médio que novos conhecimentos fossem

articulados a novas flexibilidades, para tentar contornar as dificuldades dos estudantes apresentadas no Quadro 21 (Cf. p. 88), primordialmente, aquelas que se frutificaram a partir das rupturas epistemológicas ainda não superadas pelas tentativas de suas respectivas transposições didáticas propostas nos documentos oficiais.

Essas sugestões de Gueudet (2008a) vão rumo a uma tentativa de revisitar a História da Matemática, onde as lentes epistemológicas devem ser consideradas para que, tal releitura, permita encontrar alternativas capazes de auxiliar na superação das dificuldades de aprendizagem, apontadas pelos marcadores DAMFT, do capítulo I. Por outro lado, somam-se às sugestões dessa pesquisadora as contribuições vanguardistas da Neurociência Cognitiva, que serviu como um segundo pilar de sustentação dessa tese.

Sob esse ângulo, foi demonstrado que reside nas $\mathbf{R_{DM6}}$, $\mathbf{R_{DM7}}$, $\mathbf{R_{DM10}}$, $\mathbf{R_{DM15}}$ e $\mathbf{R_{DM17}}$, descritas no capítulo I, a existência de lacunas na transposição didática dos conteúdos matemáticos examinados que, de certa forma, corrobora para perpetuar as rupturas epistemológicas das noções de Funções Trigonométricas. As consequências imediatas dessas lacunas, são as dificuldades de aprendizagem dos estudantes que, para Nasser (2009), decorrem da falta de conhecimento prévio do Ensino Médio, impedindo-os de compreender, no Ensino Superior, modelos matemáticos associados a essas noções, conforme foi mostrado na Figura 67 (Cf. p. 318), excerto extraído de Stewart (2011).

Observou-se nas recomendações de Artigue (1988) que o lugar apropriado para encontrar sentido e significado reside em uma análise epistemológica, de certa noção matemática. Para a autora citada, repousa sobre essa análise as motivações primeiras para mobilizar o interesse em prol da aprendizagem dos estudantes. Vale ressaltar que esse ponto de vista foi suficiente para articular as perspectivas da Neurociência Cognitiva, já que o órgão responsável pelo processamento de informações – o cérebro – tende a se interessar apenas pelo que, sob seu julgamento, está banhando de sentido e significado.

Assim, focou-se sobre essas recomendações para viabilizar a estrutura de um segundo tipo de análise, a neurocognitiva, objetivando-se responder a questão de pesquisa Q2. Para tanto, aplicou-se alguns dos princípios postulados

pela Neurociência Cognitiva para subsidiar a hipótese associada. Essa análise fundamentou-se nos resultados dos Protocolos Experimentais que apresentou, inicialmente, a um grupo de estudantes, brasileiros e franceses, de uma instituição francesa denominada INSA – Instituto Nacional de Ciências Aplicadas de Lyon da *Universidade Claude Bernard Lyon I* (**Amostra Principal**), três tipos de Tarefas elaboradas segundo os Níveis de Funcionamento do Conhecimento de Robert (1997, 1998), submetidas aos voluntários sob a apresentação ou não, de um estímulo sensorial associado à Memória de Longo Prazo (MLP). Em uma segunda fase, entendeu-se necessário, aplicar os mesmos instrumentos de investigação a outros grupos de estudantes brasileiros residentes em Estados diferentes (UD1 – **Amostra Secundária 1(a) e 1 (b)**) e (UD2 – **Amostra Secundária 2**) que, não tiveram a mesma oportunidade de participar, à época, do programa *Ciência sem Fronteiras*.

A MLP foi verificada por meio dos registros descritos nos Protocolos Experimentais, representados, por sua vez, pela manipulação de objetos ostensivos (as técnicas) associados à evocação de objetos não ostensivos (as noções, definições e propriedades matemáticas), quando existiam. Residiu no movimento dessa articulação a Atividade Matemática observada por Chevallard (1998), lócus que também permitiu analisar a evolução das expectativas institucionais e pessoais existentes. Sobre a formação da MLP foi considerado a ativação da circuitaria neurocognitiva (Figura 26, Cf. p 187) como condição *sine qua non* para sua existência e, consequentemente, para a aprendizagem, conforme postula os neurocientistas Lezak *et al* (1976), Kandel (1991), LeDoux (2001), Gazzaniga (2006), Herculano-Houzel (2007), Lent (2008), Parent (2009), Willingham (2011) e Izquierdo (2011), principalmente.

Dessa forma, constatou-se como, quase inexistente, traços mnemônicos oriundos da MLP, observados nos extratos das amostras que registraram em seus manuscritos declarações como *"não estudei esse conteúdo no Ensino Médio"* – **BEBSEM1**, **BEBSEM5***; "falto conhecimento"* – **BEBSEM4, BEBSEM7, BEBSEM15**; *"não me lembro desse assunto"* – **BEBSEM3, BEBSEM10, BEBSEM11**; *"não sei fazer"* – **BENSEM2**, por exemplo. Tais provas foram pinçadas da **Amostra Secundária 1(a)**, bem como percebidas pela ausência de manipulação de ostensivos adequados, na maior parte dos extratos da **Amostra Principal**.

Essa comprovação permitiu concluir que, tanto o Ensino Médio quanto o Ensino Superior não levam em consideração os princípios da Neurociência Cognitiva verificados, por meio do baixo grau de existência da MLP que resultou, em uma boa parte das classificações de desempenho dos alunos participantes, como sendo, “abaixo do básico”, considerando-se a escala produzida e validada pelo SARESP (2013).

Cabe destacar que o estimulo sensorial escolhido para ativar a MLP e, consequentemente, o sistema articulado de ostensivos e não ostensivos para emergir a Atividade Matemática dos estudantes, por meio das relações institucionais e pessoais existentes, referiu-se a figura geométrica do círculo trigonométrico, residindo nesse, todas as etapas do desenvolvimento das noções de Funções Trigonométricas. Assim, de acordo com a literatura examinada e com as análises institucionais e análise epistemológica (Figura 29, Cf. p. 190), observou-se que a passagem da trigonometria do triângulo (trigonometria plana geométrica) para a trigonometria da circunferência (trigonometria plana analítica), bem como dessa última para a representação dos gráficos das Funções Trigonométricas basais (trigonometria plana analítica circular), seno e cosseno, representa articulações importantes que, caso sejam desconsideradas, contribuem para a instalação das dificuldade de aprendizagem dessas noções.

Nesse sentido, o fato do estimulo sensorial não potencializar a evocação (MLP) das informações objetivadas está associado à falta de experiência, ou seja, ausência de Atividade Matemática mobilizada, em nível institucional, pelos programas oficiais e livros didáticos e, em nível, pessoal, pela forma como esses recursos foram desenvolvidos, durante as diferentes fases da escolarização. Para Izquierdo (2011), repousa sobre as experiências individuais a qualidade da formação e armazenamento das informações existentes na MLP, o que, por sua vez, remete aos ensinamentos de Artigue (1988) sobre a importância de contextualizar, em termos de sentido e significado, a estruturação de certa noção matemática apresentada aos estudantes.

Mesmo com um pequeno índice, nos resultados dos grupos envolvidos pela apresentação do estímulo sensorial, acredita-se que sob outras condições de pesquisa é possível refletir sobre a eficácia, do processo de neutralização da ruptura epistemológica na transição do ensino das Funções Trigonométricas do EM-ES

considerando-se, além da MLP, outros princípios da Neurociência Cognitiva, dado os avanços e resultados das pesquisas direcionadas ao Sistema Nervoso Central, fonte controladora das ações humanas e animais.

Por fim, constatou-se, também, mais uma forma de articulação entre a Didática da Matemática e a Neurociência Cognitiva, para analisar a transição do Ensino das Funções Trigonométricas EM-ES: a evolução das relações institucionais esperadas e existentes e as relações pessoais existentes.

Constatou-se no Brasil e, contrariamente na França, que as relações institucionais esperadas (via programas oficiais de ensino) sobre as noções em jogo para o Ensino Médio não são coerentes, com as expectativas institucionais existentes (via livro didático e macroavaliações), sendo essa um indicador do descompasso da transição para o Ensino Superior. Mesmo assim, essa diferença entre os dois países é pequena quando se leva em conta ao sistema de ostensivos e não ostensivos, que deveria existir para mobilizar a Atividade Matemática, conforme descrito no capítulo VIII.

No entanto, observou-se em ambos os países que existe a tentativa para que essa lacuna seja diminuída, considerando-se a evolução das relações institucionais existentes por meio dos Livros Didáticos. Essa evolução foi marcada pela identificação das principais técnicas τ_{1}LDEF9, τ_{2}LDEF9, τ_{3}LDEF9, τ_{4}LDEF9, τ_{5}LDEF9 e τ_{6}LDEF9 brasileiras que, de certa forma, são equivalentes às francesas, quando se prioriza-se o contato inicial com as noções do Campo Trigonométrico.

Com efeito, uma diferença entre esses dois países contribui para a formação da MLP e, consequentemente, a apropriação das noções em jogo: o modelo espiral verificado no sistema francês de ensino que divide esse conjunto de procedimentos (o como saber-fazer, as técnicas) em duas etapas distintas da escolarização (entre a *Classe 4ème e Classe 3ème*, equivalente no Brasil a 8º e 9º anos do Ensino Fundamental); enquanto que, no sistema brasileiro, as mesmas técnicas são reapresentadas apenas, no último bimestre escolar da 1ª série do Ensino Médio.

Chevallard (2007) observa que reside na mobilização dessas técnicas, a possibilidade de conduzir os alunos a uma diâmica cognitiva que estilizasse o objeto

em função do uso que se faz dele mesmo. Em outras palavras, a evolução das relações institucionais de maneira gradativa e contínua, contribuiria no fortalecimento das relações pessoais existentes. Assim, observou-se que existe uma propriedade entre as relações institucionais esperadas e as relações pessoais existentes: o nascimento e mobilização da primeira determina a evolução e ativação da segunda.

Isto posto, reside sobre essa propriedade, inclusive, a possibilidade de construir e solidificar as relações, analisadas por Chevallard (1992), de um objeto matemático (ostensivo e não ostensivo) com uma pessoa, *R(**X**,**O**)*.

Retomado esse recorte teórico, concluiu-se que a falta de elementos na MLP, sobretudo, por meio da articulação entre o domínio da geometria e das funções, contribuiu para que os índices de desempenho nos três tipos de tarefas propostas aos voluntários não atingissem, ao menos, resultados mais profícuos. Esse fato pode ser constatado, principalmente, no índice de ocorrência da Tarefa B.

Na contramão dessa constatação, os índices da Tarefa A apontados no Quadro 112 (Cf. p. 446), revelam existentes e positivas as relações pessoais dos estudantes com o objeto Funções Trigonométricas, verificados sob a ótica da articulação dos sistema entre ostensivos e não ostensivos que mobilizou a Atividade Matemática. Talvez, resida sobre as amostras analisadas os créditos decorrentes do fato de que os participantes brasileiros dessa pesquisa podem ser considerados alunos privilegiados por ultrapassarem o processo de selação da UNESP/Guaratinguetá para participar do programa *Ciência sem Fronteiras* na França.

Complementando as discussões sobre as relações pessoais existentes, concluiu-se que na Tarefa C além da existência da MLP, outros dois pontos que mereceram destaque: a lacuna sobre a ruputura epistemológica verificada nas análises institucionais foi diminuida, o que permite reafirmar, caso fosse superada totalmente que, mais eficaz se tornaria o processo de transição EM-ES; em segundo lugar, pelas evidências de crescimento dos índices da tarefa em tela, mesmo que o NFC seja mais complexo que o anterior, parece que a existência de algum sentido no teor do exercício provocou o desencadeamento, por meio das várias sinapses produzidas, em busca de traços da MLP responsável pela ativação do sistema

articulado de ostensivos e não ostensivos mobilizados para resolver o suposto desafio.

Diante dessas constatações e, sob os fundamentos dos dois quadros teóricos reunidos nesse trabalho científico, esboçou-se na figura abaixo a possibilidade de um caminho que considere o diálogo entre tais quadros, para que ambos os países em prováveis futuras reformulações curriculares considerem, tanto em seus programas oficiais de ensino como na concepção dos Livros Didáticos articulados a esses, uma proposta mais contemporânea para mobilizar a Atividade Matemática dos estudantes, tanto da Educação Básica como do Ensino Superior:

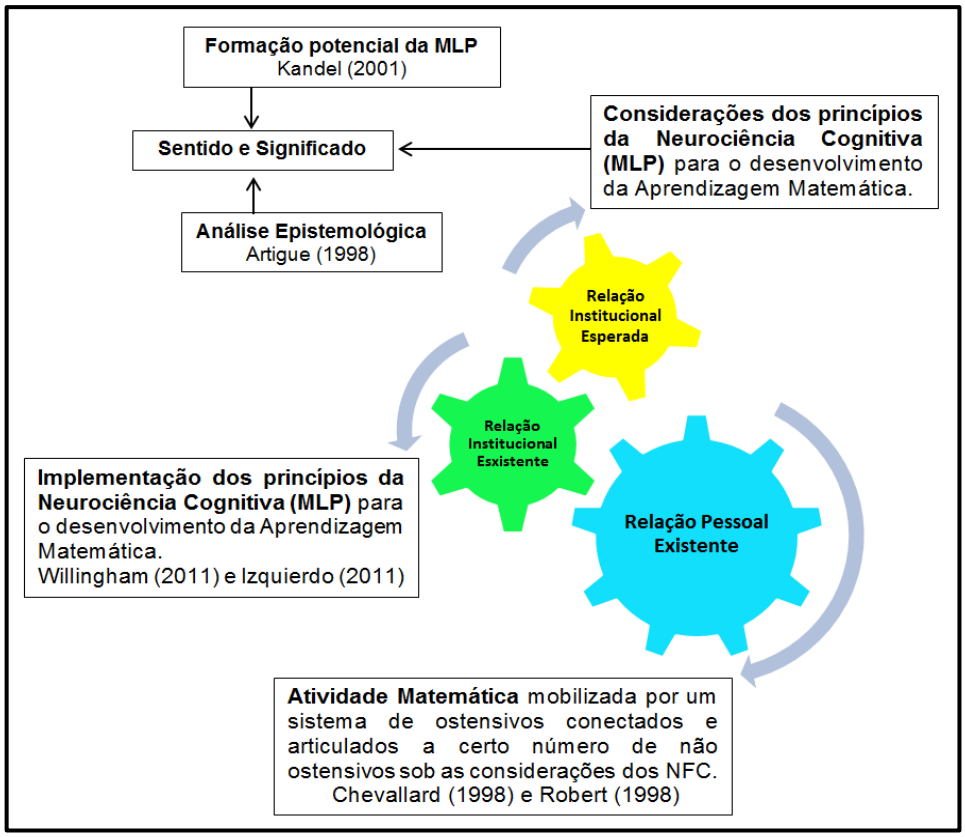


Figura 95: Articulações entre a Didática da Matemática Francesa e a Neurociência Cognitiva.
Fonte: O autor (2015).

Deste modo, considerou-se a importância das teorias abordadas nesta investigação, para a compreensão de relações institucionais encobertas pela dinâmica de níveis de co-determinação, segundo Chevallard (2007a), distantes do cotidiano de professores, alunos e de outros agentes da educação, sempre que refletem, de modo geral, sobre os motivos relacionados aos problemas da transição do Ensino de Matemática EM-ES.

Por isso, ultrapassa o sentimento de latência, os ganhos obtidos que, embasados nos dois quadros teóricos, permitiu: esboçar o plano inicial dessa pesquisa, construir uma atualização das reflexões sobre as Dificuldades de Aprendizagem Matemática, compreender o cenário do fenômeno da transição escolar no Brasil e na França, desenvolver as análises institucionais, guiar a análise epistemológica e, por fim, auxiliar na preparação do terreno para a análise neurocognitiva, por meio da elaboração do Protocolo Experimental. Outrossim, observou-se que nessa experiência inovadora, de articulação comparada entre diferentes culturas, contextos e quadros teóricos, por exemplo, ampliou horizontes ainda pouco desbravados.

Notou-se que frutificaram-se dessa comparação-articulada, possibilidades de novos modos de pensar e de se investigar fenômenos como a Aprendizagem Matemática e a transição do Ensino de Matemática EM-ES que, apesar de seus pontos de partida serem fundados em cenários distintos, verificou-se, possivelmente, a complementação desses vetores, como o mais bem sucedido resultado do investimento dessa empreitada.

Também repousa sobre este trabalho de pesquisa possibilidades de mais perspectivas pedagógicas, sobretudo, quando sinalizou a importância de se considerar uma teoria de aprendizagem como fundamentação dos cenários didáticos que, nesse caso, mostrou que se deve considerar uma clara Organização Matemática sob a ótica de Chevallard (1998), os NFC de Robert (1997,1998), em sua hierarquia, os conhecimentos prévios disponíveis e armazenados na MLP sob a defesa de Kandel (1991). Juntas, elas permitiram apresentar um entendimento, um caminho para mobilizar nos estudantes do Ensino Médio a Atividade Matemática por meio das noções de Funções Trigonometricas.

Assim, temporalmente, mesmo tendo alcançado seus objetivos, esse trabalho incentivou alavancar novos investimentos científicos, para continuar o movimento de aproximação das considerações teóricas da Neurociência Cognitiva sobre o campo da Educação Matemática.

Dessa forma, conforme foi mostrado na Figura 23 (Cf. p. 182) e, segundo o modelo de Willingham (2011), não existe MLP sem antes a função cognitiva atenção ser ativada. Associada a essa constatação, parte-se do princípio que sem

atenção torna-se impossível iniciar a resolução de qualquer tipo de Tarefa e mobilizar a informação até a memória de trabalho (VELASQUES, RIBEIRO, 2014). Sobre esse âmbito, outras questões de pesquisa podem oferecer novas oportunidades em futuros investimentos, a saber:

- Por que os estudantes do Ensino Médio têm dificuldade em focar a atenção nos tipos de Tarefas relacionadas às noções de Funções Trigonométricas?
- Entendendo-se que a dopamina ($C_8H_{11}NO_2$) é um dos mais importantes neurotransmissores que atuam no *sistema atencional*, quais seriam as características esperadas nos tipos de Tarefas sobre as noções de Funções Trigonométricas que auxiliariam na produção dessa substância para ajudar a manter o foco dos estudantes?
- Em nível molecular, como outros neurotransmissores envolvidos no *sistema atencional* podem ser estimulados por meio dos tipos de Tarefas que, particularmente, evoquem as noções das Funções Trigonométricas?
- Seria possível propor uma metodologia para habilitar ou reabilitar a *função cognitiva atenção* nos estudantes do Ensino Médio objetivando-se o armazenamento das noções de Funções Trigonométricas na MLP?

Ademais, sobre esses possíveis novos investimentos científicos, cabe ainda, antes de colocar o ponto final, compartilhar dos ensinamentos de uma das celebridades da *Duke University*, o pesquisador, Reynords Price: *"se seu método alcança somente os alunos atentos, você deve ou inventar novos métodos ou chamar a si mesmo de fracasso"*. (WILLINGHAM, 2011, p. 192). Repousa sobre essa reflexão as justificativas iniciais que destacam a importância de compreender melhor o *sistema atencional* dos estudantes quando, se deseja que neles, seja mobilizada a Atividade Matemática por meio de tarefas atreladas, por exemplo, às noções de Funções Trigonométricas.

REFERÊNCIAS

ALMOULOUD, S. Ag. **Fundamentos da didática da matemática**. Curitiba: Ed. UFPR, 2007.

ALVES, G. A. **Análise de documentos que norteiam o ensino de trigonometria no Estado de São Paulo**. Dissertação de Mestrado – Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, Universidade Bandeirante de São Paulo, São Paulo, 2011.

AMERICAN PSYCHIATRIC ASSOCIATION. **Manual Diagnóstico e Estatístico de Transtornos Mentais (DSM-V-TR)**. Porto Alegre: Artmed, 2013.

ANDRADE, S. N. **Expectativas Institucionais Relacionadas à Transição Entre o Ensino Médio e Ensino Superior Para o Caso da Noção de Função Exponencial**. Tese de Doutorado – Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, Universidade Bandeirantes de São Paulo, São Paulo, 2012.

ANDRINI, A. e VASCONCELOS, M. J. **Coleção Praticando Matemática**. São Paulo: Editora do Brasil, 2012.

ANGELINI, N. M. **Funções**: Um estudo baseado nos três mundos da Matemática. Dissertação de Mestrado – Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, Universidade Bandeirante de São Paulo, São Paulo, 2010.

ANGIOLIN, A. G. **Trajetórias Hipotéticas de Aprendizagem sobre Funções Exponenciais**. Dissertação de Mestrado – Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2009.

ANTONIO, V. E. **Neurociências**: diálogos e intersecões. Rio de Janeiro: Rubio, 2012.

ANTUNES, H. K. M. et al. Exercício físico e função cognitiva: uma revisão. In: **Revista Brasileira de Medicina do Esporte** (ISSN 1517-8692), v. 12, nº 2. São Paulo: SBMEE, 2006.

ARDENGHI, M. J. **Ensino e aprendizagem do conceito de função:** pesquisas realizadas no período de 1970 a 2005 no Brasil. Dissertação de Mestrado – Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2008.

ASHCRAFT, M. H. **Math Anxiety**: Personal, Educational, and Cognitive Consequences. Cleveland: Current Directions In Psychological Science, 2002.

ARTIGUE, M. Engenharia Didática. In: BRUN, Jean. **Didáctica das Matemáticas**. Lisboa: Instituto Piaget. Horizontes Pedagógicos, 1988. p.193-217.

ARTIGUE, M. **Le défi de la transition secondaire-supérieur. Que peuvent nous apporter les recherches en didactique des mathématiques?** Actes du premier congrès franco-canadien de sciences mathématiques. Toulouse, 2004.

ARTIGUE, M. What can we learn from educational research at the university level? In: **ICMI Study**. The Teaching and Learning of Mathematics at University Level. Dunedin (Nova Zelândia): Kluwer Academic Publishers, 2001.

ARTIGUE, M.. La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. In: M. Artigue, R. Douady, L. Moreno, y P. Gómez (Eds). **Ingeniería didáctica en Educación Matemática** (p. 97-140). Bogotá: Grupo Editorial Iberoamericana, 1995.

AUGUSTO, C. R. **Aprendizagem de função afim**: uma intervenção de ensino com auxílio do Software Graphmatica. Dissertação de Mestrado – Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2008.

AUSUBEL, D. P. **Psicologia Educacional**. Tradução de Eva Nick et al. Rio de Janeiro: Interamericana, 1980.

AUSUBEL, D. P. **A aprendizagem significativa**: a teoria de David Ausubel. São Paulo: Moraes, 1982.

AVILA, A. **Noção intuitiva de conjuntos**: um ambiente tecnológico de ajuda ao estudo na transição entre o ensino médio e o superior para um curso de tecnologia da informação. Tese de Doutorado – Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, Universidade Anhanguera de São Paulo, São Paulo, 2014.

BACHELARD, G. **A formação do espírito científico**: contribuições para uma psicanálise do conhecimento. Tradução de Estela dos Santos Abreu. Rio de Janeiro: Contraponto, 1996.

BASS, H. **Research on university-level mathematics education**: (Some of) what is needed, and why? Pre-Proceedings of the ICMI Study Conference on the Teaching and Learning of Mathematics at University Level, 1998.

BERNARDO, A. T. **Os registros de representação no ensino de função do 1º grau**: Uma proposta para o caderno do aluno do Estado de São Paulo. Dissertação de Mestrado. Universidade Bandeirante de São Paulo – UNIBAN. São Paulo, 2011.

BIANCARDI, A., MARIANI, E. e PIERETTI, M. **La discalculia evolutiva**: dai modelli neuropsicologici ala riabilitazione. Milano: Franco Angeli, 2011.

BICA, L. M. P. M. **Funções afins em livros didáticos: relações entre aspectos visuais e textuais.** Dissertação de Mestrado – Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2009.

BORGES, C. F. **Transição das razões trigonométricas do triângulo retângulo para o círculo trigonométrico**: uma sequência de ensino. Dissertação de Mestrado – Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2009.

BOSCH, M., FONSECA, C., GASCON, J. **A Incompletud de las organizaciones matematicas locales en las instituciones escolares**. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Paris, v. 24, n.2-3, p.205-250, 2004.

BOSCH, M.; CHEVALLARD, Y. **La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs**. Objet d'étude et problématique. *Recherches en Didactique des mathématiques,* Paris, v. 19, n. 1, p. 77-123, 1999.

BOYER, C. B. **História da Matemática**: tradução: Elza Furtado Gomide. São Paulo: Edgar Blücher, 1974.

BRASIL. *Lei n. 11.096, de 13 de janeiro de 2005*: Programa Universidade para Todos (PROUNI). Brasília: Diário Oficial da União, 2005.

BRASIL. *Lei n. 9.394, de 20 de dezembro de 1996*: Das Diretrizes e Bases da Educação Nacional. Brasília: Diário Oficial da União, 1996.

BRASIL. Ministério da Educação. Brasília: MEC, 2009. Disponível em: <http://www.portal.mec.gov.br>. Acesso em: 09 out 2014.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros Curriculares Nacionais*: matemática. Brasília: MEC/SEF, 1997.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais – 3° e 4° Ciclos do Ensino Fundamental: Matemática**. Brasília: MEC / SEF, 1998a.

_____. Câmara da Educação Básica. **Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino Médio**. Resolução 03, de 26 de julho de 1998. Brasília: MEC, 1998b.

_____. Câmara da Educação Básica. **Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino Médio**. Resolução 07, de 14 de dezembro de 2010. Brasília: MEC, 2010b.

_____. Câmara da Educação Básica. **Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino Fundamental**. Resolução 01, de 14 de janeiro de 2010. Brasília: MEC, 2010a.

_____. Câmara da Educação Básica. **Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino Médio**. Resolução 02, de 30 de janeiro de 2012. Brasília: MEC, 2012.

_____. Secretaria de Educação Básica. **Orientações Curriculares para o Ensino Médio: volume 2 – Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias**. Brasília: MEC / SEB, 2006.

_____. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros Curriculares Nacionais Ensino Médio: Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias**. Brasília: MEC / SEMT, 2000.

_____. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros Curriculares Nacionais Ensino Médio: PCN+ – Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias**. Brasília: MEC / SEMT, 2002.

BRIGUENTI, M.J.L. **Alterando o ensino de Trigonometria em escolas de nível médio***:* a representação de algumas professoras. Tese de Doutorado em Educação. Universidade Estadual Paulista. Marília, 1998.

BRIGUENTI, M.J.L. **Ensino e aprendizagem da trigonometria:** novas perspectivas da educação matemática. Dissertação de Mestrado – Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, Universidade Estadual Paulista - Instituto de Geociências Exatas de Rio Claro, Rio Claro,1994.

BROUSSEAU, G. **Théorie des situations didactiques**. Grenoble: La Pensée Sauvage, 1998.

CABELLO, C.A.S. **Relações Institucionais para o Ensino da noção de Juros na Transição Ensino Médio e Ensino Superior**. Dissertação de Mestrado – Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, Universidade Bandeirante de São Paulo, São Paulo, 2010.

CAMPOS, T.M.M.; ARTIGUE, M.; DIAS, M. A.. Une étude comparative: matrices et systèmes linéaires dans l'enseignement secondaire français et brésilien. In: **Comission Internationale pour L'Étude et l'Amélioration de l'Enseignement des Mathématiques (CIEAEM 63)**, 2011, Barcelona. Anais do CIEAEM 63. Barcelona: Universidade de Barcelona, 2011. p. 1-4.

CAMPOS, T. M.; ARTIGUE, M.; DIAS, M. A.. **Un étude comparative**: matrices et systèmes lineaires dans l'enseignement secondaire français et brésilien. Revista QUADERNI DI RICERCA IN DIDATTICA, v. 22, p. 389-393, 2012.

CARTER, R. et al. **O livro do cérebro**. Rio de Janeiro: Ed. Agir, 2012.

CAVALINI, S.F.S. **A Utilização do WISC III no Diagnóstico das Dificuldades de Aprendizagem**. Tese de Doutorado. Universidade de São Paulo, São Paulo, 2008.

CHARLOT, B. **Relação com o saber, formação dos professores e globalização**: questões para a educação hoje. Porto Alegre: Artmed, 2005.

CHEVALLARD, Y. **Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques: l'approche anthropologique**. Cours donné à l'université d'été *Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques*, La Rochelle, 4-11 juillet 1998 ; paru dans les actes de cette université d'été, IREM de Clermont-Ferrand, p. 91-120.1998.

CHEVALLARD, Y. **Concepts fondamentaux de la didactique**: perspectives apportées par une approche anthropologique . *Recherches en didactique des mathématiques*. Grenoble: La Pensée Sauvage, 1992.

CHEVALLARD, Y. **Le développement actuel de la TAD** : pistes et jalons. Notes pour un exposé donné le 6 juin 2007 au Séminaire DIDIREM (Université Paris 7), 2007a.

CHEVALLARD, Y. **Les mathématiques dans les formations universitaires**: un schéma alternative. Notes pour exposé présenté au séminaire. *Mathématiques et sciences humaines de la Faculté des sciences de Luminy,* Méditerranée, 2007.

CHEVALLARD, Y. **Organiser l'étude**: 1. Structures & fonctions: Actes XIe école d'été de didactique des mathématiques. Grenoble: La Pensée Sauvage, 2002.

CHEVALLARD, Y. **Organiser l'étude**: 3. Ecologie & regulation: Actes XIe école d'été de didactique des mathématiques. Grenoble: La Pensée Sauvage, 2002a.

CHEVALLARD, Y. **Ostensifs et non-ostensifs dans l'activité mathématique**, Séminaire de l'Associazione Mathesis, Turin, 3 février 1994, in Actes du Séminaire 1993-1994, 190-200. 1994.

CHRISTO, D.S. **Introdução da Noção de Variável em Expressões Algébricas por Meio da Resolução de Problemas**: uma abordagem dinâmica. Dissertação de Mestrado – Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2006.

COSENZA, R. M. *et al*. **Neurociência e Educação**: como o cérebro aprende. Porto Alegre: Artmed, 2011.

CRUZ, E. S. **A Noção de Variável em Livros Didáticos**: um estudo sob a ótica da organização praxeológica. Dissertação de Mestrado – Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2005.

D'AMBROSIO, U. **Educação Matemática**: da teoria à prática. Campinas: Papirus, 1996.

DANTE, L. R. **Matemática**: contexto & aplicações. Ensino Médio. São Paulo: Ática, 2013.

DAVIDOFF, L. L. **Introdução à Psicologia**. São Paulo: Pearson Education Brasil, 2001.

DIAS, M. A. et al. As articulações necessárias para trabalhar os conceitos matemáticos nas diferentes etapas da escolaridade. In: **ENCONTRO NACIONAL DE APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA**, 1., 2005, Campo Grande. *Anais...*Campo Grande, UCDB: Programa de Mestrado em Educação, 2005.

DIAS, M. A. **Les problèmes d'articulation entre points de vue "cartésien" et "paramétrique" dans l'enseignement de l'algèbre linéaire**. Thése de doctorat, Université de Paris VII Denis Diderot, Paris, 1998.

DIAS, M. A.; ANDRADE, S. N.; CAMPOS, T. M. Flexibilidade Cognitiva e níveis de conhecimento: A noção de função afim. In: **RELME 23 - CLAME**, 2010, Santo Domingos. Acta Latinoamericana de Matemática Educativa. Santo Domingos: Editora da Universidade, 2010.

DIAS, M. A.; ARTIGUE, M.; JAHN, A. P. e CAMPOS, T. M. A comparative study of the secondary-tertiary transition. In: **Proceedings Conference of the International Group for the Psychlogy Mathematics Education 2**, 129-136. Belo Horizonte: PME, 2010.

DIAS, M. A.; CAMPOS, T. M.; COLETTI, C. A transição ensino médio e superior: a noção de retas e planos em IR2 e IR3. In: **RELME 23 - CLAME**, 2010, Santo Domingos. Acta Latinoamericana de Matematica Educativa. Danto Domingos: Editorada Universidade, 2009.

DIAS, M. A.; CAMPOS, T.M.M.; KARRER, M. A transição ensino médio e superior: as noções de geometria analítica. In: **IV SIPEM - Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática**, 2009, Brasília. Anais do IV SIPEM. Brasília: Secretaria de Educação do Distrito Federal, 2009.

DOUADY, R. **Des apports de la didactique des mathématiques à l'enseignement**. Repères, IREM, [S.l.], n. 6, p.132-158, 1992.

DOUADY, R. **Jeux de cadre et dialectique outil objet dans l'enseignement des mathématiques**. Thèse (Doctorat) — Université de Paris VII, Paris, 1984.
Edgard Blücher Ltda, 1974.

EVES, H. **Introdução à História da Matemática**. Tradução: Hygino H. Domingues. Campinas, São Paulo: Editora da Unicamp, 1995.

EVES, H. **História da geometria**. São Paulo: Atual, 1992. (Coleção Tópicos de História da Matemática para sala de aula; v. 3)

FARIA, R. P. **Fundamentos de Astronomia**. São Paulo. Papiros, 1987.

FARO, S.D. **Os conhecimentos supostos disponíveis na transição entre o Ensino Médio e o Ensino Superior: o caso da noção de sistemas de equações lineares.** Dissertação de Mestrado – Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, Universidade Bandeirante de São Paulo, São Paulo, 2010.

FERNÁNDEZ, A. **A Inteligência Aprisionada**. Porto Alegre: Artes Médicas, 1991.

FIORI-DUHARCOURT, N. e ISEL, F. **Les Neurosciences Cognitives**. Paris: Armand Colin Éditeur, 2012.

FISHER, S.; HOOD, B. **The stress of the transition to university**: A longitudinal study of psychological disturbance, absent-mindedness and vunerability to homesickness. *British Journal of Psychology*, v. 78, 425- 441, 1989.

FLOOD, R. e WILSON, R. **A história dos grandes matemáticos**: as descobertas e propagação do conhecimento através das vidas dos grandes matemáticos. São Paulo: M.Books do Brasil Editora Ltda, 2013.

FONSECA, Laerte S. A Neuropsicologia da Aprendizagem Matemática. In: **RELME 26,** 2012, Belo Horizonte: PUC/Minas, 2012a.

FONSECA, Laerte S. **Aprendizagem em Trigonometria**: o olhar da Educação Matemática. Dissertação de Mestrado – Programa de Pós-Graduação em Educação, Universidade Federal de Sergipe, São Cristóvão, 2002.

FONSECA, Laerte S. **Aprendizagem em Trigonometria**: obstáculos, sentidos e mobilizações. São Cristóvão: UFS, 2011.

FONSECA, Laerte S. Aprendizagem Matemática e a Personalidade do Indivíduo. In: **X Encontro Nacional de Educação Matemática**. Salvador: UCSAL, 2010.

FONSECA, Laerte S. e SANTOS, A. C. Um estudo preliminar sobre a Neurociência Cognitiva nos cursos de Licenciatura em Matemática de Sergipe/Brasil: necessidades de incorporação de uma engenharia neurodidática. In: **EDUCOM**: USF, 2012.

FONSECA, Laerte S. **Funções Trigonométricas**: elementos “de” & “para” uma engenharia didática. São Paulo: Livraria da Física, 2012b.

FONSECA, Laerte S. **Protocolo Neuropsicopedagógico de Avaliação Cognitiva das Habilidades Matemáticas**. Rio de janeiro: WAK, 2013a.

FONSECA, Laerte S. A neuromatemática como um novo paradigma para a Educação Matemática. In: **Direcional Educador** (ISSN 1982-2898). São Paulo: Grupo Direcional, 2013b.

FONSECA, Victor da. **Cognição e aprendizagem**: abordagem neuropsicológica e psicopedagógica. Lisboa: Âncora Editora, 2001.

FRANCE. Ministère de l’Éducation Nationale. Bulletin Officiel nº 06 du 28 août 2008. **Mathématiques, classe 3*ème***. Paris, 2008. Disponible dans <http://www.education.gouv.fr/pid20484/special-n-6-du-28-aout-2008.html>. Consulté le 18 Juin 2013a.

FRANCE. Ministère de l’Éducation Nationale. Bulletin Officiel nº 06 du 28 août 2008. **Mathématiques, classe *4ème***. Paris, 2008. Disponible dans <http://www.education.gouv.fr/pid20484/special-n-6-du-28-aout-2008.html>. Consulté le 18 Juin 2013a.

_____. Ministère de l’Éducation Nationale. Bulletin Officiel nº 30 du 23 juin 2009. **Mathématiques, Seconde G**. Paris, 2009. Disponible dans < http://eduscol.education.fr/cid46463/programmes.html>. Consulté le 18 Juin 2013b.

_____. Ministère de l'Éducation Nationale. Bulletin Officiel nº 09 du 30 septembre 2010. **Mathématiques, classe 1ème S**. Paris, 2010. Disponible dans <http://www.education.gouv.fr/pid24426/special-n-9-du-30-septembre-2010.html> Consulté le 18 Juin 2013b.

_____. Ministère de l'Éducation Nationale. Bulletin Officiel nº 08 du 13 octobre 2011. **Mathématiques, classe Terminale S**. Paris, 2011. Disponible dans <http://media.education.gouv.fr/file/special_8_men/98/4/mathematiques_S_195984.pdf> Consulté le 18 Juin 2013b.

GADOTTI, M. **Boniteza de um sonho**: ensinar-e-aprender com sentido. Curitiba: Positivo, 2005.

GAUSSEL, M. e REVERDY, C. **Neurosciences et éducation**: la bataille des cerveaux. Dossier d'actualité Veille et Analyses IFÉ, n° 86, septembre. Lyon: ENS de Lyon. 2013.

GAZZANIGA, M. S. *et al.* **Neurociência Cognitiva**: a biologia da mente. Porto Alegre: Artmed, 2006.

GOIOS, D. F. **Potencialidades didático-pedagógico para um objeto de aprendizagem**: uma análise através da Teoria da Cognição Corporificada para o ensino de trigonometria. Dissertação de Mestrado – Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, Universidade Bandeirante de São Paulo, São Paulo, 2010.

GONÇALVES, F. I. R. *et al.* **Matemática na Astronomia**. Trabalho de Conclusão de Curso. Universidade do Minho. Braga, 2007.

GOUVEIA, J. **A NOÇÃO DE FUNÇÃO: UMA ABORDAGEM CENTRADA EM SITUAÇÕES DE APRENDIZAGEM.** Tese de Doutorado – Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, Universidade Anhanguera de São Paulo, São Paulo, 2014.

GUEUDET, G. **Investigating the secondary-tertiary transition**. Educational Studies in Mathematics, v. 67, n. 3, 237-254, 2008b.

GUEUDET, G. **La transition secondaire-supérieur***:* différents regards, différentes vues*:* Intervention au Centre de Didactique Supérieur. Liège: Université de Liège, 2008a.

GUZZO, R.S.L. **Dificuldades de aprendizagem**: Modalidades de atenção e análise de tarefas em materiais didáticos. Tese de Doutorado – Programa de Pós-Graduação em Psicologia Escolar e Experimental, Universidade de São Paulo, São Paulo, 1987.

HAREL, G.; SELDEN, A.; SELDEN, J. Advanced Mathematical Thinking. In: GUTIERREZ, A; BOERO, P. (Eds.). **Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education.** Sense Rotterdam, p. 147-172, 2006.

HERCULANO-HOUZEL, S. **Fique de bem com seu cérebro**. Rio de Janeiro: Editora Sextante, 2007.

HILLEL, J.; SIERPINSKA, A. On one persistent mistake in linear algebra. In: **Proceedings of the XVIII International Conference of PME**, v. II, Portugal, p. 65-72. 1994.

HUEB, M. C. **Trigonometria**: Expectativas Institucionais para a prática docente. Dissertação de Mestrado – Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, Universidade Anhanguera de São Paulo, São Paulo, 2014.

IMAFUKU, R. S. **Sobre a passagem do estudo de função de uma variável real para o caso de duas variáveis**. Dissertação de Mestrado – Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2008.

IZQUIERDO, I. **Memória**. Porto Alegre: Artmed, 2011.

KANDEL, E. et al. **Principles of Neural Science**. Nova York: McGraw-Hill, 1991.

KEMPER, Érico. **A inserção de tópicos de Astronomia no estudo da Mecânica em uma abordagem epistemológica**. Porto Alegre: UFRGS, Instituto de Física, Programa da Pós-Graduação em Ensino de Física, 2007.

KENNEDY, E. S. **História da trigonometria**. São Paulo: Atual, 1992. (Coleção Tópicos de História da Matemática para sala de aula; v. 5)
Knudsen (2007)

KNUDSEN, E. I. **Fundamental components of attention**. Annual Review of Neuroscience, 2007, v. 30, p. 57-58.

KREPSKY, M. C. **Dificuldades de aprendizagem**: movimentos discursivos na voz dos alunos. Dissertação de Mestrado – Programa de Pós-Graduação em Educação, Universidade Regional de Blumenau, Blumenau, 2004.

KRISTENSEN *et al.* **Desenvolvimento Histórico e Fundamentos Metodológicos da Neuropsicologia Cognitiva.** Psicologia: Reflexão e Crítica, 2001, 14(2), p. 259-*274.*

LeDOUX, J**. O cérebro emocional**: os misteriosos alicerces da vida emocional. Rio de Janeiro: Objetiva, 2001.

LENT, R. **Cem bilhões de neurônios**. Rio de Janeiro: Atheneu, 2002.

LENT, R. **Neurociência da Mente e do Comportamento**. Rio de Janeiro: Guanabara Koogan, 2008.

LEZAK, M. D. et al. **Neuropsychological assessment**. New York: Oxford, 1976.

LOBO DA COSTA, N.M. **Funções Seno e Cosseno**: uma sequência de ensino a partir dos contextos do mundo experimental e do computador. Dissertação de Mestrado – Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 1997.

LUCAS, A. B. **Equações e Funções: descontinuidades conceituais**. Dissertação de Mestrado – Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2009.

LURIA, A. R. **Fundamentos de Neuropsicologia**. São Paulo: USP, 1981.

MAIA, D. **Função Quadrática**: um estudo didático de uma abordagem computacional. Dissertação de Mestrado – Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2007.

MAGALHÃES, A. R. **Mapas conceituais digitais como estratégia para o desenvolvimento da metacognição no estudo de funções**. Tese de Doutorado – Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2009.

MALLOY-DINIZ *et al*. Neuropsicologia das Funções Executivas. In: FUENTES, D. *et al.* (2008). **Neuropsicologia**: teoria e prática. Por Alegre: Artmed, 2008.

MALUF, M. I. Neuro+Aprendizagem: em busca do sucesso escolar. In: **Direcional Educador** (ISSN 1982-2898). São Paulo: Grupo Direcional, 2011.

MANRIQUE, A. L. **Licenciatura em Matemática:** formação para a docência x formação específica. Educ. Matem. Pesq., São Paulo: PUC/SP, 2009, v.11, n.3, p. 515-534.

MARCONDES, D. **Iniciação à história da filosofia**. Rio de Janeiro: Jorge Zahar, 2001.

MARIANI, R.C.P. **Transição da educação básica para o ensino superior**: a coordenação de registros de representação e os conhecimentos mobilizados pelos alunos no curso de cálculo. Tese de Doutorado – Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2006.

MARTINS, Lourival Pereira. **Análise da Dialética Ferramenta-Objeto na Construção do Conceito de Função**. Dissertação de Mestrado – Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2006.

MARTINS, Barbara Milan. **Ambiente Educacional Enriquecido**: estudo da aplicação de oficinas de construção de brinquedos em centro de ciência. Dissertação de Mestrado – Programa de Pós Graduação em Psicologia. Área de concentração: Neurociências e Comportamento – Instituto de Psicologia da Universidade de São Paulo, São Paulo, 2012.

MATHEUS, P. e DIAS, M. A. Estudo comparado da transição ensino secundário e superior entre Brasil e Moçambique. In: **RELME 26**. Belo Horizonte, 2012.

MENDES, Elizabete Egiminiano de Souza; APOLINARIA, C. A. F.; SAMPAIO, A. R.; GOZZI, M.E. ; VISCOVINI, R. C. A Evolução da Aprendizagem da Astronomia na Primeira Década deste Século nas Escolas Públicas de Goioerê. In: **VIII Encontro Nacional de Pesquisa em Educação em Ciências (ENPEC) e I Congresso**

Iberoamericano de Investigación en Enseñanza de las Ciencias (CIEC), 2011, Campinas. VIII Encontro Nacional de Pesquisa em Educação em Ciências (ENPEC) e I Congresso Iberoamericano de Investigación en Enseñanza de las Ciencias (CIEC), 2011.

MENDES, I. A. **Ensino de trigonometria através de atividades históricas**. Dissertação de Mestrado em Educação – Programa de Pós-Graduação em Educação, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 1997.

MIASHIRO, P. M. **A transição das razões para as funções trigonométricas**. Dissertação de Mestrado – Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática. Universidade Anhanguera de São Paulo, São Paulo, 2013.

MIOTTO, E. C. Avaliação neuropsicológica e Funções cognitivas. In: MIOTTO, E. C., LUCIA, M. C. e SCAFE, M. (org.). **Neuropsicologia Clínica**. São Paulo: Roca, 2012.

MISSET, L. *et al.* **Déclic Maths***.* Lyon: Hachette Éducation, 2011*.*

NACARATO, A. M.; BREDARIOL, C. C.; PASSOS, M. P. F. Tendências presentes no ensino de trigonometria no Brasil: uma abordagem histórica. In: MENDES, J. R.; GRANDO, R. C. (Org.). **Múltiplos olhares:** matemática e produção de conhecimento. São Paulo: Musa Editora, 2007. p. 65-93.

NASSER, L. Uma pesquisa sobre o desempenho de alunos de Cálculo no traçado de gráficos. In: Frota, M.C.R. e Nasser, L (org.). **Educação Matemática no Ensino Superior: pesquisas e debates**. SBEM, 2009. p. 43-58.

NASSER, L., SOUSA, G. A. e TORRACA, M. A. Transição do ensino médio para o superior: como minimizar as dificuldades em cálculo? In: **V Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática (em CD)**. Petrópolis, RJ, 2012.

NGUYEN, Ai Q. **Les apports d'une analyse didactique comparative de la résolution des équations du second degré dans l'enseignement secondaire au Viêt-Nam et en France.** These en Co-Tutelle. Doctorat en Didactique des Mathématiques. Université Joseph Fourier-Grenoble I, 2006.

NOGUEIRA, S. **Astronomia**: ensino fundamental e médio. Brasília: MEC, SEB, MCT, AEB, 2009. (Coleção Explorando o ensino; v. 11)

NUTTI, J. Z. **Distúrbios, transtornos, dificuldades e problemas de aprendizagem**: algumas definições e teorias explicativas, publicado em 2002. Disponível em psicopedagogia online. <http://www.psicopedagogia.com.br/artigos>. Acesso em: 24 maio 2013.

OCDE, **Comprendre le cerveau**: naissance d'une Science de l'apprentissage . Paris: CERI, 2013a.

OCDE. PISA 2012 Results: What Students Know and Can Do – Student Performance in Mathematics, Reading and Science (Volume I), PISA, OCDE, 2013. Publishing. Disponível em <http.//dx.doi/10.1787/978964201118-em>. Acesso em: 25 nov. 2013b.

OLIVEIRA, A. S. **A Abordagem do conceito de função em Livros didáticos ginasiais**: uma análise em tempos modernos (décadas de 1960 e 1970). Dissertação de Mestrado – Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, Universidade Bandeirante de São Paulo, São Paulo, 2009.

ORGANIZAÇÃO MUNDIAL DA SAÚDE. **Classificação de Transtornos Mentais e de Comportamento da CID-10**: Descrições Clínicas e Diretrizes Diagnósticas. Porto Alegre: Artmed, 1993.

ORFÃO, R. B. **Professores de matemática em um grupo de Estudos**: Uma investigação sobre o uso de tecnologia no ensino de funções trigonométricas. Dissertação de Mestrado – Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, Universidade Bandeirante de São Paulo, São Paulo, 2012.

PAIN, S. **Diagnóstico e Tratamento dos Problemas de Aprendizagem**. Trad. de Ana Maria N. Machado. Porto Alegre: Artes Médicas, 1981.

PALIS, G. **A transição do Ensino Médio para o Ensino Superior**. Anais do X Encontro Nacional de Educação Matemática (em CD). Salvador, BA, 2010.

PARENT, A. **Histoire du creveau**: de l'Antiquité aux neurosciences. Les Presses de l'Université Laval, 2009.

PELHO, E. B. B. **Introdução ao conceito de função: a importância da compreensão das variáveis**. Dissertação de Mestrado – Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2013.

PEREIRA, J. C. **O conceito de função**: A utilização do software Simcalc e as narrativas apresentadas por alunos de licenciatura em matemática. Dissertação de Mestrado – Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, Universidade Bandeirante de São Paulo, São Paulo, 2013.

PILLON, J. **Neurosciences Cognitives et Conscience**: comprendre les propositions des neuroscientifiques et des philosophes. Lyon: Chronique Sociale, 2008.

PINTO, J. B. **Sequência didática no aprendizado de taxa de variação média de função para alunos de licenciatura em matemática**. Dissertação de Mestrado – Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, Universidade Bandeirante de São Paulo, São Paulo, 2011.

PLANO de Ensino IME – USP. Disponível em: <http://www.ime.usp.br/mat/licenciatura/projeto-pedagogico> Acesso em: 16 outubro 2014.

PLANO de Ensino INSA – LYON I. Disponível em: < http://www.insa-lyon.fr/fr/formation/offre-de-formation2/g/d/m?y=1&s=1&p=1009> Acesso em: 16 março 2014.

PURVES, D. *et al*. **Neurociências**. Porto Alegre: Artmed, 2010.

RAMOS, C. S. **Um experimento apoiado na teoria dos registros de representações semióticas sobre o ensino de função linear afim em um ambiente computacional.** Dissertação de Mestrado – Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, Universidade Anhanguera de São Paulo, São Paulo, 2014.

REDOLAR RIPOLL, D. **Neurociência Cognitiva**. Editorial Médica Panamericana: Madrid, 2014.

REIS, V. P. Estudo da distribuição da atenção viso-espacial em escolares. Tese de Doutorado – Programa de Pós-Graduação em Psicologia Escolar e Experimental (Neurociência e Comportamento) da Universidade de São Paulo, São Paulo, 2010.

RESENDE, G. e MESQUITA, M. G.B. F. Principais dificuldades percebidas no processo ensino-aprendizagem de matemática em escolas do município de Divinópolis, MG. In: **Educ. Matem. Pesq**, São Paulo, 2013, v.15, n.1, p.199-222.

REZENDE, W. O ensino de Cálculo*:* dificuldades de natureza epistemológica. In: Machado, N.J. e Cunha, M.O: **Linguagem, Conhecimento, Ação – Ensaios de Epistemologia e Didática**, p. 313-336. Escrituras Editora, São Paulo, 2003.

RIBEIRO, Fernanda Teixeira. Modelos Matemáticos do Cérebro. In: **Revista Mente e Cérebro**, ano 20, n. 257, p. 64-67. São Paulo: Duetto, 2014.

RIBEIRO, Márcia Regina Ramos Costa. **Possibilidades e dificuldades no desenvolvimento de situações de aprendizagem envolvendo funções trigonométricas**. Dissertação de Mestrado – Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2011.

RIPOLL, M. B. et al. **Trigonometria esférica**: fundamentos. Madri: UPM, 2008.

ROBERT, A. **Outils d'analyse des contenus mathématiques à enseigner au lycée et à l'université**. Recherches en Didactique des Mathématiques, [S.l.], v. 18, n. 2, p.139-190, 1998.

ROBERT, A. **Quelques outils d'analyse épistemologique et didactique de connaissances mathématiques à enseigner au lycée et à l'université**. Actes de la IX école d'ete de didactique dês mathématiques. França: Houlgate, 1997.

RODRIGUES, D. M. **A compreensão de alunos, ao final do ensino Médio, relativa ao conceito de variável**. Dissertação de Mestrado – Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2008.

ROGALSKI, M. **Notes Du séminaire à São Paulo**. Brasil, 1995.

ROMERO, J. F. Os atrasos maturativos e as dificuldades de aprendizagem. In: COLL. C., PALACIOS, J., MARCHESI, A. **Desenvolvimento psicológico e educação: necessidades educativas especiais e aprendizagem escolar.** Porto Alegre: Artes Médicas, 1995.

ROSSINI, R. **Saberes docentes sobre o tema função: uma investigação das praxeologias**. Tese de Doutorado – Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2006.

SALES, C. O. R. **Explorando função através de representações dinâmicas: narrativas de estudantes do ensino médio**. Dissertação de Mestrado – Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, Universidade Bandeirante de São Paulo, São Paulo, 2009.

SANTOS, Cláudia Pereira. **Função Seno**: Um estudo com o uso do software Winplot com alunos do ensino médio. Dissertação de Mestrado – Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2013.

SÃO PAULO (Estado). Secretaria da Educação. **Relatório Pedagógico: SARESP 2007 – Matemática**. São Paulo, SEE, 2008.

SÃO PAULO (Estado). Secretaria da Educação. **Relatório Pedagógico: SARESP 2008 – Matemática**. São Paulo, SEE, 2009.

SÃO PAULO (Estado). Secretaria da Educação. **Relatório Pedagógico: SARESP 2013 – Matemática**. São Paulo, SEE, 2014.

_____. **Matriz de referência para a avaliação SARESP: documento básico**; coordenação Maria Inês Fini. São Paulo: SEE, 2009h.

SCOZ, B. **Psicopedagogia e realidade escolar**: o problema escolar e de aprendizagem. Petrópolis: Vozes, 1994.

SIERPINSKA, A. On understanding the notion of function. In: DUBINSKY, E; HAREL, G (Ed.) **The Concept of Function: aspects of epistemology and Pedagogy**. MAA Notes, 1992, p.25-58.

SIGNORELLI, S. F. **Um ambiente virtual para o ensino semipresencial de funções de uma variável real: design e análise**. Dissertação de Mestrado – Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2007.

SILVA, Alessandra Azzolini da. **A noção de função quadrática na transição entre os ensinos fundamental, médio e superior**. Dissertação de Mestrado – Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, Universidade Bandeirantes de São Paulo, São Paulo, 2012.

SILVA, D.M.M. e THOMAZ NETO, M.O. **Conhecimentos de Estudantes do Ensino Médio sobre Razões Trigonométricas no Triângulo Retângulo**. In SIPEMAT. Recife, Programa de Pós-Graduação em Educação-Centro de Educação – Universidade Federal de Pernambuco, 2006. 1CD-ROM.

SILVA, Sílvio Alves da. **Trigonometria no triângulo retângulo**: construindo uma aprendizagem significativa. Dissertação de Mestrado – Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2005.

SILVA, Wellerson Quintaneiro. **Corporeidade e gráficos cartesianos**: a variável tempo em fenômenos periódicos. Tese de Doutorado – Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, Universidade Anhanguera de São Paulo, São Paulo, 2013.

SIMIÃO, F. **A noção de matriz na transição entre o Ensino Médio e o Ensino Superior**. Dissertação de Mestrado – Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, Universidade Bandeirante de São Paulo, São Paulo, 2010.

SOBRINHO, E. G. M.; LIMA, J. P.; THOMAZ NETO, M. O. Desempenho de alunos do ensino médio na resolução de problemas verbais e não-verbais em trigonometria. In: **VII Congresso norte/nordeste de educação em ciências e matemáticas**. Belém: UFPA/NPADC/CEJUP, 2004. p. 225-233.

SOUZA, E. P. de. **As funções seno e cosseno**: uma sequência didática envolvendo atividades com o Graphmatic. Dissertação de Mestrado – Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2010.

STERNBERG, R. J. **Psicologia Cognitiva**. São Paulo: Cengage Learing, 2010.

STEWART, J. **Cálculo, volume I**. Tradução técnica Antonio Carlos Moretti, Antonio Carlos Gilli Martins. São Paulo: Cengage Learning, 2011.

TOSCANI, P. **Les Neurosciences au coeur de la classe**. Lyon: Chronique Sociale, 2013a.

TOSCANI, P. **Apprendre avec les neurosciences**: rien ne se joue avant 6 ans. Lyon: Chronique Sociale, 2013b.

TOSCANI, P. **Apprendre avec les neurosciences**: rien ne se joue avant 6 ans. Lyon: Chronique Sociale, 2013b.

TOSCANI, P. **Les Neurosciences au coeur de la classe**. Lyon: Chronique Sociale, 2013a.

VELASQUES, B. B. e RIBEIRO, P. **Neurociências e aprendizagem:** processos básicos e transtornos. Rio de Janeiro: Rubio, 2014.

VLEESCHOUWER, M. De. Secondary-tertiary transition and students' difficulties: the example of duality. In: **CERME**. Lyon (França), 2010, p. 2256-2265.

WEBER, K. **Students' understanding of trigonometric functions**. Mathematics Education Research Journal, 17(3), 2005. p. 91-112.

WILLINGHAM, D. T. **Por que os alunos não gostam da escola?** Reposta da ciência cognitiva para tornar a sala de aula atrativa e efetiva. Porto Alegre: Artmed, 2011.

ANEXOS

ANEXO 01

UNIVERSIDADE BANDEIRANTE DE SÃO PAULO — PPG em Educação Matemática
UNIVERSITÉ CLAUDE BERNARD LYON I — CDS en Didactique des Mathématiques
LINHA DE PESQUISA: **Ensino-Aprendizagem em Matemática**

Entrevista semiestruturada com o Prof. Guy ATHANAZE[88], INSA/Lyon I.

Data: **13 de março de 2014**. Local: **INSA/Lyon I**.

1. Existe o plano oficial de ensino da disciplina Análise I?

   Resposta: *Sim. Está disponível na internet na página do INSA. Mesmo assim, você pode levar um plano impresso e a apostila (feita por mim) que eu utilizo nas aulas."*

2. Existe algum livro didático adotado para essa mesma disciplina?

   Resposta: *"Eu não adoto. Existe uma apostila elaborada por mim, onde faço um resumo dos principais tópicos a serem abordados."*

3. Quais são as dificuldades de aprendizagem dos alunos com relação ao campo da trigonometria?

   Resposta: *"Em minha opinião, a maior dificuldade é que o aluno utiliza a matemática como ferramenta, principalmente com relação à abstração das noções trigonométricas e a ausência de habilidades dos alunos latinos com as demonstrações, pois percebo que os alunos latinos não estão acostumados a fazer isso.*
   Quando inicio as aulas, verifico que a primeira e principal dificuldade dos alunos é o trabalho na transformação de grau em radiano e, mais especificamente, o trabalho com os radianos. Eles não compreendem isso! A segunda dificuldade observada no início das aulas é a ausência do formalismo necessário na abordagem dos conteúdos que exige o domínio sobre as demonstrações."

4. Quais são os conteúdos que não é possível alcançar por causa dessas dificuldades?

[88] Essa entrevista gravada e transcrita com autorização do entrevistado, Prof. Guy ATHANAZE.

Resposta: *"Na verdade, apenas alguns em que se faz necessário algum envolvimento da trigonometria. Mas, geralmente, não tenho problemas, pois ela representa uma parte muito pequena do curso."*

5. Eu estou planejando desenvolver uma experiência e, nesse sentido, gostaria de saber quais seriam os tipos de tarefas para compreender essas dificuldades?

   Resposta: *"Em minha opinião, seriam duas: (a) Calcular o cosseno de um ângulo aplicando apenas a definição; (b) Calcular o cosseno de um ângulo demonstrando o resultado por meio das propriedades."*

6. Seria possível aplicar um protocolo experimental na turma em que o senhor ministra aula da disciplina análise I a fim de verificar o desempenho dos seus alunos diante três tipos de tarefas relacionadas às noções de Funções Trigonométricas?

   Resposta: *"Sim, seria possível nas seguintes datas: 10 ou 17 de abril no período da tarde."*

7. Quantos são os brasileiros e franceses? O senhor percebe diferença de potencial em matemática entre eles a partir da base inicial, considerando-se as duas nacionalidades?

   Resposta: *"São 19 alunos brasileiros, 31 latinos e 50 franceses. O que percebo é a fragilidade com as demonstrações em matemática entre latinos e brasileiros."*

* * *

ANEXO 02

UNIVERSIDADE BANDEIRANTE DE SÃO PAULO — PPG em Educação Matemática
UNIVERSITE CLAUDE BERNARD LYON I — CDS en Didactique des Mathématiques
LINHA DE PESQUISA: **Ensino-Aprendizagem em Matemática**

PROTOCOLO EXPERIMETAL (PE) – Grupo A_B

Instituição: _____

Disciplina: ***CALCULO I*** – Turma: _____ – DATA: ___ ***de*** _____ ***de 2014***

Estudante: _____

Nacionalidade: BRASIL (_) FRANÇA ( )	*Sexo: FEMININO (_) MASCULINO ( )*	*Idade: ____anos*

Prezado aluno (a):

1) Pede-se ***responder*** os seguintes exercícios A, B e C no tempo máximo de 1 hora.

2) Pede-se ***escrever*** o processo de resolução e ***justificar*** as respostas.

3) Em anexo, encontra-se ao seu dispor uma folha de resposta onde devem ser resolvidos todos os exercícios.

A: Diga se cada uma das afirmações seguintes é verdadeira ou falsa e justifique:

a) Como $\frac{\pi}{8} < \frac{\pi}{6}$, $\cos(\frac{\pi}{8}) < \cos(\frac{\pi}{6})$

b) Como $\frac{\pi}{8} < \frac{\pi}{6}$, $\sin(\frac{\pi}{8}) < \sin(\frac{\pi}{6})$

c) Como $\frac{2\pi}{3} < \frac{11\pi}{12}$, $\cos(\frac{2\pi}{3}) < \cos(\frac{11\pi}{12})$

d) Como $\frac{2\pi}{3} < \frac{11\pi}{12}$, $\sin(\frac{2\pi}{3}) < \sin(\frac{11\pi}{12})$

B: Determine o período da função $g(x) = 2\cos x - \cos(5x + 1)$. Justificar.

C: Foi construído com hastes de metal um losango articulado de lado igual a 6 cm. Denominou-se de ABCD esse losango e α o ângulo BÂD.

a) Estude as variações de área desse losango em função do ângulo α.
b) Para que valor de α a área do losango é máxima? Justificar.

PROTOCOLO EXPERIMETAL (PE) – Grupo A_B

Instituição: _____

Disciplina: ***CALCULO I*** – Turma: _____ – DATA: ___ ***de*** _____ ***de 2014***

Estudante: _____

Nacionalidade: BRASIL (_) FRANÇA ( )	*Sexo: FEMININO (_) MASCULINO ( )*	*Idade: ____anos*

FOLHA DE RESPOSTAS

ANEXO 03

UNIVERSIDADE BANDEIRANTE DE SAO PAULO — PPG em Educação Matemática
UNIVERSITÉ CLAUDE BERNARD LYON I — CDS en Didactique des Mathématiques
LINHA DE PESQUISA: **Ensino-Aprendizagem em Matemática**

PROTOCOLO EXPERIMETAL (PE) – Grupo B_B

Instituição: _____

Disciplina: ***CALCULO I*** – Turma: _____ – DATA: ___ ***de*** _____ ***de 2014***

Estudante: _____

Nacionalidade: BRASIL ( ) FRANÇA ( )	Sexo: FEMININO ( ) MASCULINO ( )	Idade: ____anos

Prezado aluno (a):

1) Pede-se ***responder*** os seguintes exercícios A, B e C no tempo máximo de 1 hora.

2) Pede-se ***escrever*** o processo de resolução e ***justificar*** as respostas.

3) No anexo 01, encontra-se ao seu dispor uma folha com círculo trigonométrico que pode ser usada para resolver os exercícios.

4) No anexo 02, encontra-se ao seu dispor uma folha de resposta onde devem ser resolvidos todos os exercícios.

A: Diga se cada uma das afirmações seguintes é verdadeira ou falsa e justifique:

a) Como $\frac{\pi}{8} < \frac{\pi}{6}$, $\cos(\frac{\pi}{8}) < \cos(\frac{\pi}{6})$

b) Como $\frac{\pi}{8} < \frac{\pi}{6}$, $\sin(\frac{\pi}{8}) < \sin(\frac{\pi}{6})$

c) Como $\frac{2\pi}{3} < \frac{11\pi}{12}$, $\cos(\frac{2\pi}{3}) < \cos(\frac{11\pi}{12})$

d) Como $\frac{2\pi}{3} < \frac{11\pi}{12}$, $\sin(\frac{2\pi}{3}) < \sin(\frac{11\pi}{12})$

Você precisou utilizar da folha com o círculo trigonométrico para resolver esse exercício? Sim ( ) ou Não ( ). Por quê?

B: Determine o período da função $g(x) = 2\cos x - \cos(5x + 1)$. *Justificar.*

Você precisou utilizar da folha com o círculo trigonométrico para resolver esse exercício? Sim ( ) ou Não ( ). Por quê?

C: Foi construído com hastes de metal um losango articulado de lado igual a 6 cm. Denominou-se de ABCD esse losango e α o ângulo BÂD.

a) Estude as variações de área desse losango em função do ângulo α.
b) Para que valor de α a área do losango é máxima? Justificar.

Você precisou utilizar da folha com o círculo trigonométrico para resolver esse exercício? Sim ( ) ou Não ( ). Por quê?

PROTOCOLO EXPERIMETAL (PE) – Grupo B_B

Instituição: _____

Disciplina: ***CÁLCULO I*** – Turma: _____ – DATA: ___ ***de*** _____ ***de 2014***

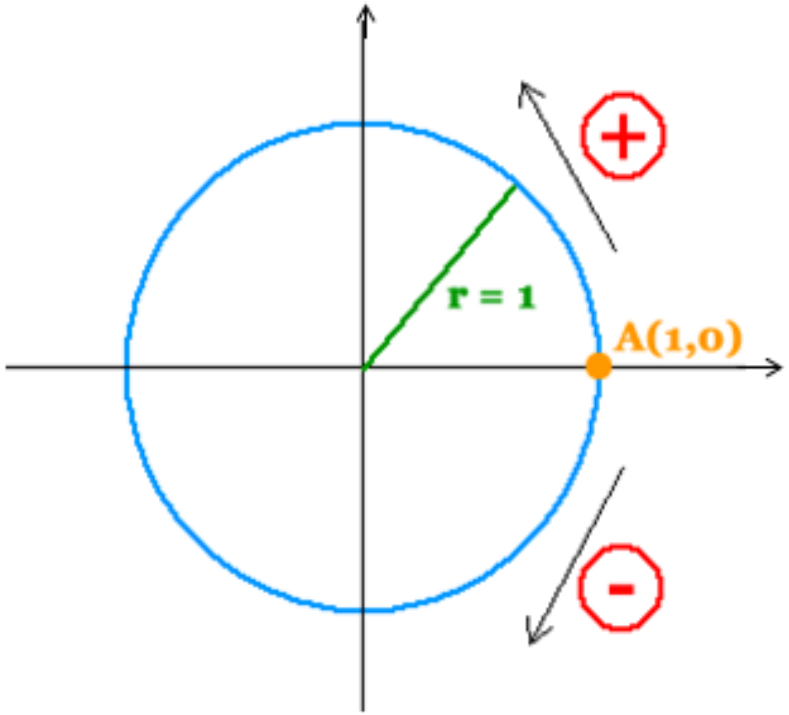
Estudante: _____

Nacionalidade: BRASIL ( ) FRANÇA ( )	*Sexo: FEMININO ( ) MASCULINO ( )*	*Idade: ____anos*

FOLHA DE RESPOSTAS

PROTOCOLO EXPERIMETAL (PE) – Grupo B_B

Círculo Trigonométrico



ANEXO 04

UNIVERSITE BANDEIRANTE DE SAO PAULO — PPG en Didactique des Mathématiques
UNIVERSITÉ CLAUD BERNARD LYON I — CDS en Didactique des Mathématiques
LIGNE DE RECHERCHE: **Enseignement-apprentissage en Mathématiques**

PROTOCOLE EXPERIMETAL (PE) - Groupe A_F

Institution: _____

Discipline: ***ANALYSE I*** – Classe: _____ – DATE: ___ ***de*** _____ ***de 2014.***

Étudiant: _____

Nationalité: BRESIL ( ) FRANCE ( )	*Sexe: FEMININ ( ) MASCULIN ( )*	*Age: _____ ans*

Cher étudiant:

1) Vous devez ***répondre*** aux exercices suivants A, B et C dans le temps maximum de 1 heure.
2) Vous devez ***écrire*** la démarche de résolution et ***justifier*** les réponses.
3) Dans l'annexe, se trouve à votre disposition une feuille de réponses où tous les exercices doivent être résolus.

A: Dire si chacune des affirmations suivantes est vraie ou fausse et justifier :

a) Comme $\frac{\pi}{8} < \frac{\pi}{6}$, $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) < \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$

b) Comme $\frac{\pi}{8} < \frac{\pi}{6}$, $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right) < \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$

c) Comme $\frac{2\pi}{3} < \frac{11\pi}{12}$, $\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) < \cos\left(\frac{11\pi}{12}\right)$

d) Comme $\frac{2\pi}{3} < \frac{11\pi}{12}$, $\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) < \sin\left(\frac{11\pi}{12}\right)$

B: Déterminer la période de la fonction $g(x) = 2\cos x - \cos(5x + 1)$. Justifier.

C: On a construit avec des tiges métalliques un losange articulé de côté 6 cm. On note ABCD ce losange et α l'angle BAD.

a) Etudier les variations de l'aire de ce losange en fonction de l'angle α.
b) Pour quelle valeur de α l'aire du losange est-elle maximale? Justifier.

PROTOCOLE EXPERIMETAL (PE) - Groupe A_F

Institution: _____

Discipline: ***ANALYSE I*** – Classe: _____ – DATE: ___ ***de*** _____ ***de 2014.***

Étudiant: _____

Nationalité: BRESIL ( ) FRANCE ( )	*Sexe: FEMININ ( ) MASCULIN ( )*	*Age: _____ ans*

FICHE DE REPONSE

ANEXO 05

UNIVERSITE BANDEIRANTE DE SAO PAULO — PPG en Didactique des Mathématiques
UNIVERSITE CLAUD BERNARD LYON I — CDS en Didactique des Mathématiques
LIGNE DE RECHERCHE: **Enseignement-apprentissage en Mathématiques**

PROTOCOLE EXPERIMETAL (PE) - Groupe B_F

Institution: _____

Discipline: ***ANALYSE I*** – Classe: _____ – DATE: __ de _____ ***de 2014.***

Etudiant: _____

Cher étudiant:

1) Vous devez ***répondre*** aux exercices suivants A, B et C dans le temps maximum de 1 heure.
2) Vous devez ***écrire*** la démarche de résolution et ***justifier*** les réponses.
3) Dans l'annexe 01, se trouve à votre disposition une feuille avec un cercle trigonométrique qui peut être utilisé pour résoudre les exercices.
4) Dans l'annexe 02, se trouve à votre disposition une feuille de réponses où tous les exercices doivent être résolus.

A: Dire si chacune des affirmations suivantes est vraie ou fausse et justifier:

a) Comme $\frac{\pi}{8} < \frac{\pi}{6}$, $\cos(\frac{\pi}{8}) < \cos(\frac{\pi}{6})$

b) Comme $\frac{\pi}{8} < \frac{\pi}{6}$, $\sin(\frac{\pi}{8}) < \sin(\frac{\pi}{6})$

c) Comme $\frac{2\pi}{3} < \frac{11\pi}{12}$, $\cos(\frac{2\pi}{3}) < \cos(\frac{11\pi}{12})$

d) Comme $\frac{2\pi}{3} < \frac{11\pi}{12}$, $\sin(\frac{2\pi}{3}) < \sin(\frac{11\pi}{12})$

Avez-vous essayé d'utiliser la feuille avec le cercle trigonométrique pour résoudre cet exercice? Oui ( ) ou non ( ). Pourquoi?

B: Déterminer la période de la fonction $g(x) = 2\cos x - \cos(5x + 1)$. Justifier.

Avez-vous essayé d'utiliser la feuille avec le cercle trigonométrique pour résoudre cet exercice? Oui ( ) ou non ( ). Pourquoi?

C: On a construit avec des tiges métalliques un losange articulé de côté 6 cm. On note ABCD ce losange et α l'angle BAD.

a) Etudier les variations de l'aire de ce losange en fonction de l'angle α.
b) Pour quelle valeur de α l'aire du losange est-elle maximale? Justifier.

Avez-vous essayé d'utiliser la feuille avec le cercle trigonométrique pour résoudre cet exercice? Oui ( ) ou non ( ). Pourquoi?

PROTOCOLE EXPERIMETAL (PE) - Groupe B_F

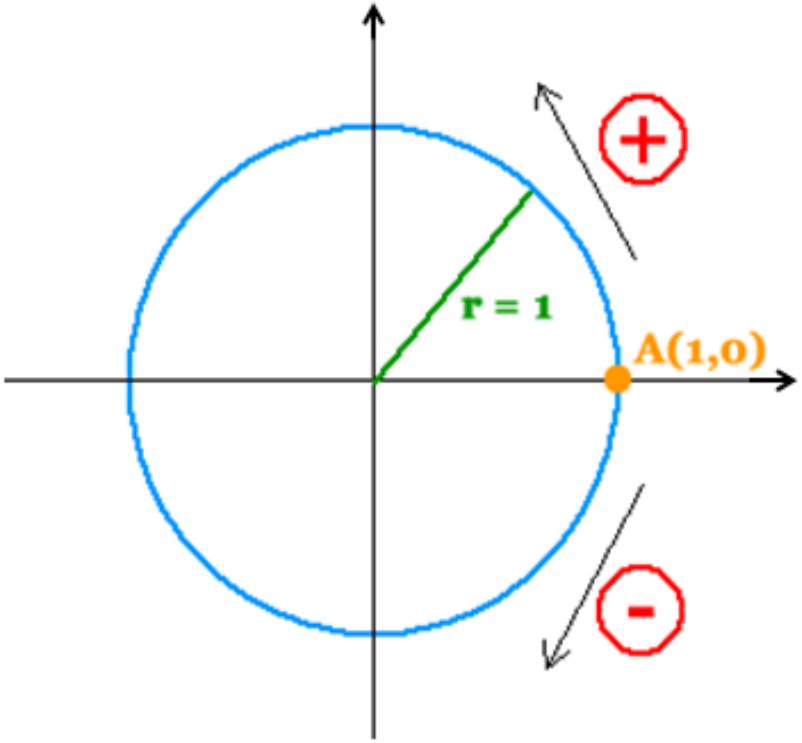
Institution: _____

Discipline: ***ANALYSE I*** – Classe: _____ – DATE: ***10 de _____ de 2014.***

Étudiant: _____

Nationalité: BRESIL ( ) FRANCE ( )	*Sexe: FEMININ ( ) MASCULIN ( )*	*Age: _____ ans*

FICHE DE REPONSE

PROTOCOLE EXPERIMETAL (PE) – Groupe B_F

Cercle Trigonométrique